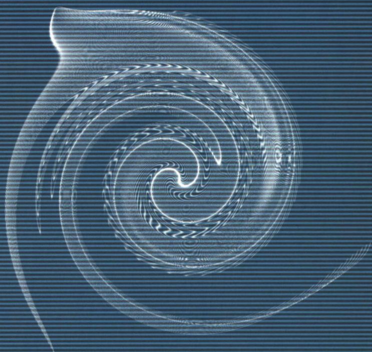
动力机械及工程热物理



国防科工委『十五』规划教材

气体动力学

●王保国 刘淑艳 黄伟光 编著



北京理工大学出版社
北京航空航天大学出版社 西北工业大学出版社
哈尔滨工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社

国防科工委“十五”规划教材

动力机械及工程热物理

责任编辑：向继红

书籍装帧：



ISBN 7-5640-0445-2

定价：62.00元



国防科工委“十五”规划教材. 动力机械及工程热物理

气 体 动 力 学

王保国　刘淑艳　黄伟光　编著

北京理工大学出版社
北京航空航天大学出版社　西北工业大学出版社
哈尔滨工业大学出版社　哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书为国防科工委“十五”重点教材。全书贯穿了基础、实用、简练、前沿这四条原则，深入浅出，构思巧妙。在内容讲解上，注重物理概念清晰、数学推导严谨，尽可能将严密的数学方法与工程实际相结合，引导学生用现代数值计算方法去求解气体动力学的基本问题。全书分10章，涵盖了气体动力学的主要内容，从低速到高速，从一维到三维流动，从亚声速到高超声速的流动问题，特别讲到了跨声速、高超声速及气动声学基础的内容，填补了现有教科书中的缺憾。

图书在版编目(CIP)数据

气体动力学/王保国，刘淑艳，黄伟光编著．—北京：北京理工大学出版社，2005.8

国防科工委“十五”规划教材．动力机械及工程热物理

ISBN 7-5640-0445-2

Ⅰ．气…　Ⅱ．①王…②刘…③黄…　Ⅲ．气体动力学-高等学校-教材

Ⅳ．O354

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第009311号

气体动力学

王保国　刘淑艳　黄伟光　编著

责任编辑　向继红

责任校对　陈玉梅

北京理工大学出版社出版发行

北京市海淀区中关村南大街5号(100081)

电话：010－68914775(办公室)　68944990(发行部)

http://www.bitpress.com.cn

E-mail：chiefedit@bitpress.com.cn

北京圣瑞伦印刷厂印制　各地新华书店经销

开本：787×960　1/16

印张：44　字数：922千字

2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷

印数：2000册．

ISBN 7-5640-0445-2　　定价：62.00元

国防科工委“十五”规划教材编委会



总　序

国防科技工业是国家战略性产业，是国防现代化的重要工业和技术基础，也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来，在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下，国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中，取得了举世瞩目的辉煌成就。研制、生产了大量武器装备，满足了我军由单一陆军，发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要，特别是在尖端技术方面，成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术，使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备，使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路，建立了专业门类基本齐全，科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系，奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础；掌握了大量新技术、新工艺，研制了许多新设备、新材料，以"两弹一星"、"神舟"号载人航天为代表的国防尖端技术，大大提高了国家的科技水平和竞争力，使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来，伴随着改革开放的伟大实践，国防科技工业适时地实行战略转移，大量军工技术转向民用，为发展国民经济作出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业，国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来，国防科技工业培养和造就了一支以"两弹一星"元勋为代表的优秀的科技人才队伍，他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神，勇挑重担，敢于攻关，为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动，成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战，高等院校在培养国防科技人才，生产和传播国防科技新知识、新思想，攻克国防基础科研和高技术研究难题当中，具有不可替代的作用。国防科工委高度重视，积极探索，锐意改革，大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具，但受种种客观因素的影响，现有的教材与专著整体上已落后于当



今国防科技的发展水平，不适应国防现代化的形势要求，对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况，建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系，国防科工委全额资助编写、出版 200 种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量，在广泛动员全国相关专业领域的专家学者竞投编著工作的基础上，以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的 100 多位专家、学者，对经各单位精选的近 550 种教材和专著进行了严格的评审，评选出近 200 种教材和学术专著，覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与工程、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者，他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等，具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中，国防特色专业重点教材和专著的出版，将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出，进入二十一世纪，我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标，对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展，提升国防实力，需要造就宏大的人才队伍，而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务，落实科教兴国和人才强国战略，推动国防科技工业走新型工业化道路，加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华，实现志向，提供了缤纷的舞台，希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识，树立正确的世界观、人生观、价值观，努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任，创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好，国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝



序

气体动力学的发展经历了三个重要的历史时期，一是从19世纪下半叶到20世纪30年代，这是气体动力学的初步奠基阶段。这个时期低速飞机的设计技术已日趋成熟，由杜朗(W. F. Durand)主编的六卷本《空气动力学理论》(Aerodynamic Theory)丛书已于1934年开始出版，这是一套世界性权威丛书，普朗特(L. Prandtl)、泰勒(G. I. Taylor)和卡门(T. von Karman)等都参加了该丛书的撰写；二是从1935年至20世纪60年代初，这是气体动力学高速流动大发展的阶段，它标志着人类进入了超声速时代。正是在这个时期里，由查雷(J. Charyk)任主编的12卷本《高速空气动力学与喷气推进》(High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion)丛书由普林斯顿大学出版，一百多位当时在美国的第一流科学家，例如卡门、钱学森、林家翘、郭永怀等都是该丛书的作者；三是从20世纪60年代至今的近50年，在这个时期里载人的和不载人的高超声速飞行器已成为现实，而且航空航天事业的迅速发展，拉动了气体动力学各方面的研究工作，特别是跨声速流场以及高超声速流场的数值计算。大量的研究工作表明：在高超声速气体动力学中，高温热效应十分突出，气动热力学(Aerothermodynamics)的研究，尤其是数值计算技术的飞速发展极大地丰富了气体动力学的基本内容。显然，这些近50年新近发展的前沿内容应该反映到我们的教科书中。

本书是供工程热物理等专业本科生使用的一本风格别致的基础性教科书。全书贯穿了基础、实用、简练、前沿这四条原则，深入浅出、构思巧妙，充分表明了作者们的造诣深厚与匠心独运。在内容的讲解上，注重物理概念清晰、数学推导严谨，尽可能把严密的数学方法与工程实际相结合，密切关注以实际问题为背景的各种力学模型条件的分析，引导学生用现代数值计算方法去求解气体动力学的基本问题。全书共分10章，涵盖了气体动力学的主要基本内容，它涉及从低速到高速，从一维到三维流动，从亚声速、跨声速、超声速到高超声速的流动问题；特别是跨声速流动、高超声速流动以及气动声学基础这三章内容在现有的气体动力学教科书中是不多见的。

本书的第一作者王保国博士是数学、力学功底深厚的中青年气体动力学学术



带头人之一。他治学严谨，处理问题强调物理直观，科学研究注重联系实际。大学毕业后，他在国防科工委某研究机构工作过 8 年，担任我国某型歼击飞机发动机的延寿改型工作。他深入制造工厂、车间、试车台并参加飞机试飞，处理过大量工程问题。他在中国科学院学习与工作过 16 年，在清华大学任教授 10 年，在理论与实践两方面都经受过比较全面的训练并且吸取了众家精华。他曾在清华大学工程力学系为流体力学专业与工程热物理专业的本科生讲授过近 10 年的气体动力学课程，深得同学们的厚爱并荣获清华大学教学优秀奖。他在 AIAA、ASME、力学学报、应用数学和力学、空气动力学学报、工程热物理学报等国内外重要学术刊物上发表过 160 余篇文章，其中许多文章被 SCI、EI 检索收录，得到了国内外同行们的认可与关注，而且多次获奖。第二作者刘淑艳教授一直从事流体力学与气体动力学的教学与研究工作。她在增压器气动设计方面颇具特色并获得过国家发明奖。第三作者黄伟光研究员是在国外留学 9 年之后于 1991 年回国创业的工程热物理界的新秀，他是中国科学院工程热物理研究所所长与气动热力学的学科带头人，是中国科学院知识创新工程项目的首席科学家。他一直从事高速与高超声速气动与燃烧方面的研究，指导着多名博士生与硕士生。他在非定常流动数值模拟，尤其是叶轮机械动静叶干扰方面的研究获得了国内外同行们的高度评价。三位作者密切合作，优势互补，共同编著了这部叙述清晰、论证细致、内容丰富、贴近前沿的基础性教材。毫无疑问，它的出版必将丰富与完善我国气体动力学教材的建设。

卞荫贵

2003 年 9 月于中国科学院



前　言

本书是遵照国防科工委“十五”重点教材建设编写大纲的要求，考虑到目前动力机械及工程热物理学科的学生已修过流体力学基础课程，在这个基础上为80学时气体动力学课程编著而成。本教材注重揭示气体流动的基本力学原理，注意阐明典型处理方法的基本思想，密切关注气体动力学学科的新进展，力求采用现代观点与现代数值计算技术去叙述那些经典性的基本内容，反映当代气体动力学数值计算的新趋势。全书共分10章，反映了气体动力学从低速到高速，从一维到三维流动，从亚声速、跨声速、超声速，一直到高超声速流动的基本内容，并对气动声学，尤其是计算气动声学基础作了简明扼要的阐述。显然，跨声速流动、高超声速流动以及气动声学基础这三章内容在现有的气体动力学教科书中是不多见的。在内容的讲解上，力求物理概念清晰，数学推导严谨，尽可能把严密的数学方法与工程实际相结合，数学的描述与力学原理相联系，密切关注以实际问题为背景的各种力学模型条件的分析，注意引导学生联系工程应用，用现代数值计算方法去求解气体动力学的基本问题。全书共列出近千篇参考文献，这对于学有余力的读者是一个很好的文献索引。在每章书后习题的编写中，除了其中一小部分是参考国内外教科书之外，其余相当多的题目是编著者自己根据所讲内容及从事科学研究的实践之中提炼、升华而编写的。毫无疑问，这些题目对加深理解所讲授的基本内容，密切与现代科研方向的联系，提高学生解决实际问题的能力是一个很好的基本训练与基本练习，它不仅使同学们完成了课后作业，更重要的是从解题之中获得了更多的新思想、新知识、新内容、新方法。

三位作者万分感谢中国科学院力学研究所卞荫贵教授对本书编写所给予的关心与支持。卞先生早在20世纪60年代就曾在中国科学技术大学主编并出版了《理想气体动力学》，并亲自为学生讲授这门课程；童秉纲院士等在1990年出版了《气体动力学》，陈懋章院士出版了《粘性流体动力学基础》，这三本书是我们在本书编著过程中最重要的参考书。这里我们衷心感谢三位前辈长期以来对我们工作的支持与厚爱。

本书可作为理工科院校工程热物理专业、力学专业、航空航天专业、燃气轮机



内燃机专业、热能与动力工程专业及理工科有关专业本科生的气体动力学课程教材，也可供有关教师、科技人员及研究生参考。目录中注以 * 号的章节，对本科生可不作要求，但可作为研究生课程的讲授内容。

由于作者的水平有限，本书难免存在缺点和不足之处，敬请广大读者及专家给予批评指教。E-mail：bguowang@bit.edu.cn；liushy@bit.edu.cn；huangwg@mail.etp.ac.cn。

编著者

2003 年 8 月

目　　录



第1章　可压缩流体的热力学、流体力学基础及有关数学工具

由于动力机械及工程热物理学科的学生是在修完流体力学基础、工程热力学以及高等数学与工科工程数学之后学习气体动力学这门课程的，因此本章针对气体动力学问题中将要涉及的一些流体力学、热力学的基础知识以及相关的高等数学方面的工具作一简明扼要的复习，个别地方略有提高。虽然本章主要是复习，但却是全书的基础。

§1.1　气体动力学发展概况及研究范畴

1.1.1　气体动力学研究的对象及特点

气体动力学（Gasdynamics）也叫可压缩流体力学，它是流体力学的一个分支，主要研究气体在其可压缩性呈显著作用时的流动规律以及气体与周围物体之间的相互作用（例如力和热的作用等）。经典气体动力学是流体力学和经典热力学相结合的一门科学，它主要研究气体的亚、跨、超声速流动问题；近代气体动力学除了研究亚、跨、超声速流动之外，还应该包括高超声速（Hypersonic，我国著名科学家钱学森先生认为[1]这时的马赫数 $Ma \geqslant 5$）的流动。当飞行器以高超声速再次进入大气层时，它与稠密大气层相互作用，在飞行器头部周围产生一个弓形的强激波。由于粘性耗散效应和激波强烈压缩，动能中的一部分转变为激波层内气体的内能，因此空气穿过头部激波时被加热、温度突然升高，典型的高超声速飞行器头部区域的气体温度高达 10 000 K 以上，这使空气分子产生离解和电离并发生化学反应，所以研究这类流动问题将涉及到流体力学、化学热力学、化学动力学、统计物理和量子物理等方面的知识，冯·卡门（Von Karman）还特意定义这类流动为“气动热化学”（Aerothermochemistry）问题[2]。

研究可压缩气体的流动是以流体动力学与热力学中的一些基本物理定律为基础，其控制方程组主要来自四个方面，即

① 运动学方面：质量守恒定律；

② 动力学方面：牛顿（Newton）第二定律（即动量定理）；

③ 热力学方面：能量守恒定律（即热力学第一定律）以及熵方程（即热力学第二定律）；

④ 气体的物理和化学属性方面：例如气体状态方程、气体组元间的化学反应速率方程、

气体的输运机理和对应的输运系数（如扩散系数、粘性系数以及热传导系数）等。

由上面四个方面组成的基本方程组再加上给定求解域边界上气体物理量应满足的初始与边界条件，便构成一个非线性（拟线性）偏微分（或积分）方程组[3~5]。显然，这个方程组在数学上的解析与数值求解都是十分困难的。因此，解决气体动力学问题便产生了三种方法：一是实验，二是理论分析，三是数值模拟计算。实验研究能提供许多感性知识，使人不断深入物理现象，能使研究者从大量定性和定量的资料中分析出流动的规律来，从而为理论研究与数值计算提供理论模型。理论研究则是运用基本概念、定律和数学工具，抓住问题的主要作用因素，选取某种抽象出来的模型，作定量的分析，从而获得规律和结果，给出所研究问题的解析解或简化方程。然而，由于数学分析发展水平的限制，理论分析研究方法往往只局限于比较简单的理论模型，不能满足实际流动问题的需要。20 世纪 60 年代以来，随着电子计算机和一系列有效近似计算方法[6]，如有限差分法、有限元法、有限体积法和谱方法等的发展，使数值方法在气体动力学研究方法中的作用和地位不断提高，并且已成为与实验研究、理论分析并列的研究方法[7]。数值方法能够解决理论分析研究无法解决的复杂流动问题，和实验相比，所需的费用和时间都比较少，有些流动，例如现代跨声速高压压气机转子叶片叶尖与机匣环壁间的复杂间隙流动[8]，在实验室里进行有困难，但采用数值计算方法便能很方便地对其进行研究，可以得到这种复杂流动的拓扑结构。当然数值方法也有其局限性，对于一个复杂的物理问题，要建立一个正确的数学方程（或模型），特别是对工程热物理学科中复杂的流动问题如燃烧、多相流、湍流等，还必须与实验研究以及理论分析方法相结合。更重要的是气体动力学中所求解的大都是非线性偏微分（积分）方程组，其数值方法的现有数学理论尚不够充分，严格的稳定性分析、误差估计和收敛性证明等理论工作的发展还跟不上数值模拟方法的进展。虽然关于广义解惟一存在性等问题的严格数学理论已取得了长足进展，但还不足以对一些复杂流动的求解问题给出明确的回答[9]。所以实验研究、理论分析和数值模拟方法是互相依赖、互相促进的，它们是研究气体动力学的三种基本方法。

1.1.2 气体动力学的发展概况

气体动力学的发展大体上可分成三个阶段：

第一阶段，19 世纪下半叶—20 世纪 30 年代，这是气体动力学的初期研究阶段。这一时期的工业背景是 19 世纪下半叶，蒸汽机、炮弹的爆炸技术的发展都涉及气体流动的可压缩性问题。1903 年莱特兄弟（W.Wright 和 O.Wright）设计制造了带动力的载人飞机并试飞成功，从此开创了飞机飞行的纪元。随着飞机飞行速度的不断提高，动力机械中绕过涡轮机叶栅蒸汽（或燃气）的压力、速度和温度不断提高，炸药爆炸产生的爆轰波强度不断增强，都有力地推动了气体动力学的迅速发展。在这个时期，创立了一系列经典理论，其中代表性的有：黎曼（Riemann，1860）发表了关于有限振幅波在空气中传播的重要论文，兰金



（Rankine，1870）和雨贡纽（Hugoniot，1887）提出了激波基本理论。同一时期，雷卡切夫（M.A. Рыкачев，1871）提出了测定旋转的螺旋桨升力的方法；马赫（E.Mach，1887）研究了抛射体以超声速运动时产生的波，得到了马赫角关系。其后阿克莱（J.Ackeret，1929）把流速与声速之比命名为马赫数；在此期间，儒可夫斯基（H.E.Жуковский）发表了一系列著作，其中包括“飞行原理”（1890）、“论鸟类的飞翔”（1892）、“航空理论基础”（1912）、“飞机空气动力学计算”（1917）、“飞机纵向稳定性的动力学研究方法”（1920）等。另外，瑞利（Rayleigh，1896）发表了“声学理论”；恰普雷金（C.A. Чаплыгин）发表了“论气体射流”（1902）、“论平面平行流作用在物体上的压力”（1910）、“翼栅理论”（1914）以及“单翼机机翼的一般理论”（1922）等；普朗特（Prandtl）和迈尔（Th. Meyer）1908 年提出了斜激波和膨胀波理论；库塔（W. M. Kutta，1902）和儒可夫斯基（1906）分别独立地提出了特殊的与一般的库塔–儒可夫斯基定理和假定；1910 年布拉修斯（H. Blasius）与恰普雷金分别独立地提出一般二维物体受力公式，从而建立了完整的二维升力理论；关于圆锥激波的求解问题，则先由布泽曼（Busemann，1928）提出图解法，后又由泰勒和马可尔（G.T. Taylor & Maccoll，1993）提出数值解。拉瓦尔（de Laval，1882）发明了收缩扩张形喷管，其后斯多道拉（Stodola，1903）以及普朗特和迈尔（1908）观测了这种喷管的流动特性；另外，小扰动线化方法、特征线方法和速度图方法也都在 20 世纪初相继问世。泰勒和马可尔在“可压缩流体力学”一文中总结了上述一系列奠基性成果并发表在杜朗（W.F. Durand，1935）主编的《空气动力学理论》丛书[10]第III卷中。这套丛书共六卷，是美国戈根海姆基金会资助的。著名力学家普朗特、泰勒及冯·卡门等均为该丛书撰写了重要章节。1932 年兰姆（Lamb.H）出版了《理论流体动力学》第六版[11]；1934 年普朗特和蒂金斯（Tietjens，O.G.）出版了《流体与空气动力学基础》[12]；四年后，戈尔茨坦（S. Goldstein，1938）主编了两卷本的《流体力学新发展》[13]；另外，考夫曼（W. Kaufmann）也分别在 1931 和 1934 年出版了《应用流体力学》并被选为德国高等学校教科书。在压气机和涡轮的气体动力学方面，凯勒和马克（C. Keller & L.S. Marks，1937）出版了《轴流风扇性能和理论分析》[14]；斯贝哈克（W. Spannhake，1934）出版了《离心泵、涡轮机械及喷气推进器》[15]等；最后，特别应指出的是，1935 年在罗马召开了第五次沃特学术会议（Volta Congress），讨论了航空中的高速流动问题，普朗特、冯·卡门、布泽曼、泰勒等先辈均出席了该会，使这次会议成为通向近代气体动力学的里程碑。

第二阶段，20 世纪 30 年代—20 世纪 60 年代，这是气体动力学的大发展时期。首先，普朗特（1904 年）提出了一个突破性的重大见解，他认为流场可划分为两个区域处理：远离物面的区域用无粘理论处理，贴近物面的一层流动区域作粘性计算，在两个区域的边界上物理参数相匹配，即著名的边界层理论[16]。它为第二阶段气体动力学中粘性理论的研究开辟了一条新的发展之路，从此才使气体动力学真正地服务于飞机和叶轮机械等领域的气动设计。从第一次世界大战到 20 世纪 30 年代末期第二次世界大战开始，这是亚声速飞机成熟的时期，也是低速空气动力学对航空事业做出重大贡献的时期。第二次世界大战期间及战后，

航空发动机功率不断提高，并且出现了涡轮喷气发动机；飞机的速度也不断提高并且逐渐接近声速。高速飞机在跨声速时要遇到“音障”。所谓“音障”即此时的空气动力学特性急剧变化，出现阻力大大增加，升力降低，飞行器操纵性和稳定性恶化。围绕克服“音障”问题人们花费了巨大的精力，最后才突破了声速，达到了超声速飞行。应该指出：1945 年前后，飞行器的最高速度只能达到 3～4 倍的声速，因此当时的人们对高超声速流动（指大于五倍声速的流动）并不太感兴趣。在这个时期，气体动力学得到了飞速发展，例如阿克莱（1925）提出了超声速翼型的线化理论，并由此开始了超声速机翼理论的研究。普朗特（1930）提出了以他名字命名的相似性准则，在亚声速范围内用它可以修正翼型升力的压缩性影响。1939 年与 1941 年钱学森[17]与冯·卡门分别独立地提出了一个更精确的准则（常被称作卡门–钱学森近似方法）并得到了著名的卡门–钱学森公式。这一公式是对小扰动条件下亚声速流动中相似法则的一种修正，而且还能用到高亚声速范围的翼型设计。在这一时期，一批优秀的著作与教材问世了，如：柯朗和弗里德里克斯（R. Courant & K.O. Friedrichs，1948）的《超声速流与激波》[18]；李普曼和鲍凯特（H.W. Liepmann & A.E. Puckett，1947）的《可压缩空气动力学引论》[19]；费里（A. Ferri，1949）的《超声速空气动力学》[20]；夏皮罗（A.H. Shapiro，1953）的《可压缩流的动力学与热力学》[21]；霍华斯（L.Howarth，1953）主编的《高速流体动力学的新发展》[22]；朗道和栗费席兹（Ландау，Лифшиц，1954）的《连续介质力学》[23]；洛强斯基（Л.Г.Лойцянский，1950）的《液体与气体力学》[24]；阿尔然尼可夫和马尼采夫（Аржаников，Мальцев，1952）的《空气动力学》[25]。与此同时，由于高推重比涡轮喷气发动机的推力不断增加，叶轮机械内气体的流场也逐渐地由亚声速增加到跨声速及超声速流动。这种工程背景促使内流气体动力学有了较大的发展。这一时期，在内流以及叶栅理论方面也出现了许多优秀著作与教科书，如：库赫曼和维贝尔（D. Kuhemann &J .Weber，1956）的《航空发动机空气动力学》[26]；杰依奇（M.E.Дейч，1953）的《工程气体动力学》[27]；柯青（H.E.Кочин，1949）的《叶栅的流体动力学理论》[28]；阿勃拉莫维奇（Г.Н.Абрамович）的《实用气体动力学》[29]；斯捷金（Б.С.Стечкин，1956）的《喷气发动机原理（叶片机）》[30]；普罗斯库拉（Г.ф.Проскура，1954）的《涡轮机流体动力学》[31]；鲍里先柯（А.И.Борисенко，1962）的《发动机气体动力学》[32]；哈洛克（J. H. Horlock，1958）的《轴流式压气机的流体力学与热力学》[33]；瓦夫拉（M.H. Vavra，1960）的《涡轮机械中的气动热力学和流动》[34]等。特别应指出的是，在这一时期吴仲华（Wu Chung-Hua）教授在叶轮机械气动设计方面为世界科技界作出的贡献。从 1949 年起，他连续发表了一系列论文，提出了径向平衡[35]、通流理论[36]等重要方法。1952 年他又发表了著名论文“轴流、径流和混流式亚声速与超声速叶轮机械中三元流动的普遍理论”[37]，创建了叶轮机械三元流动理论，并被国际学术及工程技术界公认为“吴氏通用理论”，其主要方程被称作“吴氏方程”。20 世纪 60 年代中期，他又提出了使用任意非正交曲线坐标与相应的非正交速度分量的叶轮机械三元流动基本方程组[38]。在此基础上，他领导发展了一整套亚、跨、超声速流场的计算



方法与计算机程序。正由于其在叶轮机械气动热力学方面的卓越成就，国际吸气式发动机大会在每两年一次的年会上设立了永久性的“吴仲华讲座”，以纪念他的贡献。另外，自从 1947 年世界上有了第一台电子计算机后，数值模拟方法便得到了迅速发展并成为继实验方法和理论分析方法之后第三种解决气体动力学问题的有效方法。就在这一年，科帕尔（Kopal，Z）用电子计算机求解了泰勒–马可尔方程，获得了超声速气流绕圆锥的数值解。此外，在 20 世纪 50 年代末还有几件特别值得回忆的事：查雷（J. Charyk）任主编，从 1947 年开始一直到 1964 年汇集了一百多位科学家集体编著的《高速空气动力学及喷气推进丛书》[39]共计 12 卷的问世，著名空气动力学专家钱学森、林家翘、郭永怀等都是丛书的作者；在英国以霍华斯任主编，汇集众多科学家总结 1949 年以前气体动力学在各方面的发展，出版的两卷本《流体动力学的新发展——高速流》[40]；德国著名气体动力学家奥斯瓦梯许（K.Oswatitsch，1956）出版了《气体动力学》专著[41]；意大利的费拉里和脱里柯米（C. Ferrari & F. G. Tricomi，1962）出版了《跨声速空气动力学》[42]专著。上述这两套丛书和两部专著的确很好地反映了第二阶段经典气体动力学发展的重要成果。

高超声速飞行是从 1949 年开始的。这年 2 月美国用 V–2 火箭加上 WAC 下士（Corporal）火箭组成了两级火箭进行了飞行试验，飞行高度 392.6 km，飞行速度达 8 286 km/h，这是世界上第一个以高超声速飞行的飞行器[43]。1957 年 10 月 4 日，前苏联发射了世界第一颗人造地球卫星；1961 年 4 月 12 日，前苏联航天员加加林（Ю.А.Гагарин）乘“东方一号”飞船以马赫数 *Ma*=25（即速度为 8.7 km/s），绕地球一圈仅用 108 min，实现了绕地球的轨道飞行；1961 年 2 月美国空军的试验飞机 X–15 首次试飞，飞行马赫数 *Ma* 超过 5.3；1969 年 7 月 20 日，美国发射了“阿波罗”（Appolo）登月飞行器，飞行马赫数 *Ma* 为 36（即速度为 12 km/s），并顺利地返回地球。为了解决火箭、载人飞船在高超声速飞行时尤其是弹头和飞船再入大气层时所遇到的复杂气动力和气动热问题，这个时期气体动力学在高超声流动方面发展得很快，到 20 世纪 50 年代末期已经基本上形成了高超声速气体动力学的理论体系，其中代表性的著作有：1959 年美国海斯和普洛斯坦（W.D. Hayes & R.F. Probstein）合著的《高超声速流理论》[44]；同年前苏联契尔内依（Г.Г.Черный）的《高超声速气体流动》[45]；1960 年帝维尼（F.M. Devienne）的《稀薄气体动力学》[46]；1962 年多兰斯（W.H.Dorrance）的《高超声速粘性流动》[47]；1952 年查普曼和考林（S. Chapman & T.G. Cowling）合著的《非均匀气体的数学理论》[48]以及 1966 年泽尔道维奇和莱依杰尔（Я.Б.Зельдович，Ю.П.Райзер）合著的《激波和高温流体动力学的物理现象》[49]，这几本书系统地总结了 20 世纪 60 年代气体动力学在高超声流动方面的重要研究成果。

第三阶段，20 世纪 60 年代至今，这是计算气体动力学与高超声速气体动力学大发展的时期。下面从航天技术及高超声速气体动力学的进展，亚声速、跨声速及超声速计算气体动力学的进展以及高性能动力装置，尤其是叶轮机械跨声速气动热力学的进展这三个大侧面作一简介。

航天技术及气体动力学在高超声速流动领域的进展。20 世纪 80 年代中期，高超声速气

体动力学的发展出现了一个新高潮。这个高潮是和天地往返运输系统的发展密切相关的。所谓天地往返运输系统就是在地面和空间站之间往返运送人员和货物的运输工具。为了进一步开发空间资源，出现了长期在地球低轨道上运行的空间站。前苏联在发射了7艘礼炮号空间站之后，于1968年2月发射了和平号空间站的核心舱；美国在发射了空天实验室之后于1984年7月决定建设自由号国际空间站，这个计划得到了西欧9国以及加拿大与日本的支持；1993年9月美俄两国决定联合建设国际空间站。早期的天地往返系统多采用一次性使用的飞船来达到将人送入空间的目的。在前苏联，已有“东方号”、“上升号”和“联盟号”三个系列的飞船，并且于1967年4月发射的第一艘联盟号飞船至今已为和平号空间站提供了20多年的服务；在美国，也有“水星号”、“双子星座号”和“阿波罗”三个系列的飞船。后来，天地往返系统开始发展重复使用的航天飞机。航天飞机装载量大，而且轨道器能够重复使用。不过，运输费用高、使用维护不方便和体积利用率低仍是航天飞机的不足之处。现在，世界各国正在研究和发展先进的天地往返运输系统，特别是发展空天飞机。1994 年 8 月美国总统签发了美国新的空间运输政策，决定让NASA负责研究重复使用的运载飞行器。目前NASA提出了三种重复使用的单级入轨火箭方案，其中 HL-20 升力体构形[50]是一种很有前途且较为实用的构形之一。就尺寸上讲，HL-20 只有美国目前航天飞机的 1/10，所使用的防热瓦（HRSI）的数目也很少，只要 1 000 片（而美国航天飞机要装 2 万 7 千片），并且它在上升段具有良好的应急救生能力[51]。发展先进的天地往返运输系统，特别是发展空天飞机，对气体动力学中高超声速流动提出了更高的要求。它要求在更宽的马赫数范围内对气动性能预测得更加精确；要求提供从低速到高超声速都具有良好的气动性能并考虑机体与发动机一体化的构形；要求研究更加复杂的现象，包括有化学反应的流动、湍流、转捩、激波、旋涡及这些现象的相互作用。为了满足这些要求，必须改建和新建地面模拟设备，发展高精度、高分辨率的流场观测方法和气体动力学的计算方法，发展必要的缩比验证飞行器。这样就把气体动力学中高超声速流动的研究推向了一个新高潮。应该指出：目前，世界各国还没有一个地面模拟设备能够模拟高超声速飞行器在 $Ma>8$ 以上飞行时的真实环境，因而计算气体动力学对高超声速飞行器的设计来讲就显得更加重要。

亚声速、跨声速及超声速计算气体动力学的进展。20 世纪 70 年代以来，从求解所使用的数学方程来讲经历了四个阶段，即：① 求解线性无粘流方程，如定常亚声速、超声速的小扰动速度势函数方程，它是典型的椭圆或双曲型方程；② 求解非线性无粘流方程，如定常跨声速小扰动速度势函数方程（它是混合型非线性方程）、定常无旋流方程（或全位势流方程）、定常流的 Euler 方程（$Ma>1$ 时为双曲型；$Ma<1$ 时为双曲椭圆型）与非定常流的 Euler 方程（对时间 t 而言为纯双曲型）；③ 求解雷诺平均 Navier-Stokes 方程，如抛物化的可压缩定常 N-S 方程（双曲抛物型方程组）、抛物化的可压缩非定常 N-S 方程（双曲抛物型方程组）、可压缩定常完全 N-S 方程（双曲椭圆型方程组）；④ 求解可压缩非定常完全 N-S 方程（对于时间 t 而言它是双曲抛物型方程组）。以上是从求解的数学方程来逐步逼近可压缩非定常完



全 Navier–Stokes 方程组的过程，它经历了一个从易到难的发展过程。从湍流模型的发展上讲大概经历了如下七个过程，即：① 零方程模型（在 20 世纪五六十年代用得最多），例如 Cebeci–Smith 平衡模型（1968 年），Baldwin–Lomax 模型（1978 年）等；② 一方程模型，例如 Bradshow（1967）的湍动能方程模型，Baldwin–Barth 的一方程模型（1991 年提出）和 Spalart–Allmaras 的一方程模型（1992 年提出）等；③ 两方程模式，例如 Jones–Launder（1972）的 $k-\varepsilon$ 模型，Saffman（1976）的 $k-\omega^2$ 模型以及 Ekaterinaris 和 Menter（1994）发展的 SST（Shear Stress Transport）$k-\omega$ 模型等；④ 非线性（即雷诺应力与平均流的应变率间为非线性的）模型，例 Launder（1996 年）的非线性模式和 Gatski & Speziale（1993 年）的非线性模型等；⑤ 雷诺应力模式（RSM）（包括代数应力模式（ASM）和微分应力模式（DSM）），例如 Launder（1996），Lumeley（1992）都对 DSM 做了研究；⑥ 大涡模拟（LES）；⑦ 直接数值模拟（DNS）。应该指出，在复杂流场的计算中，例如在飞机的翼身组合体计算以及叶轮机械中的三维流场计算时，目前较多使用前四种湍流模型。20 世纪 70 年代以来，从计算中使用的计算网格来讲经历了先由 20 世纪五六十年代的笛卡儿直角坐标或圆柱坐标网格发展到 20 世纪 70 年代的贴体曲线坐标系下任意曲线网格；然后由 20 世纪 80 年代的结构网格发展到今天的非结构网格；另外，从计算机的使用上，也从单纯依靠计算机单机性能的提高（例如发展向量化计算以提高单机的潜力）发展到今天的大规模并行计算，也就是说大型并行计算机的问世为该学科的发展提供了新的机遇。上面我们从几个大的方面回顾了 20 世纪 70 年代以来气体动力学在计算方法和计算技术方面的一些进展，下面举几个具有重大影响的具体实例：① 1968 年 Magnus、Gallaher 和 Yoshihara 用时间推进法求解了超临界有激波机翼绕流流场的 Euler 方程组[52]，他们首次用时间推进法得到了一个收敛的定常解；② 1970 年 Murmann 和 Cole[53]提出了混合差分格式，首次用松弛迭代法求解了定常跨声速小扰动速度势方程，他们的工作被公认为开辟了跨声速气体动力学新的领域。随后 Jameson 提出了旋转差分格式，进一步将混合格式推广到全位势方程；③ 1974 年 Ballhaus 和 Steger 提出了隐式近似因式分解法（AF 方法）[54]，其收敛速度大大超过了线松弛迭代法的收敛速度；他们并用此方法求解了非定常跨声速流动；④ 1975 年 Beam 和 Warming 提出了求解双曲守恒型 Euler 方程组的隐式近似因式分解法（AF 方法）[55]，随后又推广求解 N–S 方程；另外，MacCormack 也分别于 1969 年、1980 年与 1984 年提出了他自己的三种格式[56]，并求解了可压缩流 N–S 方程组；⑤ 1979 年 Steger 和 Warming 提出了矢通量分裂格式，1981 年 Jameson 和 Turkel 提出了隐式 LU 分解格式[57]，从而使该算法较 AF 方法大大减少了计算量；⑥ 1983 年 Harten 首次提出了高分辨率（High Resolution）和总变差不增（Total Variation Diminishing）的概念，构造了 TVD 格式[58]。在随后的数十年里 TVD 型的高分辨格式，例如基本无振荡格式（Essentially Non-Oscillatory Schemes）ENO、加权 ENO 格式（WENO）和 NND 格式等相继产生。这类格式的重要特点是：引入了节点模板（Stencil）和限制函数的概念，使捕捉的激波有较高的分辨率。这些格式可以模拟含激波和旋涡的复杂流场，并且可以抑制数值解的振荡。

在高性能动力装置，尤其叶轮机械跨声速气动热力学方面的主要进展。20 世纪 60 年代以来，围绕高性能动力装置的气动设计，叶轮机械的三元流场计算尤其是三维跨声速流场的计算一直是国际上学术界主攻的焦点。20 世纪 60 年代末期，吴仲华教授首先倡导使用非正交曲线坐标系并使用相应的非正交速度分量，在其基础上他给出了任意回转 S_1 流面与翘曲 S_2 流面上的流函数主方程。不久，他的助手们便首次使用这套方程得到了亚声速与高亚声速时 S_1 与 S_2 两类流面流场的数值解[59, 60]。之后吴仲华教授便向中国工程热物理界提出了主攻跨声速流函数方法的设想。在其指导下，他的学生们成功地求解了两类流面的跨声速流场[61, 66]，并使我国在 20 世纪 80 年代在两类流面的研究方面处于世界领先水平。与此同时，在 20 世纪八九十年代我国在直接求解叶轮机械三维流场方面也取得了很大的进展[67~69]。到了 20 世纪 90 年代中期，涡轮级（由静叶排与动叶片排组成）与压气机级（由动叶排与静叶片排组成）的三维跨声速粘性流场计算已能顺利完成[70~72]。20 世纪末，我国工程热物理界气动热力学的主攻方向已由单级流场计算转向多级动静叶级间相互干涉的三维非定常流场计算[73, 74]，其发展态势与国际同步。

§ 1.2* 场论基础与张量计算初步

在工程物理及流体力学、气体动力学中，经常要遇到各种不同的标量场、矢量场与张量场。温度场、压力场、密度场等都是标量场，速度场、力场、电磁场等都是矢量场，而应力场、粘性应力场、变形率场等都是张量场。场论是研究标量场及矢量场数学性质的一门数学分支，而张量分析则是将张量的共同特性抽象出来加以定义并对张量的性质加以数学上的探讨。因此场论和张量方面的知识对学习气体动力学是必不可少的工具。本节简明扼要地介绍流体力学与气体动力学中常用的场论与张量知识，供读者学习中使用。应该指出：本节是在任意曲线坐标系下讨论张量计算所需的最低基础知识，这些知识有些是大学本科工科学生必须具备的（即在大学工程数学及有关课程中已讲过），有些略超出一点范围，但它不会影响本节的使用，初学者可用笛卡儿坐标系作为特例去体验、校核与理解本节给出的一般表达式的通用性与正确性。之所以在任意曲线坐标系（不仅限于正交曲线坐标系）下讨论张量计算而不选用笛卡儿直角坐标系，其原因有三点：一是它较笛卡儿张量计算更具有普遍性；二是当今气体动力学数值计算广泛采用贴体曲线坐标系，它具有很强的实际应用背景，对它不可能回避；三是 10 余年讲授气体动力学实践表明，这种处理有益于本科生知识结构的培养。

1.2.1　基矢量与张量的并矢表示法

一、基矢量与度量张量

令 (y^1, y^2, y^3) 代表笛卡儿直角坐标系，$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ 为它的单位切矢量；令 (x^1, x^2, x^3) 代表任



意曲线坐标系，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 是该坐标系的基矢量，并用 $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ 代表单位基矢量；令 $\boldsymbol{R}$ 为矢径，于是

$$\boldsymbol{e}_\alpha=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^\alpha}=\boldsymbol{i}_\beta\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}=\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,\boldsymbol{u}_\alpha \qquad (\text{这里不对}\ \alpha\ \text{作和}) \tag{1-2-1}$$

这里采用了爱因斯坦（Einstein）求和规约。式中，$g_{\alpha\alpha}=\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\alpha$；令 ε_{ijk} 与 ε^{ijk} 为埃丁顿（Eddington）张量，并且令曲线坐标系 (x^1,x^2,x^3) 与曲线坐标系 (x_1,x_2,x_3) 互易，因此 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 与 $(\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^3)$ 构成对偶基矢量（又称倒易基矢量），则有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}^k,\quad \boldsymbol{e}^i\times\boldsymbol{e}^j=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1-2-2}$$

$$\boldsymbol{e}^\alpha=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_\alpha}=\boldsymbol{i}_\beta\frac{\partial y^\beta}{\partial x_\alpha}=\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\,\boldsymbol{u}^\alpha \qquad (\text{这里不对}\ \alpha\ \text{作和}) \tag{1-2-3}$$

$$g^{\alpha\alpha}=\boldsymbol{e}^\alpha\cdot\boldsymbol{e}^\alpha \tag{1-2-4}$$

式中，$\boldsymbol{u}^\alpha$ 为曲线坐标系 (x_1,x_2,x_3) 的单位基矢量。令 $g_{\alpha\beta}$ 与 $g^{\alpha\beta}$ 分别表示曲线坐标系 (x^1,x^2,x^3) 与 (x_1,x_2,x_3) 的度量张量，则有

$$g_{\alpha\beta}=\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\beta=\frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^k}{\partial x^\beta}=g_{\beta\alpha} \tag{1-2-5}$$

$$g^{\alpha\beta}=\boldsymbol{e}^\alpha\cdot\boldsymbol{e}^\beta=\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^k}=g^{\beta\alpha} \tag{1-2-6}$$

并且有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1}\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2}\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_1\\ \boldsymbol{i}_2\\ \boldsymbol{i}_3\end{bmatrix} \tag{1-2-7}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^1\\ \boldsymbol{e}^2\\ \boldsymbol{e}^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3}\\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3}\\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_1\\ \boldsymbol{i}_2\\ \boldsymbol{i}_3\end{bmatrix} \tag{1-2-8}$$

$$g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix},\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}=\begin{vmatrix}g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{vmatrix} \tag{1-2-9}$$

$$g^{ij}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=g^{ji} \tag{1-2-10}$$

$$\sqrt{g}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)=\frac{\partial(y^1,y^2,y^3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}\equiv J \tag{1-2-11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}=\boldsymbol{e}^i\cdot(\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k)=\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(y^1,y^2,y^3)}\equiv\frac{1}{J} \tag{1-2-12}$$

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j=g_i^j=\delta_i^j,\quad \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=g_j^i=\delta_j^i \tag{1-2-13}$$

式中，δ_i^j 与 δ_j^i 为克罗奈克（Kronecker）记号[75]。$\partial(y^1,y^2,y^3)/\partial(x^1,x^2,x^3)$ 为雅科比（Jacobian）函数行列式[76]。

二、张量的并矢表示法以及张量的并乘与点积

令 $\boldsymbol{G}$ 表示度量张量（又称单位张量），则在同一个坐标系中可有如下不同种类（协变或逆变）的分量表示

$$\boldsymbol{G}=g^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=g_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j=\delta_j^i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j=\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^j=\delta_i^j\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_j \tag{1-2-14}$$

令 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 为任意阶张量，（不妨以二阶张量为例，令 $\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，而 $\boldsymbol{S}=S_{km}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m$），则 $\boldsymbol{TS}$ 表示两个张量并乘，便有

$$\boldsymbol{TS}=T^{ij}S_{km}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m \tag{1-2-15}$$

而

$$\boldsymbol{ST}=S_{km}T^{ij}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-2-16}$$

这时 $\boldsymbol{TS}$ 与 $\boldsymbol{ST}$ 都是四阶张量。显然，张量并乘时顺序不能任意交换，即

$$\boldsymbol{TS}\neq\boldsymbol{ST} \tag{1-2-17}$$

另外，对于两个张量的双点积有两种定义，一种叫并联式，另一种叫串联式，其结果分别为

（并联式）

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}=(T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j):(S_{km}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m)=T^{ij}S_{km}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^m)=T^{ij}S_{ij} \tag{1-2-18}$$

（串联式）

$$\boldsymbol{T}\cdot\cdot\boldsymbol{S}=(T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)\cdot\cdot(S_{km}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m)=T^{ij}S_{km}(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^m)=T^{ij}S_{ji} \tag{1-2-19}$$

令 $\boldsymbol{V}$ 表示矢量，则 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 的点积便为

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}=(T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)\cdot(\upsilon_k\boldsymbol{e}^k)=T^{ij}\upsilon_j\boldsymbol{e}_i \tag{1-2-20}$$

而 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的点积应为

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{T}=(\upsilon_k\boldsymbol{e}^k)\cdot(T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)=\upsilon_iT^{ij}\boldsymbol{e}_j=T^{ji}\upsilon_j\boldsymbol{e}_i \tag{1-2-21}$$

这时 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{T}$ 都变为一阶张量即矢量。显然，当 $\boldsymbol{T}$ 不是对称张量时，则有 $(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V})\neq(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{T})$。



1.2.2　张量场的微分运算

一、基矢量的导数及 Christoffel 符号

在曲线坐标系中协变基矢量 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 及其互易基 $\{\boldsymbol{e}^i\}$（又称对偶基）都是曲线坐标 $\{x^i\}$ 的函数，因此 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}^i$ 的全微分分别是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \tag{1-2-22}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^i = \frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \tag{1-2-23}$$

令 Γ_{ij}^k 和 $\Gamma_{ij,k}$ 分别表示第二类与第一类 Christoffel 符号，则 $\partial \boldsymbol{e}_i / \partial x^j$ 与 $\partial \boldsymbol{e}^i / \partial x^j$ 可分别表为

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{e}_k = \Gamma_{ij,k}\boldsymbol{e}^k \tag{1-2-24}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \boldsymbol{e}^k \tag{1-2-25}$$

$$\Gamma_{ij}^k \equiv \boldsymbol{e}^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = -\boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}^k}{\partial x^j} = \boldsymbol{e}^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^i} = \Gamma_{ji}^k \tag{1-2-26}$$

$$\Gamma_{ij,k} \equiv \boldsymbol{e}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \boldsymbol{e}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^i} = \Gamma_{ji,k} \tag{1-2-27}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\beta}\left(\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\beta}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\beta}\right) = g^{k\beta}\Gamma_{ij,\beta} \tag{1-2-28}$$

特别是

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^j} \tag{1-2-29}$$

$$\Gamma_{ij,k} = g_{k\beta}\Gamma_{ij}^\beta \tag{1-2-30}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i} = \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} \tag{1-2-31}$$

注意，在笛卡儿直角坐标系下，Christoffel 符号恒为零。

二、张量分量对坐标的协变导数

1. 协变导数

在三维空间中，先讨论 n 阶张量场函数 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{R})$ 对矢径 $\boldsymbol{R}$ 的导数。根据张量分析中的商

规则[75, 76]，这个导数是$n+1$阶张量。张量微分与导数间满足

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}=(\mathrm{d}\boldsymbol{R})\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}\equiv(\mathrm{d}\boldsymbol{R})\cdot\left(\boldsymbol{e}^k\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x^k}\right)=\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \tag{1-2-32}$$

注意，$\partial\boldsymbol{T}/\partial x^k$的表达式中，不仅包含分量对坐标的偏导数，也包含并矢基张量对坐标的偏导数。今以$\boldsymbol{T}$为二阶张量为例说明如下：令$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$，则

$$\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\right)=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j+T_{ij}\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}\right)\boldsymbol{e}^j+T_{ij}\boldsymbol{e}^i\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}\right)=\left(\nabla_k T_{ij}\right)\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j \tag{1-2-33}$$

式中，$\nabla_k T_{ij}$为协变分量T_{ij}对坐标x^k的协变导数，显然$\nabla_k T_{ij}$为一个三阶张量的协变分量，其具体表达式为

$$\nabla_k T_{ij}=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma_{kj}^m T_{im}-\Gamma_{ki}^m T_{mj} \tag{1-2-34}$$

类似的有

$$\nabla_k T^{ij}=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}+\Gamma_{km}^j T^{im}+\Gamma_{km}^i T^{mj} \tag{1-2-35}$$

$$\nabla_k T_{\cdot j}^i=\frac{\partial T_{\cdot j}^i}{\partial x^k}+\Gamma_{km}^i T_{\cdot j}^m-\Gamma_{kj}^m T_{\cdot m}^i \tag{1-2-36}$$

令$\boldsymbol{V}$为一阶张量（即矢量），即$\boldsymbol{V}=v_i\boldsymbol{e}^i=v^i\boldsymbol{e}_i$，于是

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x^k}=(\nabla_k v_i)\boldsymbol{e}^i=(\nabla_k v^i)\boldsymbol{e}_i \tag{1-2-37}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla_k v_i&=\frac{\partial v_i}{\partial x^k}-\Gamma_{ki}^m v_m\\ \nabla_k v^i&=\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\Gamma_{km}^i v^m\end{aligned}\right\} \tag{1-2-38}$$

2. 度量张量与置换张量的协变导数

在任意曲线坐标系中，度量张量$\boldsymbol{G}$的任何分量（协变、逆变或者混合）的协变导数恒为零，即

$$\nabla_k g_{ij}=0,\qquad \nabla_k g^{ij}=0,\qquad \nabla_k g_j^i=0 \tag{1-2-39}$$

并且在任意曲线坐标中，Eddington 张量（又称置换张量）的分量其协变导数也恒为零，即

$$\nabla_m\varepsilon^{ijk}=0,\qquad \nabla_m\varepsilon_{ijk}=0 \tag{1-2-40}$$

因此，度量张量$\boldsymbol{G}$与置换张量$\boldsymbol{\varepsilon}$对矢径$\boldsymbol{R}$的导数分别是三阶零张量与四阶零张量，即



$$\mathrm{d}\boldsymbol{G}/\mathrm{d}\boldsymbol{R}=0 \quad \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}/\mathrm{d}\boldsymbol{R}=0 \tag{1-2-41}$$

下面给出关于度量张量$\boldsymbol{G}$的几个重要恒等式（这里$\boldsymbol{T}$为任意二阶张量，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为矢量，φ为任意标量）

$$\left.\begin{array}{l}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\\
\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\\
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{a}\\
\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\
\mathbf{G}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\\
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{T}\\
\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{G})=\nabla\varphi\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{a})=\nabla\times\boldsymbol{a}\\
\nabla\times(\varphi\boldsymbol{G})=(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{G}
\end{array}\right\} \tag{1-2-42}$$

式中，∇为哈密顿（Hamilton）算子[76, 77]。

三、微分算子及张量的梯度、散度和旋度等运算

1. 张量的梯度

引进哈密顿（Hamilton）算子，在任意曲线坐标系中，其定义为

$$\nabla\equiv\boldsymbol{e}^k\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1-2-43}$$

令张量$\boldsymbol{T}$为任意n阶张量，则$\boldsymbol{T}$的梯度便为$n+1$阶张量，其定义为（以$\boldsymbol{T}$为二阶张量为例，令$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$）

$$\nabla\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial(T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j)}{\partial x^k}=\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\nabla_k T_{ij} \tag{1-2-44}$$

式中，∇_k为张量分量对坐标x^k的协变导数，又称协变微分算子。

应当指出：张量梯度的定义有两种，一种是左梯度，一种是右梯度，显然本节采用了左梯度的概念。今对矢径$\boldsymbol{R}$求梯度，即

$$\nabla\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x^k}=\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_k=g_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j=g^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-2-45}$$

也就是说，矢径$\boldsymbol{R}$的梯度是度量张量$\boldsymbol{G}$；在三维空间中，$x^i=\mathrm{const}$曲面的单位法矢量为$\boldsymbol{u}^i$

$$\boldsymbol{u}^i=\frac{\nabla x^i}{\sqrt{g^{ii}}}=\frac{\boldsymbol{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}}\quad（这里不对 i 作和） \tag{1-2-46}$$

$$\boldsymbol{e}_i=g_{ij}\boldsymbol{e}^j,\qquad \boldsymbol{e}^i=g^{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{1-2-47}$$

$$\boldsymbol{e}_\beta=\boldsymbol{u}_\beta\sqrt{g_{\beta\beta}},\qquad \boldsymbol{e}^\beta=\boldsymbol{u}^\beta\sqrt{g^{\beta\beta}} \tag{1-2-48}$$

这里$\boldsymbol{u}^{\beta}$与$\boldsymbol{u}_{\beta}$都是单位矢量，但在一般曲线坐标系中$\boldsymbol{u}^{\beta}$通常并不与$\boldsymbol{u}_{\beta}$平行；只有在正交曲线坐标系中，这时$\boldsymbol{u}^{\beta}$与$\boldsymbol{u}_{\beta}$才平行并且相等，且有$\boldsymbol{e}_i // \boldsymbol{e}^i$（但两者的模通常并不相等）。令$h_i$为拉梅（Lame）系数即$h_i=\sqrt{g_{ii}}=1/\sqrt{g^{ii}}$，于是在正交曲线坐标系中便有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_i=\sqrt{g_{ii}}\boldsymbol{u}_i=h_i\boldsymbol{u}_i\ \text{(不对}i\text{作和)}\\&\boldsymbol{e}^i=\sqrt{g^{ii}}\boldsymbol{u}^i=\frac{\boldsymbol{u}_i}{h_i}\ \text{(不对}i\text{作和)}\\&\sqrt{g}=h_1h_2h_3\end{aligned}\right\}\tag{1-2-49}$$

作为正交曲线坐标系的特例，这里给出圆柱坐标系和球面坐标系中的一些重要关系。对于圆柱坐标系，令（r,θ,z）为圆柱坐标系，（y^1,y^2,y^3）为笛卡儿坐标系，则有

$$\begin{cases}y^1=r\cos\theta\\y^2=r\sin\theta\\y^3=z\end{cases}\tag{1-2-50}$$

其拉梅系数为

$$\begin{cases}h_r=h_1=1\\h_\theta=h_2=r\\h_z=h_3=1\end{cases}\tag{1-2-51}$$

令$\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_\theta,\boldsymbol{u}_z$为圆柱坐标系的单位切矢量，而$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z$为柱坐标系的基矢量，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial\theta}=\boldsymbol{u}_\theta\\\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{u}_r\end{cases}\quad\text{或者}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}=\dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\\\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}=-r\boldsymbol{e}_r\end{cases}\tag{1-2-52}$$

对于球面坐标系（r,θ,φ），它与（y^1,y^2,y^3）间有如下关系[76]

$$\begin{cases}y^1=r\sin\theta\cos\varphi\\y^2=r\sin\theta\sin\varphi\\y^3=r\cos\theta\end{cases}\tag{1-2-53}$$

此球面坐标系的拉梅系数为

$$\begin{cases}h_r=h_1=1\\h_\theta=h_2=r\\h_\varphi=h_3=r\sin\theta\end{cases}\tag{1-2-54}$$

令$\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_\theta,\boldsymbol{u}_\varphi$为球面坐标系的单位切矢量，则有



$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial \theta}=\boldsymbol{u}_\theta, & \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_\theta}{\partial \theta}=-\boldsymbol{u}_r \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial \varphi}=\boldsymbol{u}_\varphi \sin\theta & \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_\theta}{\partial \varphi}=\boldsymbol{u}_\varphi \cos\theta \qquad \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_\varphi}{\partial \varphi}=-(\boldsymbol{u}_r \sin\theta+\boldsymbol{u}_\theta \cos\theta)\end{cases} \tag{1-2-55}$$

2. 张量的散度与旋度

下面讨论张量的散度。以 $\boldsymbol{T}$ 为二阶张量为例，则 $\boldsymbol{T}$ 的散度将变为一阶张量（即矢量），其表达式为

$$\nabla\bullet\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial(T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j)}{\partial x^k}=\boldsymbol{e}^k\bullet\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\nabla_k T_{ij}=\boldsymbol{e}_j\nabla_i T^{ij} \tag{1-2-56}$$

一般来讲，n 阶张量的散度为 $n-1$ 阶张量。类似的，$\boldsymbol{T}$ 的旋度为（仍以二阶张量为例）

$$\nabla\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}^k\times\frac{\partial(T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j)}{\partial x^k}=\boldsymbol{e}^k\times\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\nabla_k T_{ij}=\varepsilon^{kim}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}^j\nabla_k T_{ij}=\boldsymbol{\varepsilon}:\nabla\boldsymbol{T} \tag{1-2-57}$$

这里 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为置换张量。一般来讲，n 阶张量的旋度仍为 n 阶张量。作为特例，讨论一阶张量的散度与旋度。令 $\boldsymbol{V}$ 为一阶张量，则 $\boldsymbol{V}$ 的散度为

$$\nabla\bullet\boldsymbol{V}=\nabla_i v^i=\nabla^i v_i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i} \tag{1-2-58}$$

式中，$\nabla^i v_i\equiv g^{ij}\nabla_j v_i$。

另外，$\boldsymbol{V}$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}^i\times\boldsymbol{e}^j\nabla_i v_j=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{e}_k\nabla_i v_j=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} \tag{1-2-59}$$

3. 二阶反对称张量及其反偶矢量

首先讨论任意一阶张量 $\boldsymbol{V}$ 的梯度，显然

$$\nabla\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\nabla_i v_j=\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j\nabla_i v^j=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\nabla^i v^j=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j\nabla^i v_j \tag{1-2-60}$$

这里 $\nabla\boldsymbol{V}$ 为二阶张量，不妨记作 $\boldsymbol{Q}$，$\nabla_i v_j$ 为二阶张量 $\boldsymbol{Q}$ 的协变分量，$\nabla^i v^j$ 为二阶张量 $\boldsymbol{Q}$ 的逆变分量，这里算子 $\nabla^i\equiv g^{ij}\nabla_j$，$\nabla_j$ 为对坐标 x^j 的协变导数。今将二阶张量 $\boldsymbol{Q}$ 的转置（又称共轭张量）记为 $(\nabla\boldsymbol{V})_c$，即

$$(\nabla\boldsymbol{V})_c\equiv\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^i\nabla_i v_j=\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\nabla_j v_i \tag{1-2-61}$$

于是 $(\nabla\boldsymbol{V})+(\nabla\boldsymbol{V})_c$ 变成一个对称张量（不妨将这个对称张量记为 $\boldsymbol{N}$），显然

$$\boldsymbol{N}\bullet\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{N} \tag{1-2-62}$$

式中，$\boldsymbol{a}$ 为任意矢量。

而 $(\nabla \boldsymbol{V})_c - \nabla \boldsymbol{V}$ 为一个反对称二阶张量记为 $\boldsymbol{\Omega}$，将其协变分量记为 Ω_{ij}，于是便恒有

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}\\&\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\Omega}\\&\boldsymbol{N}:\boldsymbol{\Omega} = 0\\&\boldsymbol{N}:\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}:\boldsymbol{N}\\&\boldsymbol{\Omega}:\boldsymbol{ab} = -\boldsymbol{ba}:\boldsymbol{\Omega}\end{aligned}\right\} \tag{1-2-63}$$

式中，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意矢量；$\boldsymbol{N}$ 为二阶对称张量，$\boldsymbol{\Omega}$ 为二阶反对称张量。

令 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为置换张量（它是个三阶张量。$\boldsymbol{\varepsilon} = \epsilon^{ijk}\, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k$），并且令二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的反偶矢量为 $\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{\Omega}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 间应该满足如下关系

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{c} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\Omega}\\&\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{c}\\&\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\end{aligned}\right\} \tag{1-2-64}$$

式中，$\boldsymbol{a}$ 为任意矢量。

容易证明：当 $\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \boldsymbol{V})_c - \nabla \boldsymbol{V}$ 时，$\boldsymbol{\Omega}$ 的反偶矢量 $\boldsymbol{c}$ 等于 $\nabla\times\boldsymbol{V}$，即

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\left[(\nabla \boldsymbol{V})_c - \nabla \boldsymbol{V}\right] = \nabla\times\boldsymbol{V} \tag{1-2-64 *}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为置换张量。

另外，也容易验证矢量 $\boldsymbol{V}$ 对矢径 $\boldsymbol{R}$ 的导数等于 $\boldsymbol{V}$ 的梯度的转置，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}} = (\nabla \boldsymbol{V})_c \tag{1-2-65}$$

对于矢径 $\boldsymbol{R}$，其梯度是度量张量，其旋度为零，其散度等于矢径所在空间的维数。

4. 张量的拉普拉斯（Laplace）算子

下面讨论拉普拉斯（Laplace）算子对张量的作用。令 $\boldsymbol{T}$ 为任意二阶张量，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m T_{km}$，于是拉氏算子作用 $\boldsymbol{T}$ 时便有

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{T} &= \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}^i\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\boldsymbol{e}^j\frac{\partial\left(\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m T_{km}\right)}{\partial x^j}\right]\\&= g^{ij}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m\nabla_i\nabla_j T_{km} = \boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\nabla^k\nabla_k T_{ij}\end{aligned} \tag{1-2-66}$$

式中，∇^k 为逆变导数，即 $\nabla^k = g^{\alpha k}\nabla_\alpha$；同样地，拉氏算子作用于任意矢量 $\boldsymbol{V}$ 与任意标量 φ 时有

$$\nabla^2\boldsymbol{V} = g^{ij}\boldsymbol{e}^k\nabla_i\nabla_j v_k = \boldsymbol{e}^i\nabla^j\nabla_j v_i \tag{1-2-67}$$



$$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)=g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi=\nabla^j\nabla_j\varphi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)\tag{1-2-68}$$

5. 张量的两次协变导数及曲率张量

张量的两次算子作用有多种情况，这里先给出一组在工程数学中常用的两次与一次微分算子的作用公式（这里令 φ,φ_1 与 φ_2 分别为任意标量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 分别为任意矢量；$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$）

$$\begin{cases}\nabla\times(\nabla\varphi)=0\\ \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0\\ \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}\\ \nabla^2(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1\nabla^2\varphi_2+2(\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_2)+\varphi_2\nabla^2\varphi_1\\ \nabla^2(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\nabla^2\boldsymbol{a}+2(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\nabla^2\varphi\\ \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})\\ \nabla(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}-(\nabla\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\\ \nabla(\varphi\boldsymbol{a})=(\nabla\varphi)\boldsymbol{a}+\varphi(\nabla\boldsymbol{a})\\ \nabla\times(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{a}\\ \nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\\ \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})\\ \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{a}\\ \nabla(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1(\nabla\varphi_2)+\varphi_2(\nabla\varphi_1)\end{cases}\tag{1-2-69}$$

令 $\boldsymbol{ab}$ 为并矢张量，$\boldsymbol{T}$ 为二阶张量，$\boldsymbol{R}$ 与 G 分别代表矢径与度量张量，则应用算子运算很容易得到下面几个重要关系式

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{T})=0\\ \nabla\times(\nabla\boldsymbol{a})=0\\ \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{T})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{T})-\nabla^2 T\\ \nabla\cdot(\boldsymbol{ab})=\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\\ \nabla\times(\boldsymbol{ab})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times(\nabla\boldsymbol{b})\\ \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{ab})=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{ab}+\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+\varphi\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\boldsymbol{b})\\ \nabla\cdot\left[\varphi\boldsymbol{a}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{b})\right]=\boldsymbol{R}\times\left[\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{ab})\right]+\varphi\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\ \nabla\cdot\left[\boldsymbol{ab}\times\boldsymbol{R}\right]=-\boldsymbol{R}\times\left[\nabla\cdot(\boldsymbol{ab})\right]\\ \nabla\cdot\left[(\nabla\boldsymbol{a})_c\right]=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\\ \nabla\cdot(\varphi G)=\nabla\varphi\end{cases}\tag{1-2-70}$$

式中，下标 c 表示张量的转置（又称张量的共轭），例如用 $\boldsymbol{T}$ 代表 $\boldsymbol{ab}$ 则 $\boldsymbol{T}_c=\boldsymbol{ba}$；显然，对于

任意矢量$\boldsymbol{V}$和任意张量$\boldsymbol{T}$恒有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{T}_c \tag{1-2-71}$$

另外，对于任意的二阶张量，它还可以用一个矩阵来表达，例如对于二阶张量$\nabla\boldsymbol{V}$来讲，当它的并矢表达式为$\nabla\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\nabla_i v_j$时，它也可以像目前许多教科书中所采用的那样省略并矢标架$\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$采用矩阵表示，这时$\nabla\boldsymbol{V}$可表示为

$$\begin{bmatrix}\nabla_1 v_1 & \nabla_1 v_2 & \nabla_1 v_3\\ \nabla_2 v_1 & \nabla_2 v_2 & \nabla_2 v_3\\ \nabla_3 v_1 & \nabla_3 v_2 & \nabla_3 v_3\end{bmatrix} \tag{1-2-72}$$

同样，如果将$\nabla\boldsymbol{V}$表示为$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\nabla^i v^j$，则$\nabla\boldsymbol{V}$省略并矢标架$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$后用矩阵表示便为

$$\begin{bmatrix}\nabla^1 v^1 & \nabla^1 v^2 & \nabla^1 v^3\\ \nabla^2 v^1 & \nabla^2 v^2 & \nabla^2 v^3\\ \nabla^3 v^1 & \nabla^3 v^2 & \nabla^3 v^3\end{bmatrix} \tag{1-2-73}$$

式中，$\nabla^i=g^{\alpha i}\nabla_\alpha$，显然在用上边两个矩阵表达$\nabla\boldsymbol{V}$时所省略的并矢标架并不相同，应格外注意。

下面简单讨论张量二阶协变导数的次序可否交换的问题。首先计算$\nabla_k(\nabla_j a_i)-\nabla_j(\nabla_k a_i)$的值

$$\nabla_k(\nabla_j a_i)-\nabla_j(\nabla_k a_i)=a_\beta\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ki}^\beta-\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{ji}^\beta+\Gamma_{ki}^\alpha\Gamma_{j\alpha}^\beta-\Gamma_{ji}^\alpha\Gamma_{k\alpha}^\beta\right]=a_\beta R_{ijk}^\beta \tag{1-2-74}$$

式中，R_{ijk}^β是四阶混合张量，它完全由度量张量的一阶与二阶偏导数构成，显然在 Euclidean 空间中由于$\Gamma_{mn}^\alpha=0$，因此R_{ijk}^β也恒为零，表明这时张量二阶协变导数的次序可交换。例如平面或任意二维可展曲面（柱面、锥面等）都是二维欧氏空间；而球面是二维 Riemann 空间，这时R_{ijk}^β不恒为零，因此R_{ijk}^β定义为曲率张量（又称 Riemann–Christoffel 张量）。在黎曼空间中，张量二阶协变导数的次序不可交换。

1.2.3 几个重要的积分关系式

一、梯度、旋度、散度定义的统一形式及广义奥–高公式

令τ为闭曲面σ所包围的体积，$\boldsymbol{n}$为曲面σ的单位外法矢量，φ与$\boldsymbol{a}$为定义在σ内的任意一个标量与任意一个矢量，于是便有一组关于矢量与标量的广义奥一高（Остроградский-Green）公式[76]



$$\begin{cases}\iiint\limits_{\tau}(\nabla\varphi)\mathrm{d}\tau=\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\varphi\mathrm{d}\sigma\\ \iiint\limits_{\tau}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\mathrm{d}\tau=\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}\sigma\\ \iiint\limits_{\tau}(\nabla\times\boldsymbol{a})\mathrm{d}\tau=\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}\mathrm{d}\sigma\end{cases}\tag{1-2-75}$$

因此，又可得到梯度、散度和旋度定义的统一形式

$$\begin{cases}\nabla\varphi=\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{1}{\tau}\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\varphi\mathrm{d}\sigma\\ \nabla\cdot\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{1}{\tau}\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}\sigma\\ \nabla\times\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{1}{\tau}\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}\mathrm{d}\sigma\end{cases}\tag{1-2-76}$$

下面给出张量的散度、梯度和旋度的定义（这里仍以任意二阶张量 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_jT^{ij}=\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^jT_{ij}$ 为例）

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{1}{\tau}\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}\sigma\\ \nabla\boldsymbol{T}=\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{1}{\tau}\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\boldsymbol{T}\mathrm{d}\sigma\\ \nabla\times\boldsymbol{T}=\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{1}{\tau}\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}\mathrm{d}\sigma\end{cases}\tag{1-2-77}$$

相应地，便有关于张量的广义奥–高公式

$$\begin{cases}\iiint\limits_{\tau}\nabla\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}\tau=\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}\sigma\\ \iiint\limits_{\tau}\nabla\boldsymbol{T}\mathrm{d}\tau=\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\boldsymbol{T}\mathrm{d}\sigma\\ \iiint\limits_{\tau}\nabla\times\boldsymbol{T}\mathrm{d}\tau=\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}\mathrm{d}\sigma\end{cases}\tag{1-2-78}$$

特别是当 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{ab}$ 时，则有

$$\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_{\tau}[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})]\mathrm{d}\tau=\iiint\limits_{\tau}\nabla\cdot(\boldsymbol{ab})\mathrm{d}\tau=\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{ab})\mathrm{d}\sigma\tag{1-2-79}$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial n}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla\tag{1-2-80}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 为单位矢量，又可得到格林第一、第二等有关公式

$$
\begin{cases}
\oiint_\sigma \varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \oiint_\sigma \boldsymbol{n} \cdot (\varphi \nabla \psi) \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau \left[\varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi) \right] \mathrm{d}\tau \\
\oiint_\sigma \left(\varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \psi \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} \right) \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) \mathrm{d}\tau \\
\oiint_\sigma \boldsymbol{n} \cdot \left[\boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) \right] \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau \left[(\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{b})) \right] \mathrm{d}\tau \\
\oiint_\sigma \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} (\nabla \cdot \boldsymbol{b}) \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau \left[(\nabla \cdot \boldsymbol{a})(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} \cdot (\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{b})) \right] \mathrm{d}\tau \\
\oiint_\sigma \boldsymbol{n} \cdot \varphi (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}\tau
\end{cases}
\tag{1-2-81}
$$

式中，φ 与 ψ 为任意标量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为任意矢量。

对于任意张量 $\boldsymbol{T}$，则上面的有关公式又可被推广为

$$
\begin{cases}
\oiint_\sigma \boldsymbol{n} \cdot \left[\boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{T}) \right] \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau \left[(\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{T}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{T})) \right] \mathrm{d}\tau \\
\oiint_\sigma (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{T} \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau \left[\boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{T} + (\nabla \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{T} \right] \mathrm{d}\tau \\
\oiint_\sigma \boldsymbol{n} \cdot \varphi (\nabla \times \boldsymbol{T}) \mathrm{d}\sigma = \iiint_\tau (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{T}) \mathrm{d}\tau
\end{cases}
\tag{1-2-82}
$$

二、线积分与面积分间的相互关系以及广义 Stokes 公式

令曲面 σ（非封闭面）以曲线 L 为边界，$\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 为沿环路方向的线积分元；$\boldsymbol{n}$ 为 σ 的单位法矢量，并且 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 构成右手螺旋关系。因此一组广义 Stokes 公式为

$$
\begin{cases}
\oint_L \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \iint_\sigma (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma \\
\oint_L \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \iint_\sigma (\boldsymbol{n} \times \nabla \varphi) \mathrm{d}\sigma \\
\oint_L \boldsymbol{a} \times \mathrm{d}\boldsymbol{R} = -\iint_\sigma (\boldsymbol{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{a} \mathrm{d}\sigma \\
\oint_L (\boldsymbol{a} \mathrm{d}\boldsymbol{R})_c = \iint_\sigma \boldsymbol{n} \times (\nabla \boldsymbol{a}) \mathrm{d}\sigma \\
\oint_L \varphi \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \iint_\sigma [\varphi (\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\nabla \varphi) \times \boldsymbol{a}] \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma \\
\oint_L (\varphi \nabla \psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \iint_\sigma (\nabla \varphi) \times (\nabla \psi) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = -\oint_L (\psi \nabla \varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R}
\end{cases}
\tag{1-2-83}
$$

式中，φ 与 ψ 为任意标量，$\boldsymbol{a}$ 为任意矢量。

对于任意二阶张量 $\boldsymbol{T}$，则上述部分公式又可被推广为



$$\oint_L \boldsymbol{T}_c \cdot d\boldsymbol{R} = \iint_\sigma \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{T}) d\sigma \tag{1-2-84}$$

式中，$\boldsymbol{T}_c$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的转置张量。

§1.3　物理场在绝对与非惯性相对坐标系中的转换关系

1.3.1　一般非惯性相对坐标系

本节讨论两类坐标系：一类是和地面固连在一起的绝对坐标系 (x^1, x^2, x^3)，另一类是动坐标系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3)，它相对于绝对坐标系既有平动又有旋转，因此这是一个非惯性相对坐标系，简称相对坐标系。在绝对坐标系中任一质点的位置（矢径）、速度和加速度分别称为绝对矢径、绝对速度和绝对加速度，并分别用 $\boldsymbol{r}_a$、$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 表示，时间用 t 表示。随体导数（又称质点导数、全导数或物质导数）用 d/dt 表示。考虑到在讨论两类坐标系下参数转换时观察者所处位置的重要性，本节特用 d_a/dt 表示对绝对观察者而言所观察到的全导数（或随体导数），用 d_R/dt 表示对相对观察者而言所观察到的全导数（或随体导数）。另外，还令绝对与相对坐标系的原点分别为 O 与 O_R，令相对坐标系原点的矢径为 $\boldsymbol{r}_0$，并令质点的相对矢径与相对速度分别为 $\boldsymbol{r}_R$ 与 $\boldsymbol{W}$，因此便有如下关系

$$\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_R \tag{1-3-1}$$

注意到

$$d_a q/dt = d_R q/dt \tag{1-3-2}$$

$$\frac{d_a \boldsymbol{B}}{dt} = \frac{d_R \boldsymbol{B}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B} \tag{1-3-3}$$

式中，q 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为任意标量与任意矢量。

于是绝对速度、绝对加速度与相对速度、相对加速度间的关系便可非常方便地获得，其表达式分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \frac{d_a \boldsymbol{r}_a}{dt} = \frac{d_a \boldsymbol{r}_0}{dt} + \frac{d_a \boldsymbol{r}_R}{dt} = \frac{d_a \boldsymbol{r}_0}{dt} + \frac{d_R \boldsymbol{r}_R}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_R \\ &= \boldsymbol{W} + \left(\frac{d_a \boldsymbol{r}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_R \right) = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}_e \end{aligned} \tag{1-3-4}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{d_a \boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d_a \boldsymbol{W}}{dt} + \frac{d_a \boldsymbol{V}_e}{dt} \\ &= \frac{d_R \boldsymbol{W}}{dt} + \frac{d_a \boldsymbol{V}_0}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times W + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_R) + \left(\frac{d_a \boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \times \boldsymbol{r}_R \\ &= \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c \end{aligned} \tag{1-3-5}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_r = \dfrac{\mathrm{d}_R \boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial_R \boldsymbol{W}}{\partial t} + \boldsymbol{W} \cdot \nabla_R \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}_a \boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial_a \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla_a \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{a}_e = \dfrac{\mathrm{d}_a \boldsymbol{V}_0}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{\mathrm{d}_a \boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right) \times \boldsymbol{r}_R + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_R) \\ \boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{V}_0 = \dfrac{\mathrm{d}_a \boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t} \\ \boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_R \\ \boldsymbol{W} = \dfrac{\mathrm{d}_R \boldsymbol{r}_R}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1-3-6}$$

式中，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_e$ 与 $\boldsymbol{a}_c$ 分别称为绝对加速度、相对加速度、牵连加速度与哥里奥利（Coriolis）加速度；$\boldsymbol{V}_0$ 与 $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R)$ 分别为相对坐标系平移牵连速度与旋转牵连速度；而 $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R)$ 为向心加速度，$\boldsymbol{W}$ 为流体质点的相对速度。另外，$\partial_a/\partial t$ 表示对绝对观察者而言所观察到的关于时间的偏导数；$\partial_R/\partial t$ 表示对相对观察者而言所观察到的关于时间的偏导数；算子 ∇_R 与 ∇_a 分别表示在相对坐标系中 (ξ^1,ξ^2,ξ^3) 中与在绝对坐标系 (x^1,x^2,x^3) 中完成哈密顿算子的作用。

在两类坐标系的相互转换中，下面两个关系式也非常有用，它们是

$$\frac{\partial_a q}{\partial t} = \frac{\partial_R q}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R)\cdot\nabla_R q \tag{1-3-7}$$

$$\frac{\partial_a \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial_R \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R)\cdot\nabla_R \boldsymbol{B} \tag{1-3-8}$$

这里 q 与 $\boldsymbol{B}$ 分别代表任意标量与任意矢量。

值得注意的是，如果相对坐标系选作柱坐标系 (r,φ,z) 时，则容易证明下面两式成立，即

$$\omega\frac{\partial_R q}{\partial \varphi} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R)\cdot\nabla_R q \tag{1-3-9}$$

$$\omega\frac{\partial_R \boldsymbol{B}}{\partial \varphi} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R)\cdot\nabla_R \boldsymbol{B} \tag{1-3-10}$$

1.3.2 特殊的相对坐标系以及物理场在两类坐标系间的转换关系

在叶轮机械气动热力学中常采用这种特殊的相对坐标系 $\boldsymbol{r}_0 \equiv 0$，即相对坐标系固连于动叶轮上并以角速度 ω 绕叶轮机械的转动轴旋转。这里仍约定任意曲线坐标系 (x^1,x^2,x^3) 为绝



对坐标系，任意曲线坐标系 (ξ^1,ξ^2,ξ^3) 为相对坐标系，并且约定柱坐标系 (r,θ,z) 与柱坐标系 (r,φ,z) 分别为绝对坐标系与相对坐标系，而且还约定这时叶轮旋转方向与 z 轴正方向构成右手螺旋系。在上述约定下，式（1－3－4）与式（1－3－5）简化为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{\mathrm{R}} \tag{1-3-11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R)+\left(\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)\times\boldsymbol{r}_R\\&=\frac{\partial_{\mathrm{a}}\boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla_{\mathrm{a}}\boldsymbol{V}=\frac{\partial_{\mathrm{a}}\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla_{\mathrm{a}}\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla_{\mathrm{a}}\times\boldsymbol{V})\end{aligned} \tag{1-3-12}$$

注意到

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{\mathrm{R}})=-\omega^2\nabla_{\mathrm{R}}\left(\frac{r^2}{2}\right) \tag{1-3-13}$$

这里 r 为流体质点离旋转轴的距离即柱坐标系中的坐标 r；当 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{const}$ 时，则式（1－3－12）被简化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}-\nabla_{\mathrm{R}}\left(\frac{\omega^2r^2}{2}\right)\\&=\frac{\partial_{\mathrm{R}}\boldsymbol{W}}{\partial t}+\nabla_{\mathrm{R}}\left(\frac{W^2}{2}\right)-\boldsymbol{W}\times(\nabla_{\mathrm{a}}\times\boldsymbol{V})-\nabla_{\mathrm{R}}\left(\frac{\omega^2r^2}{2}\right)\end{aligned} \tag{1-3-14}$$

另外还有如下关系式成立

$$\begin{cases}\nabla_{\mathrm{a}}q=\nabla_{\mathrm{R}}q\\\nabla_{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{B}=\nabla_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{B}\\\nabla_{\mathrm{a}}\boldsymbol{B}=\nabla_{\mathrm{R}}\boldsymbol{B}\\\nabla_{\mathrm{a}}\times\boldsymbol{B}=\nabla_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{B}\\\nabla_{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{V}=\nabla_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{W}\\\nabla_{\mathrm{a}}\times\boldsymbol{V}=\nabla_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{W}+2\boldsymbol{\omega}\end{cases} \tag{1-3-15}$$

式中，q 为任意标量，$\boldsymbol{B}$ 为任意矢量。

考虑到式（1－3－15）、（1－3－2）与式（1－3－3）的关系，并且为了方便下文的书写因此对于空间哈密顿算子 ∇_{a} 与 ∇_{R} 中的脚注 a 与 R 可以省略；标量随体导数的脚注 a 与 R 也可省略，但矢量随体导数的脚注 a 与 R 不可省略；另外，由式（1－3－7）与式（1－3－8）可知：对时间的偏导数，如果省略下脚注 a 或者 R 将导致计算与概念上的错误。

在叶轮机械气体动力学中，滞止转子焓（total rothalpy 或者 stagnation rothalpy）I 的概念十分重要，它被吴仲华教授首次提出并定义为[37]：

$$I=h+\frac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}}{2}-\frac{(\omega r)^2}{2} \tag{1-3-16}$$

这里h为静焓，r为柱坐标系下的r值。于是相对坐标系下叶轮机械三维流动基本方程组（当$\boldsymbol{\omega}=\text{const}$时）为

$$\frac{\partial_R\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{W})=0 \tag{1-3-17}$$

$$\frac{\mathrm{d}_R\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi} \tag{1-3-18}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial_R P}{\partial t}+\dot{q}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{W}) \tag{1-3-19}$$

式中，$\boldsymbol{\Pi},P$与ρ分别为粘性应力张量、压强与密度；$\dot{q}$为外界对每单位质量气体的传热率，它与熵S、温度T、耗散函数ϕ间有下列关系

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\dot{q}+\frac{\phi}{\rho} \tag{1-3-20}$$

相对运动方程的另一种形式（即克罗柯(Crocco)动力学方程）为

$$\frac{\partial_R\boldsymbol{W}}{\partial t}+(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{W}=T\nabla S-\nabla I+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi} \tag{1-3-21}$$

相应地，绝对运动方程为

$$\frac{\partial_a\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}=T\nabla S-\nabla H+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi} \tag{1-3-22}$$

式中，H为总焓即$H=h+\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})$，相应地能量方程为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial_a P}{\partial t}+\dot{q}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1-3-23}$$

§ 1.4 流体力学基本方程组的积分与微分形式

1.4.1 一般控制体及雷诺（Reynolds）定理

热力学系统，简称系统，被定义为确定的物质的任意集合。系统以外的一切都称为环境。系统与环境之间一般存在着相互作用，例如传热、传质或做功。控制体定义为流体流过的、相对于某坐标系所取的任一个确定的空间体积。占据控制体的流体本身是随着时间而改变的。控制体的边界面称为控制面，它总是封闭表面，但可以是单连通的，也可以是



多连通的。凡与环境之间无质量交换的系统称为封闭系统（又称封闭体系），它的基本特点是：

① 系统的边界随着流体一起运动。系统的体积、边界的形状可随时间变化；

② 系统的边界与外界没有质量交换；

③ 在系统的边界上受到外部（即环境）作用在系统上的表面力；

④ 在系统的边界上，系统与外界可以有功和热的交换。

凡与环境之间有质量交换的系统，称为开口系统。因此该系统的边界就是上面所定义的控制面，控制面内的容积就是上面所定义的控制体。显然，开口系统对应于当地观点（即欧拉表示法）。而封闭系统在气体动力学中对应于随体观点（即拉格朗日表示法）。开口系统基本特点是[78]：

① 控制体和控制面相对于某坐标系可以是固定不动的，也可以随时间按一定规律改变其位置与形状；

② 在控制面上可以有质量交换，即流体通过控制面流进流出；

③ 在控制面上受到控制体以外物体施加在控制体之内流体上的力；

④ 在控制面上有功、热和能量的交换。

令 $\tau^*(t)$ 是某个移动着的体积（即控制体），它有边界面（即控制面）$\sigma^*(t)$ 和单位外法线矢量 $\boldsymbol{n}$；令控制面局部边界速度为 $\boldsymbol{b}$ 并且可在整个表面 $\sigma^*(t)$ 上变化，因此这样一个任意移动着的体积就是通常定义的一般控制体。对于一般控制体，雷诺定理可给出如下表达式[79]：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\tau^*(t)}\varphi\mathrm{d}\tau=\iiint_{\tau^*(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma^*(t)}\varphi(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\tau^*(t)}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\tau=\iiint_{\tau^*(t)}\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma^*(t)}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-1b}$$

式中，φ 与 $\boldsymbol{a}$ 分别代表任意标量与任意矢量。另外对于 $\boldsymbol{b}$ 值可由多种选取方式，可以定义多种形式的控制面，例如若 $\boldsymbol{b}=0$ 时，该控制面可定义为第一类控制面，此时控制面没有运动，即该面固定在空间中；若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{V}$（这里 $\boldsymbol{V}$ 为流体速度）时，即控制面跟随所研究的流体微团一起运动，该面可定义为第二类控制面，这时它所包围的体积被称为物质体积；若选取 $\boldsymbol{b}\neq0$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{V}$ 时，这类控制面可定义为第三类控制面。显然，将雷诺定理应用到物质体积上[80~83]，则上面两式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\tau(t)}\varphi\mathrm{d}\tau=\iiint_{\tau(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma(t)}\varphi(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau(t)} a\mathrm{d}\tau = \iiint\limits_{\tau(t)} \frac{\partial a}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_{\sigma(t)} a(V\cdot n)\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-2b}$$

1.4.2 一般控制体下流体运动的基本方程

一、流体力学基本方程组的积分与微分形式

在一般控制体下，流体力学基本方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau^*(t)} \rho\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_{\sigma^*(t)} \rho(V-b)\cdot n\mathrm{d}\sigma = 0 \tag{1-4-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau^*(t)} \rho V\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_{\sigma^*(t)} \rho V(V-b)\cdot n\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\tau^*(t)} \rho f\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_{\sigma^*(t)} n\cdot\pi\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau^*(t)} \rho e_t\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_{\sigma^*(t)} \rho e_t(V-b)\cdot n\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\tau^*(t)} \rho f\cdot V\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_{\sigma^*(t)} (n\cdot\pi)\cdot V\mathrm{d}\sigma - \oiint\limits_{\sigma^*(t)} q\cdot n\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\tau^*(t)} \rho S\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_{\sigma^*(t)} \rho S(V-b)\cdot n\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\tau^*(t)} \frac{\phi}{T}\mathrm{d}\tau + \iiint\limits_{\tau^*(t)} \frac{\nabla\cdot(-q)}{T}\mathrm{d}\tau \tag{1-4-6}$$

式中，π 为应力张量；e_t 为单位质量气体所具有的广义内能；f 为作用在单位质量流体上的体积力；q 为热流矢量；ϕ 为耗散函数；ρ, V, T 与 S 分别为密度、速度、温度与熵。

值得注意的是：式（1-4-6）右边的第二项是由导热引起的熵的增长率，右边第一项则是由内摩擦引起熵的增长率。另外，由流体力学[84, 85]可知，牛顿（Newton）流体的本构方程为

$$\pi = \pi_{ij}e^i e^j = \pi^{ij}e_i e_j = 2\mu D + (-P + \lambda\nabla\cdot V)I \tag{1-4-7}$$

这里 D 为应变速率张量或变形速率张量，λ 和 μ 分别为第二粘性系数和动力粘性系数，I 为度量张量（有时又称单位张量）。引进膨胀粘性系数（又称容积粘性系数）$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ 的 Stokes 假定，并注意到

$$D = [\nabla V + (\nabla V)_c]/2 \tag{1-4-8}$$

$$I = g^{ij}e_i e_j = g_{ij}e^i e^j \tag{1-4-9}$$

因此式（1-4-7）被简化为

$$\pi = \Pi - PI = 2\mu D - (P + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot V)I \tag{1-4-10}$$

这里 Π 为粘性应力张量；显然应力张量 π 与粘性应力张量 Π 的协变分量分别为



$$\pi_{ij}=\Pi_{ij}-Pg_{ij} \tag{1-4-11}$$

$$\Pi_{ij}=\mu\left(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i-\frac{2}{3}g_{ij}\nabla_k v^k\right) \tag{1-4-12}$$

另外，式（1－4－5）中单位质量流体的广义内能 e_t 与热力学狭义内能 e 间的关系为

$$e_t=e+\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1-4-13}$$

在式（1－4－6）中，单位体积流体所具有的耗散函数 ϕ 与热流矢量 $\boldsymbol{q}$ 分别定义为

$$\phi=\left[\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{D}\right]:\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\Pi}:\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\Pi}^{ij}\nabla_i v_j=\boldsymbol{\Pi}:\nabla\boldsymbol{V} \tag{1-4-14}$$

$$\boldsymbol{q}=-k\nabla T \tag{1-4-15}$$

这里 k 为导热系数，而 $\boldsymbol{\Pi}^{ij}$ 为粘性应力张量的逆变分量，v_j 为 $\boldsymbol{V}$ 的协变分量，∇_i 为协变导数。注意到 $\boldsymbol{I}:\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 及引进 Stokes 假定，于是（1－4－14）式简化为：

$$\phi=2\mu\left[\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D}-\frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2\right] \tag{1-4-16}$$

应特别指出的是，将雷诺定理式（1－4－1a）、式（1－4－1b）与广义奥-高公式（1－2－78）式分别用于式（1－4－3）、式（1－4－4）、式（1－4－5）和式（1－4－6）的左边并注意使用 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0$ 这一条件，则左边变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\tau^*(t)}\rho\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma^*(t)}\rho(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\tau^*(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})\right]\mathrm{d}\tau \tag{1-4-17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\tau^*(t)}\rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma^*(t)}\rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\tau^*(t)}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1-4-18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\tau^*(t)}\rho e_t\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma^*(t)}\rho e_t(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\tau^*(t)}\left(\rho\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1-4-19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\tau^*(t)}\rho S\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma^*(t)}\rho S(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\tau^*(t)}\left(\rho\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1-4-20}$$

借助于上边四式，则式（1－4－3）～式（1－4－6）变为

$$\iiint_{\tau^*(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})\right]\mathrm{d}\tau=0 \tag{1-4-21}$$

$$\iiint_{\tau^*(t)}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau=\iiint_{\tau^*(t)}(\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})\mathrm{d}\tau \tag{1-4-22}$$

$$\iiint_{\tau^*(t)}\left(\rho\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau=\iiint_{\tau^*(t)}\left[\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{V})-\nabla\cdot\boldsymbol{q}\right]\mathrm{d}\tau \tag{1-4-23}$$

$$\iiint_{\tau^*(t)}\left(\rho\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau=\iiint_{\tau^*(t)}\left[\frac{\phi}{T}-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{T}\right]\mathrm{d}\tau \tag{1-4-24}$$

由于被积函数的连续性及积分域的任意性，于是上述积分方程的微分形式便可得到，其具体形式可整理如下

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{1-4-25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}+\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}}{\rho}=\boldsymbol{f}+\frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}-\nabla P) \tag{1-4-26}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{V})-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{\rho} \tag{1-4-27}$$

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\phi}{\rho}-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{\rho} \tag{1-4-28}$$

应当指出：上述流体力学基本方程（其中包括积分形式式（1-4-3）～式（1-4-6）与微分形式式（1-4-25）～式（1-4-28））在一般流体力学教科书中（例如文献[81, 83, 86～91]）都可找到与此相对应的形式，不过这里给出的表达式更通用、更简洁一点。另外，对于上边的能量方程和熵方程还可进一步整理与变换。将式（1-4-26）两边点乘$\boldsymbol{V}$，然后减去式（1-4-27），并注意到式（1-4-13）便得

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\pi}:\nabla\boldsymbol{V}-\nabla\cdot\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\pi}:\boldsymbol{D}-\nabla\cdot\boldsymbol{q} \tag{1-4-29}$$

注意到

$$\boldsymbol{\pi}:\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\Pi}:\boldsymbol{D}-\rho P\frac{\mathrm{d}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{d}t} \tag{1-4-30}$$

$$\rho\dot{Q}=-\nabla\cdot\boldsymbol{q} \tag{1-4-31}$$

这里$\dot{Q}$是单位时间内传给单位质量气体的热量，于是式（1-4-29）变为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\phi}{\rho}+\dot{Q} \tag{1-4-32}$$

显然，式（1-4-29）与式（1-4-32）是广泛采用的能量方程的两种形式。另外将式（1-4-31）代入到式（1-4-28）得



$$T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{Q}+\frac{\phi}{\rho} \tag{1-4-33}$$

应该指出：在热力学书籍中，往往将（1-4-33）式写成克劳修斯（Clausius）不等式的形式，即

$$T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\geqslant\dot{Q} \tag{1-4-34}$$

另外，将雷诺定理应用于式（1-4-3）～式（1-4-6）还可变换成如下积分形式

$$\iiint\limits_{\tau^*(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{\sigma^*(t)}\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma=0 \tag{1-4-35}$$

$$\iiint\limits_{\tau^*(t)}\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{\sigma^*(t)}\rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_{\tau^*(t)}\rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{\sigma^*(t)}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\pi}\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-36}$$

$$\iiint\limits_{\tau^*(t)}\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{\sigma^*(t)}\rho e_t(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_{\tau^*(t)}\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{\sigma^*(t)}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\pi})\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\sigma-\oiint\limits_{\sigma^*(t)}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \tag{1-4-37}$$

$$\iiint\limits_{\tau^*(t)}\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{\sigma^*(t)}\rho S(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_{\tau^*(t)}\left(\frac{\phi}{T}+\frac{\nabla\cdot(-\boldsymbol{q})}{T}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1-4-38}$$

上述方程组已广泛地用于工程计算，具有很好的通用性。另外，由于被积函数的连续性及积分域的任意性，于是可方便地得到微分型守恒基本方程组

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{1-4-39}$$

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V})=\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}=\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}-\nabla P \tag{1-4-40}$$

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t}+\nabla\cdot\left[(\rho e_t+P)\boldsymbol{V}\right]=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{V})-\nabla\cdot\boldsymbol{q} \tag{1-4-41}$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho S\boldsymbol{V})=\frac{1}{T}(\phi-\nabla\cdot\boldsymbol{q}) \tag{1-4-42}$$

注意式（1-4-40）中 $\boldsymbol{\Pi}$ 为粘性应力张量，通常 $\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}$ 可具体表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}=\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+\frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+2(\nabla\mu)\cdot(\nabla\boldsymbol{V})+(\nabla\mu)\times(\nabla\times\boldsymbol{V})-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{V})(\nabla\mu) \tag{1-4-43}$$

$$\boldsymbol{\Pi}=\tau_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j=\tau^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-4-44}$$

另外，式（1-4-39）、式（1-4-40）与式（1-4-41）又可整理为如下形式

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(\mathrm{E}-\mathrm{E}_{\mathrm{v}})}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{F}-\mathrm{F}_{\mathrm{v}})}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{G}-\mathrm{G}_{\mathrm{v}})}{\partial z}=0 \tag{1-4-45}$$

式中

$$\boldsymbol{U}=[\rho \quad \rho V_1 \quad \rho V_2 \quad \rho V_3 \quad \varepsilon]^{\mathrm{T}} \tag{1-4-46}$$

$$[\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}]=\begin{bmatrix} \rho V_1 & \rho V_2 & \rho V_3 \\ \rho V_1 V_1+P & \rho V_2 V_1 & \rho V_3 V_1 \\ \rho V_1 V_2 & \rho V_2 V_2+P & \rho V_3 V_2 \\ \rho V_1 V_3 & \rho V_2 V_3 & \rho V_3 V_3+P \\ (\varepsilon+P)V_1 & (\varepsilon+P)V_2 & (\varepsilon+P)V_3 \end{bmatrix} \tag{1-4-47}$$

$$[\boldsymbol{E}_{\mathrm{v}},\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}},\boldsymbol{G}_{\mathrm{v}}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \tag{1-4-48}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & k\,\partial T/\partial x \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} & k\,\partial T/\partial y \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} & k\,\partial T/\partial z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1-4-49}$$

$$\varepsilon=\rho e_t=\rho\left[e+\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})\right]=\rho c_V T+\frac{1}{2}\rho V^2 \tag{1-4-50}$$

$$V^2=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}=(V_1)^2+(V_2)^2+(V_3)^2 \tag{1-4-51}$$

这里ε与e_t分别为单位体积流体的广义内能与单位质量流体的广义内能。应当注意，式（1-4-45）是在直角笛卡儿坐标系(x,y,z)下给出的守恒型$N-S$方程组，矢量$\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{G}$分别代表$x,y$与$z$方向的无粘矢通量；矢量$\boldsymbol{E}_v$，$\boldsymbol{F}_v$与$\boldsymbol{G}_v$分别代表$x,y$与$z$方向上由于粘性及热传导所引起的矢量项；$\tau_{xx},\tau_{xy},\cdots,\tau_{zz}$为粘性应力张量的分量，$V_1,V_2$与$V_3$为速度矢量$\boldsymbol{V}$沿$x,y$与$z$方向的分速度；$\rho,P,T$与$k$分别代表流体的密度、压强、温度与热传导系数；$c_V$为定容比热容。显然，这里$(x,y,z)$为惯性坐标系。

对于非惯性坐标系，本章§1.3节已有过讨论，这里仅给出叶轮机械中经常采用的相对坐标系下（当$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{const}$时）三维流动基本方程组的弱守恒形式。为便于讨论，这里取相对坐标系为笛卡儿直角坐标（x_1,x_2,x_3），并令$\boldsymbol{V}$与$\boldsymbol{W}$分别代表绝对速度与相对速度；V_1,V_2与V_3分别代表绝对速度$\boldsymbol{V}$沿绝对笛卡儿标系(x,y,z)三个方向的分速度；W_1,W_2与W_3分别代表相对速度矢量$\boldsymbol{W}$沿相对笛卡儿坐标系（x_1,x_2,x_3）三个方向的分速度；这里$\boldsymbol{V}$与$\boldsymbol{W}$间服从式（1-3-11），于是式（1-3-17）、式（1-3-18）和式（1-3-19）可以被整理为如下形式



$$\frac{\partial_R \rho}{\partial t}+\nabla_R \cdot(\rho \boldsymbol{W})=0 \tag{1-4-52}$$

$$\frac{\partial_R(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla_R \cdot(\rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{V})=\nabla_R \cdot \boldsymbol{\Pi}-\nabla_R P-\rho \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V} \tag{1-4-53}$$

$$\frac{\partial_R \varepsilon}{\partial t}+\nabla_R \cdot(\varepsilon \boldsymbol{W})=\nabla_R \cdot(\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{V})-\nabla_R \cdot(P \boldsymbol{V})+\nabla_R \cdot(k \nabla_R T) \tag{1-4-54}$$

以下省略注脚 R 并把上述方程组在相对笛卡儿坐标系（ x_1,x_2,x_3 ）下写成如下弱守恒形式：

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t}+\frac{\partial(\tilde{E}-\tilde{E}_v)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\tilde{F}-\tilde{F}_v)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\tilde{G}-\tilde{G}_v)}{\partial x_3}=N \tag{1-4-55}$$

式中

$$\tilde{U}=[\rho, \rho V_1, \rho V_2, \rho V_3, \varepsilon]^{\mathrm{T}} \tag{1-4-56}$$

$$[\tilde{\boldsymbol{E}}, \tilde{\boldsymbol{F}}, \tilde{\boldsymbol{G}}]=\begin{bmatrix} \rho W_1 & \rho W_2 & \rho W_3 \\ \rho W_1 V_1+P & \rho W_2 V_1 & \rho W_3 V_1 \\ \rho W_1 V_2 & \rho W_2 V_2+P & \rho W_3 V_2 \\ \rho W_1 V_3 & \rho W_2 V_3 & \rho W_3 V_3+P \\ (\varepsilon+P) W_1 & (\varepsilon+P) W_2 & (\varepsilon+P) W_3 \end{bmatrix} \tag{1-4-57}$$

$$[\tilde{\boldsymbol{E}}_v, \tilde{\boldsymbol{F}}_v, \tilde{\boldsymbol{G}}_v]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x_1x_1} & \tau_{x_1x_2} & \tau_{x_1x_3} \\ \tau_{x_2x_1} & \tau_{x_2x_2} & \tau_{x_2x_3} \\ \tau_{x_3x_1} & \tau_{x_3x_2} & \tau_{x_3x_3} \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \end{bmatrix} \tag{1-4-58}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_{x_1x_1} & \tau_{x_1x_2} & \tau_{x_1x_3} & k\partial T/\partial x_1 \\ \tau_{x_2x_1} & \tau_{x_2x_2} & \tau_{x_2x_3} & k\partial T/\partial x_2 \\ \tau_{x_3x_1} & \tau_{x_3x_2} & \tau_{x_3x_3} & k\partial T/\partial x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1-4-59}$$

式中，矢量 $\tilde{\boldsymbol{U}}$ 的定义与式（1-4-46）的 U 相同，而且这里式（1-4-56）中 ε 的定义也同式（1-4-50）。在式（1-4-55）中，右端项 N 是由于相对坐标系的旋转而产生的，可由下式定义

$$N=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\omega V_3 \\ -\rho\omega V_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-4-60}$$

应该指出：上述两个方程组即式（1－4－45）与式（1－4－55）在进行压气机级（包含动叶与静叶）与涡轮级（包括涡轮导叶与涡轮转子）的三维流场计算时格外方便[92]。当然，也可将式（1－4－53）与式（1－4－54）改写为如下形式

$$\frac{\partial_R(\rho \boldsymbol{W})}{\partial t}+\nabla_R\cdot(\rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{W})=\nabla_R\cdot\boldsymbol{\Pi}-\nabla_R P-2\rho\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}+\rho(\omega)^2\boldsymbol{r} \tag{1-4-61}$$

$$\frac{\partial_R e_0}{\partial t}+\nabla_R\cdot[(e_0+P)\boldsymbol{W}]=\nabla_R\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{W})+\nabla_R\cdot(k\nabla_R T)+\rho(\omega)^2(\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{1-4-62}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 为矢径，而 e_0 定义为单位体积的流体所具有的相对广义内能，即

$$e_0=\rho(C_V T+\frac{1}{2}\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}) \tag{1-4-63}$$

因此式（1－4－52）、式（1－4－61）与式（1－4－62）又可在（x_1,x_2,x_3）相对笛卡儿系中写成另一种形式的弱守恒 $N-S$ 方程组。

二、涡量与胀量的输运方程

如果令

$$\boldsymbol{\omega}\equiv\nabla\times\boldsymbol{V} \tag{1-4-64}$$

$$\theta\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{1-4-65}$$

这时 $\boldsymbol{\omega}$ 与 θ 分别称为涡量与胀量，则式（1－4－43）便可写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}=\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+\frac{\mu}{3}\nabla\theta+2(\nabla\mu)\cdot(\nabla\boldsymbol{V})+(\nabla\mu)\times\boldsymbol{\omega}-\frac{2}{3}\theta(\nabla\mu) \tag{1-4-66}$$

显然，如果认为 μ 均布时，则上式便简化为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}=\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+\frac{\mu}{3}\nabla\theta \tag{1-4-67}$$

引入运动粘性系数 $\gamma\equiv\frac{\mu}{\rho}$，于是将式（1－4－67）两边除 ρ 后再取旋度，便有

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}}{\rho}\right)=\gamma\nabla^2\boldsymbol{\omega}+(\nabla\gamma)\times(\nabla^2\boldsymbol{V})+\frac{1}{3}(\nabla\gamma)\times(\nabla\theta) \tag{1-4-68}$$

注意，推导上式时使用了如下恒等式，即

$$\nabla\times(\nabla^2\boldsymbol{B})=\nabla^2(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{1-4-69}$$

这里 $\boldsymbol{B}$ 为任意矢量。于是，将式（1－4－26）两边取旋度并注意到式（1－4－69）后，便有



$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{V})+\theta\boldsymbol{\omega}\\&=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{V\omega}-\boldsymbol{\omega V})=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V})\\&=\nabla\times\boldsymbol{f}-\nabla\times\left(\frac{\nabla P}{\rho}\right)+\gamma\nabla^2\boldsymbol{\omega}+(\nabla\gamma)\times(\nabla^2\boldsymbol{V})+\frac{1}{3}(\nabla\gamma)\times(\nabla\theta)\end{aligned} \tag{1-4-70}$$

如果认为运动粘性系数 γ 均布，并注意到

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla P}{\rho}\right)=-(\nabla T)\times(\nabla S) \tag{1-4-71}$$

则式（1－4－70）被简化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{V})+\theta\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{f}+(\nabla T)\times(\nabla S)+\gamma\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{1-4-72}$$

上式常称为涡量动力学方程，又称涡量输运方程。类似的，将式（1－4－26）两边取散度便得到关于胀量（expanon）的输运方程，其具体形式如下

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+D:D+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})=\nabla\cdot\boldsymbol{f}-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla P}{\rho}\right)+\frac{4}{3}\gamma\nabla^2\theta+(\nabla\gamma)\cdot(\nabla^2\boldsymbol{V})+\frac{\gamma}{3}(\nabla\gamma)\cdot(\nabla\theta) \tag{1-4-73}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为应变速率张量。显然，如果认为运动粘性系数均布时，则上式被简化为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})=\nabla\cdot\boldsymbol{f}-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla P}{\rho}\right)+\frac{4}{3}\gamma\nabla^2\theta \tag{1-4-74}$$

由式（1－4－72）与式（1－4－74）可以看出：在胀量输运方程中含有涡量，而在涡量输运方程中又含有胀量，两者相互耦合着。

§1.5　流体运动的热力学基础

1.5.1　流体运动的热力学第一定律

当气体在流场中运动时，任取一个质量为 Δm 的微元封闭体系，热力学第一定律可用如下普遍形式表达

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dot{Q}-\dot{L} \tag{1-5-1}$$

式中，$\dot{Q}$ 和 $\dot{L}$ 分别表示单位时间内外界对所考察体系的传热率和该体系对外界的作功率，而 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 则是该体系的内能对时间的导数。在具体表达上式中的三项时，无论观察者是否静止或观察者随体系一起运动，$\dot{Q}$ 总是表示由于所取体系的温度和外界温度之间的差别所引起

的穿过体系边界的传热率，但是体系中内能的增加率和体系边界上力对外界的作功率则随着观察者的不同而不同。

下面分别考虑如下两种情况时 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 和 $\dot{L}$ 的表达式。

一、观察者静止不动

在不考虑体积力的情况下，这时观察者看到的单位质量气体对外的作功率为 $-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{V})$，并注意到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{V})=\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{V})-\nabla\cdot(P\boldsymbol{V}) \tag{1-5-2}$$

式中，$\boldsymbol{\pi}$ 与 $\boldsymbol{\Pi}$ 分别为应力张量与粘性应力张量。于是 $\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(P\boldsymbol{V})$ 为这时观察者所观察到的单位质量气体对外所作的压缩功率；这时观察者所看到的单位质量气体内能的增加率为 $\mathrm{d}\left(e+\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right)\Big/\mathrm{d}t$，这里 e 为气体热力状态函数的狭义内能，$\boldsymbol{V}$ 为气体流动速度。通常 $e+\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\equiv e_t$，并定义 e_t 为单位质量气体具有的广义内能。因此，对于单位质量的气体而言，此时式（1－5－1）便可变为

$$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\Delta m}-\frac{\dot{L}}{\Delta m}=\frac{\dot{Q}}{\Delta m}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{V})=\frac{\nabla\cdot(\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{V})}{\rho}-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{\rho} \tag{1-5-3}$$

这里 $\boldsymbol{q}$ 为热流矢量，$\boldsymbol{q}=-k\nabla T$。

二、观察者随气体一起运动（即随体观察者）

在不考虑体积力的情况下，这时观察者所观察到的单位质量气体对外作功率为 $P\frac{\mathrm{d}(1/\rho)}{\mathrm{d}t}-\frac{\phi}{\rho}$，这里单位体积流体所具有的耗散函数 ϕ 为

$$\phi=\boldsymbol{\Pi}:\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\Pi}:\nabla\boldsymbol{V} \tag{1-5-4}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为应变速率张量。

此外，$P\frac{\mathrm{d}(1/\rho)}{\mathrm{d}t}$ 项为通常热力学教科书[93, 94]上所讲的单位质量气体所作的压缩功率。另外，这时观察者所看到的单位质量气体内能的增加率为 $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$；对于单位质量的气体来讲，此时式（1－5－1）便可被写为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\phi}{\rho}-P\frac{\mathrm{d}(1/\rho)}{\mathrm{d}t}-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{\rho} \tag{1-5-5}$$



1.5.2　流体运动的热力学第二定律

考虑一个单相的 k 个化学组元的单位质量均匀系统，于是热力学第二定律的基本微分方程（又称作 Gibbs 方程）为[93]

$$TdS = de + Pdv - \sum_{i=1}^{k}(\mu_i dc_i) \tag{1-5-6}$$

式中，e 为单位质量气体具有的内能（简称比内能）；v 为比容；S 为比熵；c_i 为组元 i 的质量分数；μ_i 为组元 i 的化学势。

对于可逆变化，则

$$\sum_{i=1}^{k}(\mu_i dc_i) = 0 \tag{1-5-7}$$

由于可逆变化仅仅对于平衡系统才发生，所以在局部平衡态的假设下，流场中任意流体微团恒有

$$TdS = de + Pdv = de + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = dh - \frac{1}{\rho}dP \tag{1-5-8}$$

另外，将连续方程整理为

$$P\nabla \cdot \boldsymbol{V} = P\rho\frac{d(1/\rho)}{dt} \tag{1-5-9}$$

代入到式（1－5－8）便有

$$\rho\frac{de}{dt} + P\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \rho T\frac{dS}{dt} \tag{1-5-10}$$

然后，代到式（1－5－5）便推出

$$\rho\frac{dS}{dt} = \frac{\phi}{T} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}}{T} \tag{1-5-11}$$

注意到

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) = \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}}{T} - \boldsymbol{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \tag{1-5-12}$$

式中，$\boldsymbol{q}/T$ 称为熵通量。于是将式（1－5－12）代入到式（1－5－11）后得到

$$\rho\frac{dS}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) = \frac{\phi}{T} + k\frac{(\nabla T)^2}{T^2} \geqslant 0 \tag{1-5-13}$$

式中，S 为比熵。由于式中耗散函数 ϕ 与热传导系数 k 都是正数，故上式右端两项之和是正的。因此式（1－5－13）是热力学第二定律在流体力学中的又一种表达形式。引进单位体积里的熵产生率[93] ϑ，即

$$\vartheta=\frac{1}{T}\left[\phi-\boldsymbol{q}\cdot\left(\frac{\nabla T}{T}\right)\right]=\frac{\phi}{T}+k\frac{(\nabla T)^2}{T^2} \tag{1-5-14}$$

它反映了不可逆过程所产生的熵。考虑到熵为广延量，用大写 S^* 表示一流体集合所具有的熵，于是积分式（1-5-13）并注意使用奥-高公式便得到

$$\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}t}=\iiint_{\tau}\vartheta\mathrm{d}\tau+\oiint_{\sigma}\frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \tag{1-5-15}$$

显然，无论上面所考虑的流体集合内部如何进行复杂的功与热量的交换，只要在流体集合的边界上热流处处为零，那么这个给定的流体集合就是热力学的热孤立系统，这时

$$\mathrm{d}S^*\geqslant 0 \tag{1-5-16}$$

即一个孤立系统的熵是永远不会减少的。

1.5.3 热力学函数与普遍微分关系式

一、特征函数及普遍微分关系式

考虑单位质量的气体，引进四个热力学特征函数：内能 e，焓 h，海姆霍兹自由能 f，与吉布斯自由焓 g，并且取 $e=e(v,s),h=h(P,s),f=f(T,v)$ 与 $g=g(T,P)$，其中

$$h=e+Pv \tag{1-5-17}$$

$$f=e-TS \tag{1-5-18}$$

$$g=h-TS \tag{1-5-19}$$

对于封闭均匀系统的可逆过程，其热力学基本微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}e&=T\mathrm{d}S-P\mathrm{d}v+\sum_{i=1}^{k}(\mu_i\mathrm{d}c_i)\\ \mathrm{d}h&=T\mathrm{d}S+v\mathrm{d}P+\sum_{i=1}^{k}(\mu_i\mathrm{d}c_i)\\ \mathrm{d}f&=-S\mathrm{d}T-P\mathrm{d}v+\sum_{i=1}^{k}(\mu_i\mathrm{d}c_i)\\ \mathrm{d}g&=-S\mathrm{d}T+v\mathrm{d}P+\sum_{i=1}^{k}(\mu_i\mathrm{d}c_i)\end{aligned}\right\} \tag{1-5-20}$$

为简便起见，在以下讨论中均不考虑化学势的影响，于是由基本微分方程的全微分条件，便可导出下列热力学关系式



$$\left.\begin{aligned} T&=\left(\frac{\partial e}{\partial S}\right)_v=\left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)_P \\ P&=-\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_S=-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T \\ v&=\left(\frac{\partial e}{\partial P}\right)_S=\left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_T \\ S&=-\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v=-\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P \end{aligned}\right\} \tag{1-5-21}$$

再利用全微分中两项交叉导数相等条件，便得到麦克斯韦关系式

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S&=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_v \\ \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S&=\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_P \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v&=\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \\ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P&=-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \end{aligned}\right\} \tag{1-5-22}$$

因此，在不考虑化学势的情况下又可得出关于熵 S 、内能 e 、焓 h 以及比热容的普遍微分关系

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S&=\frac{C_V}{T}\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v\mathrm{d}v=\frac{C_P}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P\mathrm{d}v+\frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v\mathrm{d}P \\ &=\frac{C_P}{T}\mathrm{d}T-\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\mathrm{d}P \end{aligned} \tag{1-5-23}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e&=C_V\mathrm{d}T+\left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v-P\right]\mathrm{d}v=C_V\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v\mathrm{d}P+\left[C_P\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P-P\right]\mathrm{d}v \\ &=\left[C_P-P\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\right]\mathrm{d}T-\left[P\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T+T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\right]\mathrm{d}P \end{aligned} \tag{1-5-24}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h&=\left[C_V+v\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v\right]\mathrm{d}T+\left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v+v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T\right]\mathrm{d}v \\ &=C_P\mathrm{d}T+\left[v-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\right]\mathrm{d}P \\ &=\left[v+C_V\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v\right]\mathrm{d}P+C_P\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{1-5-25}$$

$$C_V=\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v \tag{1-5-26}$$

$$C_P=\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \tag{1-5-27}$$

$$C_P-C_V=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P=T\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \tag{1-5-28}$$

二、热系数

引进三个热系数即压缩系数 β_T 或 β_S、弹性系数（又称压强系数）α_v 以及热膨胀系数（又称体胀系数）α_P，其具体定义式为

$$\beta_T=-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \tag{1-5-29}$$

$$\beta_S=-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_S=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \tag{1-5-30}$$

$$\alpha_v=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \tag{1-5-31}$$

$$\alpha_P=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \tag{1-5-32}$$

式中，β_T 与 β_S 分别称作等温压缩系数与等熵压缩系数；v 与 ρ 分别代表比容与密度；系数 α_v 常称作定容压力温度系数或压力的温度系数；系数 α_P 称为等压热膨胀系数。显然，β_T 是体积弹性模量的倒数。引进比热比 γ，很容易证明 γ 是等温压缩系数与等熵压缩系数之比，即

$$\gamma\equiv C_P/C_V=\beta_T/\beta_S \tag{1-5-33}$$

并且这三个热系数 α_P,α_v 与 β_T 之间有如下关系

$$\alpha_P=P\beta_T\alpha_v \tag{1-5-34}$$

这里上式应用了下面的微分关系，即

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P=-\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \tag{1-5-35}$$

对于压缩系数，气体要比液体大得多。例如空气在一个大气压下的 $\beta_T=10^{-5}\ \mathrm{m^2/N}$，而水的 $\beta_T=5\times10^{-10}\ \mathrm{m^2/N}$，可见空气的压缩系数要比水的可压缩系数大四个量级。对于实际工程问题，一般认为，只要 $|\mathrm{d}\rho/\rho|\geqslant5\%$ 时，才考虑流动的可压缩性特征。对于高速气体流动通常 $|\mathrm{d}\rho/\rho|$ 大于 5%，因此高速流可压缩性效应的研究成为气体动力学的重要内容之一。



三、理想气体及相关的微分关系

理想气体又称完全气体，其状态方程（又称 Clapeyron 克拉珀龙方程）为

$$P=\rho RT \tag{1-5-36}$$

或者

$$Pv=RT \tag{1-5-37}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}+\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{1-5-38}$$

前面给出的关于比热容 c_v 与 c_p，内能 e，焓 h 及熵 s 的普遍关系式，这时将退化为

$$e=C_vT,\ \mathrm{d}e=C_v\mathrm{d}T \tag{1-5-39}$$

$$h=C_pT,\mathrm{d}h=C_p\mathrm{d}T \tag{1-5-40}$$

$$C_p-C_v=R \tag{1-5-41}$$

$$C_v=\frac{R}{\gamma-1} \tag{1-5-42}$$

$$C_p=\frac{\gamma R}{\gamma-1} \tag{1-5-43}$$

$$\mathrm{d}s=C_v\frac{\mathrm{d}T}{T}+R\frac{\mathrm{d}v}{v}=C_v\frac{\mathrm{d}T}{T}-R\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=C_p\frac{\mathrm{d}T}{T}-R\frac{\mathrm{d}P}{P}=C_v\frac{\mathrm{d}P}{P}+C_p\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{1-5-44a}$$

或者

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\frac{s}{R}\right)&=\frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}P}{P}-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{1}{\gamma-1}\mathrm{d}\ln P-\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{d}\ln\rho\\&=\frac{1}{\gamma-1}\mathrm{d}\ln T-\mathrm{d}\ln\rho=\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{d}\ln T-\mathrm{d}\ln P\end{aligned} \tag{1-5-44b}$$

式中，γ 为比热比；v 为气体的比容；R 为气体常数，对于不同的气体它有不同的值，其计算公式为

$$R=R_0/M \tag{1-5-45}$$

这里 R_0 为普适气体常数，它对所有气体都是同样值（R_0=8 314 J/kmol・K）；M 为摩尔质量；对于空气的 M=28.95 kg/kmol，而空气的 R 为 287 J/(kg・K)；

1.5.4　函数行列式及其重要性质

① 设三个函数 f，g，h 都是二个独立变数 x，y 的函数，则恒有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h = 1\bigg/\left(\frac{\partial g}{\partial f}\right)_h \tag{1-5-46}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x = \frac{(\partial f/\partial y)_x}{(\partial g/\partial y)_x} \tag{1-5-47}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_f = -\frac{(\partial f/\partial x)_y}{(\partial f/\partial y)_x} \tag{1-5-48}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h \left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f \left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)_g = -1 \tag{1-5-49}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_g \tag{1-5-50}$$

许多教科书中，常称式（1-5-46）为倒数关系式，称式（1-5-49）为循环关系式。

② 设四个函数 f，g，h，k 都是二个独立变数 x，y 的函数，则恒有

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(h,k)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\bigg/\frac{\partial(h,k)}{\partial(x,y)} \tag{1-5-51}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 1\bigg/\frac{\partial(x,y)}{\partial(f,g)} \tag{1-5-52}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h = \frac{\partial(f,h)}{\partial(g,h)} \tag{1-5-53}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h = \frac{\partial(f,h)}{\partial(x,y)}\bigg/\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)} \tag{1-5-54}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\bigg/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \tag{1-5-55}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{vmatrix} \tag{1-5-56}$$

③ 设六个函数 f，g，h，u，v，w 都是三个独立变数 x，y，z 的函数，则恒有

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}\bigg/\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \tag{1-5-57}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{g,h} = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}\bigg/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)} \tag{1-5-58}$$



$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_{x,h}=\frac{\partial(f,h)}{\partial(y,z)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)} \tag{1-5-59}$$

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}\equiv\begin{vmatrix}\partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z\\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & \partial g/\partial z\\ \partial h/\partial x & \partial h/\partial y & \partial h/\partial z\end{vmatrix} \tag{1-5-60}$$

④ 设 x，y，z 三个变量之间存在一定的函数关系，如果把任一个变量视为其余两个变量的函数，则恒有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=1\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \tag{1-5-61}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1 \tag{1-5-62}$$

在许多教科书中，也将上面两式分别称作倒数关系式与循环关系式。

⑤ 设 x，y，z，m 为四个变量，如果仅有两个独立变量，其余两个为所选变量的函数，则恒有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_m\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_m=1 \tag{1-5-63}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_z=\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_y+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_m\left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)_z \tag{1-5-64}$$

式（1-5-64）与式（1-5-50）有类似之处。式（1-5-63）与式（1-5-64）常被称作链式关系式。

⑥ 函数行列的重要性质。

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(g,f)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)} \tag{1-5-65}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(g,f)}{\partial(y,x)} \tag{1-5-66}$$

$$\frac{\partial(f,y)}{\partial(x,y)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \tag{1-5-67}$$

$$\frac{\partial(h,m)}{\partial(x,y)}=1\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(h,m)} \tag{1-5-68}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(h,m)}\frac{\partial(h,m)}{\partial(x,y)} \tag{1-5-69}$$

式中，f 与 g 均为独立变量 x，y 的函数，并且 h 与 m 也为 x，y 的函数。

§1.6 气体的粘性系数、热传导系数与扩散系数

1.6.1 粘性系数

在流体力学中，流体的粘性系数有两个：一个称动力粘性系数μ，另一个称为运动粘性系数γ，两者间的关系为

$$\gamma = \mu / \rho \tag{1-6-1}$$

在国际单位制中，μ的单位是 N·s/m² 或 Pa·s，在工程单位中μ的单位是 kgf·s/m²，两者的关系为 1 Pa·s=0.102 kgf·s/m²；而γ在国际单位制中为 m²/s，可以看出，它的量纲中仅有长度和时间，即具有运动量的量纲，故取名为运动粘性系数。

气体的动力粘性系数随着温度的升高而增大，再加上气体的密度随着温度的升高而减少，因此当温度升高时气体的运动粘性系数迅速增大。应当指出：当压强不变时，不同温度下的气体动力粘性系数μ可以根据萨瑟兰（Sutherland）公式计算

$$\mu \approx \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1.5} \frac{T_0 + C}{T + C} \tag{1-6-2}$$

式中，μ_0为温度T_0时的动力粘性系数；C取决于气体的种类，常称为萨瑟兰常数。表 1-1 给出了几种气体的μ_0，T_0及C值。当然，也可以用幂次律去估算气体的μ值，即

$$\mu \approx \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{n} \tag{1-6-3}$$

式中，T_0=273.15 K；n为取决于气体种类的常数（见表 1-1）。另外，实验证实，在压强不太高时，压强对于气体动力粘性系数的影响很小。因此，压强变化小于 10^6 Pa 时，可以不考虑动力粘性系数的变化。此外，文献[95]还给出了气体动力粘性系数随压强增加时的修正曲线，可供需用者查阅。

表 1-1 几种气体的 m_0，T_0及C值

气 体	T_0/K	μ_0/（10^{-4}Pa·s）	C/K	n	适用的温度范围/K
空气	273.15	0.716	110.6	0.666	210～1 900
Ar	273.15	0.2125	144.4	0.72	200～1 500
N_2	273.15	0.1663	106.7	0.67	222～1 500
O_2	273.15	0.1919	138.9	0.69	230～2 000
H_2	273.15	0.08411	96.7	0.68	224～1 100
CO	273.15	0.1657	136.1	0.71	230～1 500
CO_2	273.15	0.1370	222.2	0.79	200～1 700



1.6.2 热传导系数（导热系数）

无论流体是静止的还是运动的，只要其中的温度场不均匀，热量就由高温处向低温处传递。在温度分布不均匀的连续介质中，仅仅由于各部分直接接触，而没有宏观相对运动所发生的热量传递称为热传导。一般来说，绝大多数流体的热传导性是各向同性的，其热传导规律服从傅里叶（Fourier）导热定律，即

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{1-6-4}$$

式中 $\boldsymbol{q}$ 为热流矢量；k 为热传导系数（简称导热系数或导热率）；T 为温度，∇T 为温度对空间坐标的梯度。实验证明，对于大多数接近完全气体的气体，其热传导系数 k 几乎与动力粘性系数μ成正比。引进普朗特（Prandtl）数 Pr，即

$$Pr = \frac{\mu C_P}{k} \tag{1-6-5}$$

式中 C_P 为气体的定压比热。对于这类气体，它的 Pr 数几乎与温度和压强无关，而仅取决于气体的种类。例如空气的 Pr 值在 273.15 K 时为 0.720，在 1 273.15 K 时为 0.706，二者相差甚小。但对于某些非完全气体，例如干饱和蒸汽，其 Pr 数随温度有明显的变化。

1.6.3 扩散系数

当流体的密度分布不均匀时，流体的质量就会从高密度区迁移到低密度区，这种现象称为扩散。扩散现象又可分为两类，一类是在单组分流体中，由于其自身密度差所引起的扩散，称为自扩散。另一类是在两种组分的混合介质中，由于各组分的各自密度差在另一组分中所引起的扩散，称为互扩散。由流体力学基础知道，自扩散系数与流体的动力粘性系数 μ 有关；互扩散现象服从菲克（Fick）扩散定律，假定 j 组元为均质介质，这里仅考虑 i 组元在 j 组元中的扩散并认为扩散为各向同性时，于是有

$$\boldsymbol{J}_{ij} = -D_{ij}\nabla\rho_i \tag{1-6-6}$$

式中 $\boldsymbol{J}_{ij}$ 为在单位时间内，i 组元在 j 组元中通过单位面积传递的质量流矢量；D_{ij} 为 i 组元在 j 组元中的质量扩散系数简称扩散系数；ρ_i 为 i 组元的分密度。

§1.7 声速、马赫数及弱扰动在气流中的传播

1.7.1 在一般物质中的声速

声速，也称音速，在普通物理学中已讲过。对于弹性介质（包括流体和固体），只要对它施加一个任意的小扰动，就会在介质中引起微小的压力增量（或应力增量），于是扰动便以波的形式向四周传播，这种小扰动波称为声波，而小扰动波传播的速度称为声速，其公式为

$$a=\sqrt{\frac{K_S}{\rho}} \tag{1-7-1}$$

式中 a 为声速；K_S 为等熵体积弹性模量，其表达式为

$$K_S=-v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_S=\rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \tag{1-7-2}$$

显然 K_S 是压缩系数 β_S 的倒数。由于 $\rho=1/v$，并注意到 $\mathrm{d}\rho/\rho=-\mathrm{d}v/v$，于是式（1-7-1）变为

$$a=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S} \tag{1-7-3}$$

通常认为，声波传播的过程为等熵过程。近代的研究表明：声波传播过程为等熵过程的假设只适用于声波作低频传播的情况，这时由波动引起的各个热力学变量的梯度很小，因而粘性耗散作用可忽略不计。对于不可压缩流体，声速 a 趋于无穷大，这意味着小扰动在不可压缩流体中的传播几乎是瞬时完成的。而对可压缩流体，小扰动的传播需要一定的时间，这正是可压缩流体与不可压缩流体之间的本质差别之一。严格意义下的不可压缩流体实际上并不存在，只是当密度不易变化，并且声速较大时，才可近似地看作不可压缩流动。

1.7.2 在完全气体中的声速

对于完全气体，熵由下式决定

$$S=C_V\ln\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)+\mathrm{const} \tag{1-7-4}$$

在等熵过程中，S 为常数，于是

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S=\gamma\frac{P}{\rho} \tag{1-7-5}$$



并注意到完全气体的状态方程

$$P = R\rho T \tag{1-7-6}$$

于是这时声速的公式可写作

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \tag{1-7-7}$$

式中，比热比γ是温度的函数。显然，完全气体的声速仅与温度有关。对于空气，当$\gamma=1.4$时，因 R=287.06 J/（kg·K），则式（1-7-7）变为：

$$a = 20.05\sqrt{T} \tag{1-7-8}$$

例如，当空气为 15 ℃时，由式（1-7-8）给出 a=340 m/s；在 11 000～24 000 m 的同温层高空，空气的温度为 216.7 K，计算出的声速值为 295.1 m/s。

1.7.3　马赫数及气流速度范围的划分

在气体动力学中，经常使用一个重要的量纲为 1 的参数，即

$$M = \frac{V}{a} \tag{1-7-9}$$

它是当地流速 V 与当地声速 a 之比，称为马赫数（Mach number）M。为了说明马赫数的物理含义，我们将式（1-7-9）作如下恒等变形

$$M^2 = \frac{V^2}{\gamma RT} = \frac{2}{\gamma(\gamma-1)}\frac{V^2/2}{c_v T} = \frac{2}{\gamma(\gamma-1)}\frac{V^2/2}{e} \tag{1-7-10}$$

式中，e 为热力学狭义内能。因此马赫数的平方和气体的动能与内能之比成正比，也就是说，马赫数的平方可以看作气体的宏观流动动能与分子随机热运动能量之比的一个度量。另外，马赫数 M 还是气体可压缩性的度量，下面来说明这个问题。将运动方程式（1-4-26）省略体积力 $\boldsymbol{f}$ 后两边点乘速度 $\boldsymbol{V}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{V}\cdot\nabla P \tag{1-7-11}$$

如果假定流动是定常的，则上式可变为

$$V\mathrm{d}V = -\frac{1}{\rho}\mathrm{d}P \tag{1-7-12}$$

式中 V 为速度矢量 $\boldsymbol{V}$的模。如果再认为流动为等熵时，则有

$$-V\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{1-7-13}$$

因此有

$$M^2=-\frac{d\rho}{\rho}\bigg/\frac{dV}{V} \tag{1-7-14}$$

该式表明，在绝能等熵过程中，由于气流速度的相对变化而导致的密度相对变化量与马赫数 M 的平方成正比，也就是说气流的压缩性与马赫数的大小密切相关。通常，当 $M\leqslant 0.3$ 时，这时 $|(d\rho/\rho)/(dV/V)|\leqslant 9\%$，一般可忽略密度的变化，把流动作不可压缩流处理；但当 $M>0.3$ 时，就必须考虑气流的压缩性，否则会导致计算误差过大而与实验结果不符。因此马赫数是研究高速流动的重要参数，是划分流动类型的标准。当 $M<1$ 即气流速度小于当地声速时，为亚声速气流；当 $M>1$ 即气流速度大于当地声速时为超声速气流；当 $M=1$ 时为声速流动；当 M 在 0.8～1.2 范围内的气流称作跨声速气流；另外，高超声速流是速度远大于声速的流动，通常用自由来流的马赫数 M_∞ 大于 5 作为高超声速流的一种标志，但是这种 M_∞ 的界限不是绝对的，它还与飞行器的具体形状有关，例如对于钝体飞行器，当 $M_\infty>3$ 时就开始出现高超声速流的特征；而对于细长体飞行器，M_∞ 要高达 10 时才开始出现高超声速流动的特征。

1.7.4 运动流场中的弱扰动传播特征

1. 小扰动在静止流体中的传播

如图 1.1（a）所示，由于流体是静止的，小扰动将以声速 a 向四面八方传播，而且在各个方向上的传播速度都相等。

2. 小扰动在亚声速流场中的传播

如图 1.1（b）所示，从相对运动的观点看，在随流体一起运动的坐标系中，小扰动以声速向四面八方传播而且传播速度相等。但在绝对坐标系中，它的各个方向的传播速度就不相等了。小扰动在顺流方向的传播速度为 $a+V_\infty$，在逆流方向的传播速度为 $a-V_\infty$，由于流动是亚声速的即 $V_\infty<a$，所以小扰动仍可以向四面八方传播，但它的传播速度在各个方向不同，在顺流方向传播速度最大，而在逆流方向最小，小扰动波阵面是一族偏心的球面。

3. 小扰动在声速流场中的传播

如图 1.1（c）所示，小扰动传播的情况同（2）的情况大致相同，但由于这时 $V_\infty=a$，因此它只能向顺流方向传播而不能向逆流方向传播，也就是说 0 点上游的流场已不受扰动的影响，只有 0 点下游的流场才受扰动的影响。

4. 小扰动在超声速流场中的传播

如图 1.1（d）所示，此时 $V_\infty>a$，因此小扰动不能再向逆流方向传播。每个波阵面相对于扰动中心而言，传播速度仍是声速 a，在 t 时刻构成以扰动中心为圆心，以 at 为半径的球面；而扰动中心以速度 V_∞ 顺流而下，t 时刻已离开初始位置为 $V_\infty t$，因此从绝对坐标中看，



扰动传播的范围只在顺流方向的圆锥型区域之内，圆锥型区域以外的地方是不会受到小扰动影响的。这个圆锥称为弱扰动锥或马赫锥。圆锥面为弱扰动边界波或称马赫波。圆锥母线与来流速度方向之间的夹角叫马赫角，并用符号μ来表示，即

$$\mu = \arcsin\frac{a}{V_\infty} = \arcsin\frac{1}{M} \tag{1-7-15}$$

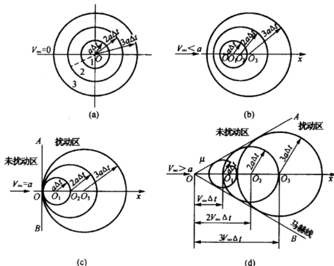


图 1.1　弱扰动在不同来流速度场内的传播

（a）静止流体；（b）亚声速流场；（c）声速流场；（d）超声速流场

另外，如果将气流速度 V 分解为垂直于马赫锥面和平行马赫锥面的两个分量 V_n 和 V_t，则

$$V_n = V\sin\mu = V\frac{a}{V} = a \tag{1-7-16}$$

也就是说垂直于马赫锥面的气流分速等于声速。而马赫波（即弱扰动边界波）在气体中沿垂直于波面方向以声速向外传播，这个传播速度正好与气流在该方向上的分速 V_n 大小相等，方向相反；因此马赫波能在气流中稳定不动。

§1.8　滞止参数、临界参数及气动函数

在可压缩流体动力学中，我们常引进三种特定的参考状态：① 滞止状态（参数的下标以“0”表示）；② 临界状态（参数的下标以“*”表示）；③ 最大速度（V_{max}）状态。应该指出：处于任何状态的流体，都可以经过假想的等熵过程转变为对应的滞止状态、临界状态

和最大速度状态，因此参考状态可以是该问题中真实存在的状态，也可以是该实际问题中并不存在的状态。但对于绝能等熵流动来说，参考状态往往是真实存在的。

1.8.1 滞止状态与滞止参数

滞止状态是流体质点由某一个真实状态经等熵过程或者经过假想的等熵过程速度减少到零，这时流体质点的状态称为该真实状态所对应的滞止状态，这种状态下流体质点所具有的流动参数称为该真实状态的滞止参数。应该指出：滞止参数是点函数，它与流动的过程无直接关系。借助于上面的定义，则滞止焓 h_0 与静焓之间的关系为

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \tag{1-8-1}$$

对于完全气体，$h = C_P T$，因此，上式可改写为

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2C_P} \tag{1-8-2}$$

根据完全气体的等熵关系，于是可得到如下关于 P_0，ρ_0 与 a_0 的表达式

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{P}{P_0} \tag{1-8-3}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{1-8-4}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \tag{1-8-5}$$

式中，P_0，ρ_0 与 a_0 分别为滞止压强（又称总压），滞止密度与滞止声速；h_0 为滞止焓，又称总焓；T_0 为滞止温度，又称总温；而 P，ρ 与 T 分别称作静压、静密度与静温，这里“静”的含意是指站在与流体质点一起运动的坐标系上测量到的流体参数，也就是说当测量仪器随气流一起运动时所测流体的参数值。另外，注意到完全气体的定压比热 C_P 与比热比 γ 间的关系，以及马赫数的定义，则式（1-8-2）～式（1-8-5）分别可变为

$$\frac{T}{T_0} = \tau(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1} \tag{1-8-6}$$

$$\frac{P}{P_0} = \pi(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{1-8-7}$$



$$\frac{\rho}{\rho_0}=\varepsilon(M)=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \tag{1-8-8}$$

$$\frac{a}{a_0}=\alpha(M)=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1-8-9}$$

式中，$\tau(M),\pi(M),\varepsilon(M)$ 分别称作定比热情况下的温度函数，压强函数，密度函数。另外，将式（1－8－7）写为

$$\frac{P_0}{P}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{1-8-10}$$

借助于高等数学中的二项式级数展开，式（1－8－10）可展成如下级数

$$\frac{P_0}{P}=1+\frac{\gamma}{2}M^2+\frac{\gamma}{8}M^4+\frac{(2-\gamma)}{48}\gamma M^6+\cdots \tag{1-8-11}$$

注意到马赫数的定义后它又可变为

$$P_0=P+\frac{1}{2}\rho V^2(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{2-\gamma}{24}M^4+\cdots) \tag{1-8-12}$$

对于空气，取 $\gamma=1.4$，由式（1－8－12）得到可压缩空气的动压为

$$P_0-P=\frac{1}{2}\rho V^2\left(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{1}{40}M^4+\cdots\right) \tag{1-8-13}$$

对不可压缩流，则动压为

$$P_0-P=\frac{1}{2}\rho V^2 \tag{1-8-14}$$

从式（1－8－13）与式（1－8－14）的比较可以看出：当 $M\leqslant 0.3$ 时，忽略气体压缩引起的动压所产生的相对误差不超过 2.3%，因此工程上对 $M\leqslant 0.3$ 的流动完全可以作为不可压缩流动处理。

1.8.2　临界状态与临界参数

临界状态是流动速度 V 等于当地声速 a 的状态，也就是流动马赫数等于 1 的状态。与滞止状态一样，临界状态可能存在于真实流动之中，也可能是将某个真实状态通过一个假想等熵过程来达到临界状态。临界状态时的流动参数称为临界参数；出现临界状态的截面称为临界截面。对于完全气体，借助于上面的定义，并注意到所考查点处的静焓 h，流速 V 以及该点所对应的临界声速 a_* 应满足如下形式的能量方程，即

$$h+\frac{V^2}{2}=\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{a_*^2}{\gamma-1}+\frac{a_*^2}{2}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{a_*^2}{2} \tag{1-8-15}$$

将式（1-8-1）变为用a_0, a与V表达的式子，即

$$h+\frac{V^2}{2}=\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2 \qquad (1-8-16)$$

比较式（1-8-15）和式（1-8-16）两式便得到a_*与a_0间的关系式为

$$\left(\frac{a_*}{a_0}\right)^2=\frac{2}{\gamma+1} \qquad (1-8-17)$$

当然，上式也可借助于取$M=1$时代入（1-8-9）式得到。因此，借助于$M=1$时代入式（1-8-6）、式（1-8-7）与式（1-8-8）式便得到临界参数T_*, P_*, ρ_*与滞止参数T_0, P_0, ρ_0间的关系

$$\frac{T_*}{T_0}=\frac{2}{\gamma+1} \qquad (1-8-18)$$

$$\frac{P_*}{P_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (1-8-19)$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (1-8-20)$$

而a_*与T_0间的关系可由式（1-8-17）得到，即

$$a_*=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}RT_0} \qquad (1-8-21)$$

同滞止参数一样，临界状态参数可以是实际存在的（例如当气流的$M=1$时），也可以是借助于一个假想的等熵过程达到的。临界状态参数是点函数，在任意流动过程中的任何一点处流体都具有确定的临界状态参数。另外，还必须注意，声速和临界声速是两个不同的概念。声速是在气体所处状态下实际存在的，它的大小可由当地的静温确定；而临界声速是由该处的总温所确定，因此只有当气流的马赫数$M=1$时临界声速才实际存在。对于任意流动过程中的任一点处，都有确定的声速和与此对应的临界声速，并且只有在临界截面上，二者才相等。

1.8.3 速度系数

在气体动力学中，除了马赫数作为量纲为1的速度外，还可用另一个无量纲速度，它定义为气流速度与临界声速的比，称为速度系数，以λ表示，即

$$\lambda=\frac{V}{a_*} \qquad (1-8-22)$$



与 M 数相比，引用 λ 的好处之一是在绝能流动的流场中，临界声速 a_* 全场是常数，因此由 λ 值的大小便可直接判断出该点速度模的大小。另外，λ 数与 M 数间的关系是

$$\lambda=\frac{V}{a_*}=\frac{V}{a}\cdot\frac{a}{a_*}=M\left[\frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1-8-23}$$

或者

$$\lambda^2=\frac{M^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)}=\frac{\dfrac{\gamma+1}{2}M^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2} \tag{1-8-24}$$

$$M^2=\frac{\lambda^2}{1-\dfrac{\gamma-1}{2}(\lambda^2-1)}=\frac{\dfrac{2}{\gamma+1}\lambda^2}{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2} \tag{1-8-25}$$

由上式（1-8-24）和式（1-8-25）两式可知：$M<1$ 的亚声速流动对应着 $\lambda<1$；$M=1$ 的声速流对应着 $\lambda=1$；$M>1$ 的超声速流对应着 $\lambda>1$，因此也可用 λ 作为亚声速和超声速流动的判断标志。另外，当 $M\to\infty$ 时，λ 有最大值 $\sqrt{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}}$，所以有时用 λ 要比用 M 更加方便些。利用式（1-8-25）可方便地把气体动力学函数写成关于 λ 的函数

$$\frac{T}{T_0}=\tau(\lambda)=1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2 \tag{1-8-26}$$

$$\frac{P}{P_0}=\pi(\lambda)=\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{1-8-27}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\varepsilon(\lambda)=\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{1-8-28}$$

$$\frac{a}{a_0}=\alpha(\lambda)=\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1-8-29}$$

这里 $\tau(\lambda),\pi(\lambda)$ 和 $\varepsilon(\lambda)$ 分别称作定比热情况下的温度函数，压强函数和密度函数。

1.8.4　最大速度状态

速度达到最大，焓值为零时的状态称为最大速度状态，它同样是一种参考状态，可由某一个真实状态经过假想的等熵变化过程去达到。借助于上面的定义，则 V_{max} 与静参数之间的

关系为

$$h_0 = C_P T_0 = h + \frac{V^2}{2} = C_P T + \frac{V^2}{2} = \frac{V_{max}^2}{2} \tag{1-8-30}$$

因此

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\gamma R T_0} = a_* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{1-8-31}$$

注意，最大速度 V_{max} 仅仅是一个理论上的极限值，实际上是不可能达到的。由上式可以看出，对于确定的气体，V_{max} 只取决于总温 T_0；在绝能流动中，由于 T_0 为常数，因此 V_{max} 常被用作参考速度。

1.8.5 流量函数 $q(\lambda)$ 与 $q(M)$

在气动计算中，常常会遇到质量流量的计算问题。先引进流量函数 $q(\lambda)$ 或者 $q(M)$，即

$$q(\lambda) \equiv \frac{\rho V}{\rho_* a_*} = \frac{V}{a_*} \cdot \frac{\rho / \rho_0}{\rho_* / \rho_0} = \lambda \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \lambda^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \tag{1-8-32}$$

$$q(M) \equiv \frac{\rho V}{\rho_* a_*} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_*} \cdot \frac{V}{a} \cdot \frac{a}{a_0} \cdot \frac{a_0}{a_*} = \frac{M}{\left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 \right)^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}} \tag{1-8-33}$$

这里 ρV 称为比流量或密度，它表示单位时间内通过单位面积的质量流量。由上面两式可知，流量函数 q 是 λ 数（或者 M）的函数，对这个函数 $q(\lambda)$ 作数学分析：显然，当 $\lambda < 1$（即亚声速流动）时，比流量 ρV 随着 λ 数的增大而增加，此时速度的增加率大于密度的减小率；当 $\lambda > 1$（即超声速流动）时，情况刚好相反，ρV 随着 λ 的增大而减小。特别有意义的是，当 $\lambda = 1$（即流动达临界状态）时，比流量 ρV 值最大，即

$$\frac{dq(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \text{或者} \quad \frac{dq(M)}{dM} = 0 \tag{1-8-34}$$

由上式便可得到 $\lambda = 1$，或者 $M = 1$；类似的，也可以对函数 $q(M)$ 作上面的数学分析。图 1.2（a）与图 1.2（b）分别给出了流量函数随 M 与 λ 的变化关系曲线。从这两张图中可以清楚地看出：一个流量函数对应着两个马赫数 M（或速度系数 λ），其中一个是亚声速 M 数（或 λ 数），另一个是超声速 M 数（或 λ 数），应用时必须判断流动属于哪个范围，才能确定其对应的 M 数（或 λ 数）值。



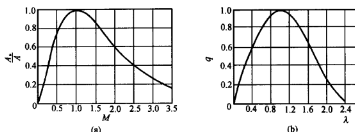


图 1.2　流量函数随 M 数（或 λ 数）的变化曲线

1.8.6　冲量函数

在用积分形式的动量方程作内流计算时经常会遇到（$P+\rho V^2$）的计算，这里 P,ρ 与 V 分别为压强，密度与速度矢量的模。借助于完全气体的假定及有关气动函数，便可很方便地得出如下表达式

$$P+\rho V^2=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho V a_*\left(\frac{1}{\lambda}+\lambda\right)=P_0\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)q(\lambda)\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (1-8-35)$$

令 $z(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 分别具有如下定义

$$z(\lambda)\equiv\lambda+\frac{1}{\lambda} \qquad (1-8-36)$$

$$f(\lambda)\equiv q(\lambda)z(\lambda)\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (1-8-37)$$

于是式（1－8－35）可写为

$$P+\rho V^2=P_0 f(\lambda) \qquad (1-8-38)$$

或者

$$f(\lambda)=\frac{P+\rho V^2}{P_0} \qquad (1-8-39)$$

这里 $f(\lambda)$ 称为冲量函数。

§1.9　几个重要的特殊方程

1.9.1　伯努利方程及广义伯努利方程

首先由运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}+\frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}-\nabla P) \tag{1-9-1}$$

出发（式中 $\boldsymbol{\Pi}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 分别代表粘性应力张量与单位质量上的彻体力），两边点乘 $\boldsymbol{V}$ 并注意到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{V})-\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi})=\phi\equiv\boldsymbol{\Pi}:\nabla\boldsymbol{V} \tag{1-9-2}$$

$$\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right) \tag{1-9-3}$$

以及连续方程与耗散函数 ϕ 的定义，则得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho}\left[\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{V})-\phi\right]-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial P}{\partial t}\right) \tag{1-9-4}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho}\left[\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{V})-\phi\right] \tag{1-9-5}$$

这就是粘性气体的广义伯努利（Bernoulli）方程，式中 V 为速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 的模。对于定常无粘流，在忽略了彻体力 $\boldsymbol{f}$ 后，则式（1-9-5）被简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0 \tag{1-9-6}$$

如果将上式沿流线进行空间积分，则得到

$$\frac{V^2}{2}+\int\frac{\mathrm{d}P}{\rho}=c(t) \tag{1-9-7}$$

式中，$c(t)$ 是积分常数，对于某一确定的时刻沿流线不变，但对于不同的流线，该常数一般可取不同值。

式（1-9-7）就是通常流体力学教科书上常给出的沿流线伯努利方程的形式。如果流体是正压的，即密度只是压强的函数，则这时可以引进压力函数 $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R}=\int\frac{\mathrm{d}P}{\rho} \tag{1-9-8}$$



则有

$$\nabla \Re = \frac{1}{\rho} \nabla P \tag{1-9-9}$$

于是定常、无粘、正压流体沿流线的伯努利方程（在忽略了彻体 $\boldsymbol{f}$ 后）为

$$\frac{V^2}{2} + \Re = c(t) \qquad \text{（沿流线）} \tag{1-9-10}$$

1.9.2　涡量输运方程及涡量场的空间特性

一、涡量场的空间特性

令 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{V}$，定义为涡量，为描述涡量场的空间特性，引入沿流线的正交自然坐标系：令沿流线方向的弧长为 S，单位切矢量为 $\boldsymbol{t}$，指向曲率中心的单位法矢（即主法矢）为 $\boldsymbol{n}$，并令沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的变量记为 n；而 $\boldsymbol{b}$ 为单位副法矢，即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$，相对应的这个方向的变量为 b；于是（$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$）便构成一组右手单位正交曲线标架。在这组标架中，速度 $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{t} = \{V,0,0\}$，涡量 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{t}\omega_S + \boldsymbol{n}\omega_n + \boldsymbol{b}\omega_b = \{\omega_S, \omega_n, \omega_b\}$，因此

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (V\boldsymbol{t}) = (\nabla V) \times \boldsymbol{t} + V(\nabla \times \boldsymbol{t}) \tag{1-9-11}$$

式中右边第一项即

$$(\nabla V) \times \boldsymbol{t} = \left(\boldsymbol{t}\frac{\partial V}{\partial S} + \boldsymbol{n}\frac{\partial V}{\partial n} + \boldsymbol{b}\frac{\partial V}{\partial b}\right) \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}\frac{\partial V}{\partial b} - \boldsymbol{b}\frac{\partial V}{\partial n} \tag{1-9-12}$$

上式用到了 Frenet-Serret 公式，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial S} = k_1 \boldsymbol{n} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial S} = -k_1 \boldsymbol{t} + k_2 \boldsymbol{b} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial S} = -k_2 \boldsymbol{n} \end{cases} \tag{1-9-13}$$

式中，k_1 为空间流线的曲率；k_2 为流线的挠率。又

$$\nabla \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} \times \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial S} + \boldsymbol{n} \times \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial n} + \boldsymbol{b} \times \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial b} = k_1 \boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{n} \times \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial n} + \boldsymbol{b} \times \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial b}\right) \tag{1-9-14}$$

容易证明

$$\boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{n} \times \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial n} + \boldsymbol{b} \times \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial b}\right) = 0 \tag{1-9-15}$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{n}\times\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial n}+\boldsymbol{b}\times\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial b}\right)=0 \tag{1-9-16}$$

因此可以令$\left(\boldsymbol{n}\times\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial n}+\boldsymbol{b}\times\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial b}\right)$等于$k_3\boldsymbol{t}$，这里$k_3$定义为

$$k_3\equiv\boldsymbol{t}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{t})=\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial n}-\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial b} \tag{1-9-17}$$

将式（1-9-12）与式（1-9-14）代入式（1-9-11）便有

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_S\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}\omega_n+\boldsymbol{b}\omega_b=k_3V\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}\frac{\partial V}{\partial b}+\left(k_1V-\frac{\partial V}{\partial n}\right)\boldsymbol{b} \tag{1-9-18}$$

另外，螺旋量$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{V}$与Lamb矢量$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}$也很容易得到，它们的表达式为

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{V}=k_3V^2 \tag{1-9-19}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}=\left(k_1V^2-V\frac{\partial V}{\partial n}\right)\boldsymbol{n}-\left(V\frac{\partial V}{\partial b}\right)\boldsymbol{b} \tag{1-9-20}$$

二、涡量输运方程

涡量与胀量的输运方程，已有式（1-4-72）与式（1-4-74）给出。注意到

$$(\nabla S)\times(\nabla T)=\nabla\times\left(\frac{\nabla P}{\rho}\right)=-\frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho)\times(\nabla P) \tag{1-9-21}$$

注意上式中的S代表熵。于是式（1-4-72）变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{V})+\theta\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{f}+\frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho)\times(\nabla P)+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{1-9-22}$$

式中，$\theta\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{V}$。如果流体是正压的，则

$$(\nabla\rho)\times(\nabla P)=0 \tag{1-9-23}$$

因此，正压、无粘流体时（1-9-22）式简化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{V})+\theta\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{f} \tag{1-9-24}$$

如果再假定彻体力$\boldsymbol{f}$有势，则式（1-9-24）又可进一步简化为Helmholtz方程，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{V})+\theta\boldsymbol{\omega}=0$$

这个方程的最大优点是方程中不出现压强、彻体力与密度，而只包含速度$\boldsymbol{V}$与涡量。显然，这个方程可以同时适用于可压缩流体与不可压缩流体。



1.9.3　Kelvin 定理和 Crocco 方程

一、Kelvin 定理

取封闭流体线 $c(t)$，计算这条闭流体线的速度环量对时间的变化率，即

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{c(t)}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{c}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\right]=\oint_{c}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)+\oint_{c}\mathrm{d}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\oint_{c}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right) \tag{1-9-25}$$

又

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{1-9-26}$$

如果流动无粘、彻体力（或称体积力、质量力）$\boldsymbol{f}$ 有势，且流体正压，则存在着压力函数 $\mathfrak{R}$ 与体积力的势函数 U，使

$$\boldsymbol{f}=-\nabla U \tag{1-9-27}$$

$$\nabla P/\rho=\nabla\mathfrak{R} \tag{1-9-28}$$

成立，于是这时式（1-9-26）简化为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t=-\nabla U-\nabla\mathfrak{R} \tag{1-9-29}$$

将式（1-9-29）代入式（1-9-25）得

$$\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t=-\oint_{c}[\nabla U+\nabla\mathfrak{R}]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\oint_{c}\mathrm{d}(U+\mathfrak{R})=0 \tag{1-9-30}$$

也就是说，在体积力有势，流体正压的条件下，理想流体沿任一条封闭流体线的速度环量不随时间变化，这就是惯性坐标系中的 Kelvin（凯尔文）定理。

二、速度环量和旋度的关系

由 Stokes 公式，对于连续的流动有

$$\Gamma=\oint_{c}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_{\sigma}(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \tag{1-9-31}$$

式中，σ 是以曲线 c 为周界的任意开口曲面；$\boldsymbol{n}$ 是曲面 σ 的单位法矢量；$(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$ 是旋度在微元曲面 $\mathrm{d}\sigma$ 上的通量，又称涡通量。式（1-9-31）表明，沿封闭曲线 c 所取的速度环量等于通过以该封闭曲线为界的任意开口曲面的涡通量。

三、Crocco 方程

无粘流的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{1-9-32}$$

由热力学第一、第二定律可得到焓与熵间的关系式为

$$TdS = dh - \frac{1}{\rho}dP \tag{1-9-33}$$

式中，S,h,T 与 P 分别为熵、焓、温度与压强。注意到

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) \tag{1-9-34}$$

将式（1－9－33）与式（1－9－34）代入到式（1－9－32）后得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} - \boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) = T\nabla S - \nabla h_0 \tag{1-9-35}$$

式中，$h_0 = h + \frac{1}{2}V^2$，可将它称为总焓。式（1－9－35）称为克罗柯（Crocco）方程。如果流动定常且全场均能，即 $h + \frac{V^2}{2} = \mathrm{const}$，那么式（1－9－35）被简化为

$$\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) = -T\nabla S \tag{1-9-36}$$

由此可得到如下结论：如果流场无粘、定常、均能、均熵，那么该流场为无旋场；反之，当来自均匀流场的气流通过曲线激波后，流线之间的熵值不再相等，也就是说，流场是非均熵的，于是那里的流场必然是有旋的。注意，这里所说的均能、均熵在概念上有别于等能、等熵。前者是从当地观点出发，指流场各处的能量相等和熵值相等；后者是从随体观点出发，指流体质点的能量和熵值沿迹线不变。

1.9.4 流函数方程和势函数方程

对于定常、无粘、三维流动，可引进两个流函数 ψ_1 与 ψ_2 使

$$\rho\mathbf{V} = (\nabla\psi_1)\times(\nabla\psi_2) = \rho v^k \boldsymbol{e}_k \tag{1-9-37}$$

成立，这里 v^k 为速度 $\boldsymbol{V}$ 的逆变分速度，显然这时它满足

$$v^1 = \frac{1}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(x^2,x^3)} \tag{1-9-38}$$

$$v^2 = \frac{1}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(x^3,x^1)} \tag{1-9-39}$$

$$v^3 = \frac{1}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(x^1,x^2)} \tag{1-9-40}$$

式中，$(x^1,x,^2 x^3)$ 为任意曲线坐标系，$\sqrt{g} = \boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)$，$\boldsymbol{e}_i$ 为 $(x^1,x,^2 x^3)$ 的基矢量。因此式



（1－9－37）自动满足连续方程。对于二维定常、无粘流动，不妨这时令 $\psi_1=\psi_1(x^1,x^2)=\psi(x,y)$，$\psi_2=\psi_2(x^3)$，于是在直角坐标系（$x,y$）中，式（1－9－37）被简化为

$$\rho \boldsymbol{V}=\rho u \boldsymbol{i}+\rho v \boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\boldsymbol{j}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1-9-41}$$

这里式中取 $\partial \psi_2/\partial z=1$；于是推出

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \psi}{\partial y}=\rho u\\[2mm] \dfrac{\partial \psi}{\partial x}=-\rho v\end{cases} \tag{1-9-42}$$

如果流线为空间曲线，不妨令沿线方向的弧长为 l，它的单位切矢量为 $\boldsymbol{t}$，流线的单位主法矢量为 $\boldsymbol{n}$，而副法矢量为 $\boldsymbol{b}$，这里 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ 构成右手系，并用式（1－9－13）给出的 Frenet-Serret 公式。对于无粘、定常三维流动，则沿 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向的运动方程为

$\boldsymbol{t}$ 方向
$$\rho V\frac{\partial V}{\partial l}=-\frac{\partial P}{\partial l} \tag{1-9-43}$$

$\boldsymbol{n}$ 方向
$$\rho V\frac{\partial V_n}{\partial l}=-\frac{\partial P}{\partial n} \tag{1-9-44}$$

并且有
$$\boldsymbol{V}=V_l\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}V_n+\boldsymbol{b}V_b=V\boldsymbol{t} \tag{1-9-45}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial l}=V\frac{\partial \theta}{\partial l}=Vk_1 \tag{1-9-46}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial n}=V\frac{\partial \theta}{\partial n} \tag{1-9-47}$$

这里 k_1 为流线的曲率，它是由沿流线角度 θ 的变化率来决定的，即 $\dfrac{\partial \theta}{\partial l}=k_1$；另外，流函数在 l 与 n 方向上的变化率分别为

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}=\rho V \tag{1-9-48a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial l}=-\rho V_n=0 \tag{1-9-48b}$$

对于流线为平面曲线时，其连续方程可写为

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial l}+\rho V\frac{\partial \theta}{\partial n}=0 \tag{1-9-49}$$

注意到

$$V\frac{\partial}{\partial n}=u\frac{\partial}{\partial y}-v\frac{\partial}{\partial x} \tag{1-9-50}$$

$$V\frac{\partial}{\partial l}=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y} \tag{1-9-51}$$

$$V^2=u^2+v^2 \tag{1-9-52}$$

容易证明有如下几个关系式成立

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \tag{1-9-53}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}=\frac{u^2}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{2uv}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\frac{v^2}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial(\rho V)}{\partial n} \tag{1-9-54}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2}=\frac{u^2}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2uv}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\frac{v^2}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \tag{1-9-55}$$

如果流动是无旋的，即

$$\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\theta}{\partial l}=0 \tag{1-9-56}$$

则由式（1-9-48a）与式（1-9-48b）有

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}=\frac{\partial(\rho V)}{\partial n}=M^2\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2}+\rho\frac{\partial V}{\partial n} \tag{1-9-57}$$

将式（1-9-56）代入上式消去 $\partial V/\partial n$ 并注意到式（1-9-46），得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}=\left(M^2-1\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2} \tag{1-9-58}$$

于是上式可变为

$$\left(M^2-1\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)-M^2\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}=0 \tag{1-9-59}$$

将式（1-9-53）与式（1-9-54）代入到式（1-9-59）便得到二维、定常、无粘、无旋流动下的流函数方程

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{1-9-60}$$

对于定常、无粘、可压缩绝热流动的流体，由连续性方程，有

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho=-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{1-9-61}$$

将声速方程两边点乘 $\boldsymbol{V}$ 得到



$$V \cdot \nabla P = a^2 (V \cdot \nabla) \rho \tag{1-9-62}$$

将式（1－9－61）代入式（1－9－62）消去密度项后得

$$V \cdot \nabla P = -a^2 \rho \nabla \cdot V \tag{1-9-63}$$

对于理想气体，忽略彻体力时的葛罗米柯（И.С.Громеко）或者 Lamb 型的运动方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - V \times (\nabla \times V) = -\nabla P \tag{1-9-64}$$

如果流动是定常无旋的，则上式简化为

$$\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{1-9-65}$$

将上式两边点乘速度 V 后得

$$(V \cdot \nabla) P + \rho (V \cdot \nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{1-9-66}$$

由式（1－9－63）与式（1－9－66）中消去压力项后得到

$$(V \cdot \nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right) - a^2 \nabla \cdot V = 0 \tag{1-9-67}$$

方程式（1－9－67）在许多教科书中被称作气体动力学的基本方程。将该式在直角坐标系中展开并加以整理得

$$\begin{gathered}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{uv}{a^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \\ \frac{uw}{a^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{vw}{a^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0\end{gathered} \tag{1-9-68}$$

无旋流场必然存在速度势 $\varphi(x, y, z)$，其定义为

$$V = \nabla\varphi = ui + vj + wk \tag{1-9-69}$$

于是式（1－9－68）变为

$$\begin{gathered}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{2uv}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \\ \frac{2uw}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{2vw}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0\end{gathered} \tag{1-9-70}$$

它是一个典型的非线性二阶偏微分方程，这是由于该方程各项系数含有 u, v, w，它们也是 φ 的函数，而且声速 a 也是关于 φ 的函数。对于不可压缩无旋流动，这时可认为 $a \to \infty$，因此式（1－9－70）简化为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{1-9-71}$$

这就是大家熟知的拉普拉斯方程。

在结束本节讨论之前，还想以二维流动为例，采用流线坐标系 (l,n) 给出一些有益的结果：引入势函数 φ，即 $\nabla\varphi=\boldsymbol{V}$，并且有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=V,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}=V_n=0 \tag{1-9-72}$$

在这个坐标系下，速度 $\boldsymbol{V}$ 的散度变为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial V}{\partial l}+V\frac{\partial\theta}{\partial n}=M^2\frac{\partial V}{\partial l}=M^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial l^2} \tag{1-9-73}$$

式中，θ 的定义同式（1－9－47）；仿照流函数方法中式（1－9－58）的推导过程，对势函数 φ 也有类似关系式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}=(M^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial l^2} \tag{1-9-74}$$

也可写为

$$(1-M^2)\frac{\partial V}{\partial l}+V\frac{\partial\theta}{\partial n}=0 \tag{1-9-75}$$

方程式（1－9－74）是二维、定常、无粘、无旋流动下采用流线坐标 (l,n) 时的势函数方程。显然它与式（1－9－70）是等价的，但这里的表达更为简捷，在讨论偏微分方程判型问题时更为方便。

1.9.5 运动介质中的声学方程

经典声学中都假定声源传播的介质是静止的，并且还假定声波是在粘性不起主要作用的流体中传播，所以认为介质流体是无粘的且不计热量耗散，因此经典声学多研究线性声学问题，并着重研究小振幅声波的传播规律。随着现代科技的发展，非线性声学已日益显示其重要性。例如现代强力喷气发动机以及其他强功率机器发出声音的声压级可达 160～180 dB（分贝），甚至更大。如果以 180 dB 为例，它相当于 $2.8\times10^4\ \mathrm{N/m^2}$ 的声压振幅值，其相应的质点速度幅值为 67 m/s，显然它不属于小振幅的范围。另外，大量的实验与研究表明：有限振幅声波在介质中传播时介质的粘性以及声波传播中所导致的热传导吸收等直接影响着声波的吸收系数。甚至在流体力学研究中经常采用的容积粘性系数 $\mu'=0$ 的 Stokes 假定，在许多非线性声学问题中已不再继续有效。声雷诺数的概念已在现代气动声学中采用，并且运动介质中声的传播问题已引起人们重视，气动声学已成为现代气体动力学课程内容的一部分。



一、广义动量通量密度张量及 Lighthill 方程

声音是一种弹性波，凡是具有弹性的介质如空气、液体、固体都可以传递声波。声波的传递过程必然会引起介质中压强的交替变化，这个交变的压强叫声压；声波也造成介质质点的振荡，若质点振荡的方向顺着声波传播的方向则这种波叫纵波；若质点振荡方向与声波传播的方向垂直，则称为横波。显然，声波是靠介质的压缩和膨胀传递信息，因此属于纵波，又称作胀缩波；靠剪切应力传递信息的属于横波，又称作切变波。

莱特希尔（Lighthill）方程是从流体力学基本方程组导出的。由流体力学基础知道，对于有源非定常流动，其连续方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=\rho q_0 \tag{1-9-76}$$

式中，q_0 为源（或汇）强度。

运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{V})+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V})=\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}-\nabla P \tag{1-4-40}$$

将（1-4-40）式两边取散度后并用式（1-9-76）消去 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})$ 项，得

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\frac{\partial(\rho q_0)}{\partial t}+\nabla\cdot[\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V})-\nabla\cdot\Pi+\nabla P-\rho\boldsymbol{f}] \tag{1-9-77}$$

在式（1-9-77）两边减去 $\nabla^2(a_1^2\rho)$ 后得

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\nabla^2(a_1^2\rho)=\frac{\partial(\rho q_0)}{\partial t}+\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{f}) \tag{1-9-78}$$

式中，a_1 是某一参考声速；$\boldsymbol{T}$ 为广义动量通量密度张量，其表达式为

$$\boldsymbol{T}\equiv\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{\Pi}+(P-a_1^2\rho)\boldsymbol{I} \tag{1-9-79}$$

这里 $\boldsymbol{\Pi}$，ρ 与 P 分别为粘性应力张量、密度与压强；$\boldsymbol{I}$ 为单位张量。显然，如若略去粘性应力张量，则式（1-9-79）便简化为 $\boldsymbol{T}_1$，其表达式为

$$\boldsymbol{T}_1\equiv\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+(P-a_1^2\rho)\boldsymbol{I} \tag{1-9-80}$$

相应的式（1-9-78）可简化为

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\nabla^2(a_1^2\rho)=\frac{\partial(\rho q_0)}{\partial t}+\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}_1)-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{f}) \tag{1-9-81}$$

上式是近代声学中重要的方程之一。声音是一种振荡，声学更多的是着眼于脉动声压的传播。应该指出式（1-9-80）给出的应力张量项，在近场中既含有流动项，又含有稳定的和脉动的压强，以及它们之间的复杂相互作用。因此，它们并非全部都是真正的物理声源，只有部分能够转化为声能。声学更关心远场，即近场脉动压强中能够向远场传播的部分，或者说能

够转化为声能的部分。

二、考虑各种粘性系数的运动方程

在声学研究中，由于频散、色散现象的出现和弛豫过程的研究，有时除考虑介质流体的剪切粘性系数μ（在流体力学教科书中通常称动力粘性系数）外，还要考虑体粘系数（又称第二粘性系数）μ_V与转动粘性系数μ_r的影响。这时运动方程可写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{f}-\nabla P+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+\nabla\left[\left(\frac{1}{3}\mu+\mu_V\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\right]-(\nabla\mu)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+\mu_r\nabla\times(2\boldsymbol{\omega}-\nabla\times\boldsymbol{V}) \quad (1-9-82)$$

式中，ω为平均转动角速度（而不是涡量）。由于弛豫时间一般来说很短，在长时间内ω与$(\nabla\times\boldsymbol{V})/2$实际上是相等的，因此在有些时候可以忽略式（1－9－82）右端最后一项，这时便得到了 N–S 方程最常见的形式

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{f}-\nabla P+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+\nabla\left[\left(\frac{1}{3}\mu+\mu_V\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\right]-(\nabla\mu)(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \quad (1-9-83)$$

如果假设 μ与μ_V不是空间坐标的函数，则式（1－9－83）又可简化为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{f}-\nabla P+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+\left(\frac{1}{3}\mu+\mu_V\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \quad (1-9-84)$$

这里，粘性应力张量$\boldsymbol{\Pi}$为

$$\boldsymbol{\Pi}=\mu\left[\nabla\boldsymbol{V}+(\nabla\boldsymbol{V})_c\right]+\left(\mu_V-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I} \quad (1-9-85)$$

三、定常流动背景下的声学方程

如果背景流场不是静止的而是定常的、无粘的，令其流动参数为P_1、ρ_1、$\boldsymbol{V}_1$、a_1，它们都不是时间的函数。设外界有某种扰动，造成流场变化为P'、ρ'与$\boldsymbol{V}'$，即扰动后的参数为$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}'$，$\rho=\rho_1+\rho'$，$P=P_1+P'$；为讨论简单起见，假设不存在交变的质量源。背景参数满足

$$\nabla\cdot(\rho_1\boldsymbol{V}_1)=0 \quad (1-9-86)$$

$$\nabla\cdot(\rho_1\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1)=\rho_1\boldsymbol{f}-\nabla P_1 \quad (1-9-87)$$

当然扰动后的 P，ρ与 $\boldsymbol{V}$ 满足式（1－9－81），于是将式（1－9－81）减去式（1－9－87）后得到关于扰动量的线性控制方程

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a_1^2\nabla^2\rho'=\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}')-\nabla\cdot(\rho'\boldsymbol{f}) \quad (1-9-88)$$

式中

$$\boldsymbol{T}'\equiv\rho_1\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}'+\rho_1\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}_1+\rho'\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1+(P'-a_1^2\rho')\boldsymbol{I} \quad (1-9-89)$$

显然式（1－9－88）是线性化的非定常无粘气体动力学方程，同时也是定常流动背景下的声



学方程。如果背景流场是静止的，即 $\boldsymbol{V}_1=0$，并且还略去 $\nabla\cdot(\rho'\boldsymbol{f})$ 项时，于是式（1-9-88）简化为

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a_1^2\nabla^2\rho'=0 \qquad (1-9-90)$$

这就是普通理论声学[96]中广为讨论的声传播方程（又称声波动方程）。

1.9.6　定常可压缩流动中速度、压强与马赫数间的关系

对于定常无粘流，由式（1-9-6）得速度沿流线的变化规律是

$$V\,\mathrm{d}V+\frac{1}{\rho}\mathrm{d}P=0 \qquad (1-9-91)$$

这里 $\mathrm{d}V$ 和 $\mathrm{d}P$ 是沿流线微元长度上速度和压强的变化。当压强改变时，声速也将发生变化，其关系式为

$$\mathrm{d}P=\left(\partial P/\partial a^2\right)_s\mathrm{d}a^2 \qquad (1-9-92)$$

由热力学可知，声速也可由下式给出

$$a^2=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s=-v^2\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_s=-\frac{v^2}{\left(\partial v/\partial P\right)_s} \qquad (1-9-93)$$

将上式对 P 求导数，并注意引进基本气动导数 Γ，于是得到

$$\left(\partial a^2/\partial P\right)_s=2v[\Gamma-1] \qquad (1-9-94)$$

式中，Γ 定义为

$$\Gamma\equiv\frac{a^4}{2v^3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial P^2}\right)_s \qquad (1-9-95)$$

注意上面三个式子中 $v=1/\rho$，它为比容；应用式（1-9-94）与式（1-9-92），则式（1-9-91）变为

$$V\,\mathrm{d}V+\frac{a}{\Gamma-1}\mathrm{d}a=0 \qquad (1-9-96)$$

由马赫数定义 $M=V/a$ 可得到

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{\mathrm{d}V}{V}-\frac{\mathrm{d}a}{a} \qquad (1-9-97)$$

由式（1-9-96）与式（1-9-97）消去 $\mathrm{d}a$ 项便得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{1}{1+(\Gamma-1)M^2}\frac{\mathrm{d}M}{M} \tag{1-9-98}$$

这个式子表明：在 $\Gamma\geqslant1$ 时，马赫数将随着流体速度的增加而单调地增加，这个结论非常重要。对于基本气动导数 Γ，还可以得到如下两种表达形式，即

$$\Gamma=\frac{v^3}{2a^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_S=\frac{1}{a}\left[\frac{\partial(\rho a)}{\partial\rho}\right]_S \tag{1-9-99}$$

式中，(ρa) 称作声阻抗。作为特例，对于完全气体，则这时 $\Gamma=\frac{\gamma+1}{2}$；对于定常无粘流动，沿任一条给定流线则有

$$h+\frac{V^2}{2}=h_0=\text{const} \tag{1-9-100}$$

式中，h_0 为滞止焓。式（1-9-100）就是沿流线的能量方程，它还可以写成

$$\frac{h_0-h}{a^2}=\frac{M^2}{2} \tag{1-9-101}$$

将 $(h-h_0)$ 与 $(a^2-a_0^2)$ 均展开为 $(P-P_0)$ 的 Tayloy（泰勒）级数即

$$h-h_0=\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_S(\Delta P)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial P^2}\right)_S(\Delta P)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial P^3}\right)_S(\Delta P)^3+\cdots$$

$$a^2-a_0^2=\left(\frac{\partial a^2}{\partial P}\right)_S(\Delta P)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a^2}{\partial P^2}\right)_S(\Delta P)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 a^2}{\partial P^3}\right)_S(\Delta P)^3+\cdots$$

式中，$\Delta P=P-P_0$，将上面两式代入到式（1-9-101）并适当整理后可得到[97]

$$P_0-P=\frac{1}{2}\rho_0V^2\left[1-\frac{1}{4}M^2+\frac{1}{24}(4\Gamma-3)M^4-\cdots\right] \tag{1-9-102}$$

这就是沿流线伯努利方程的另一种表达形式，显然它与式（1-9-7）相比，更多地突出了流体的可压缩性。

1.9.7 完全气体、多方气体及正压流体的数学描述

一、完全气体的数学描述

这里，首先对气体状态方程所采用的几种模型略作一点总结。从热力学来讲，对于一个均匀的热力学系统，状态方程只存在两种类型：一种是热状态方程 $P=P(\rho^{-1},T)$；一种是量热（caloric）状态方程 $e=e(\rho^{-1},T)$，这里 e 为内能。上面这两个关系式并不彼此独立，下面



推出其制约关系。

对量热状态方程作微分

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv$$

这里 $v = \rho^{-1}$；将上式代入到式（1－5－8）中并整理后可得到

$$ds = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T + \frac{P}{T}\right]dv \tag{1-9-103}$$

因熵是状态量，可写为 $s = s(T,v)$，即

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv$$

比较上面两式，并注意到数学上二次偏导数应相等的条件得

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P \tag{1-9-104}$$

这个方程就是两种类型状态方程间的制约关系（又称相关方程，或称 Maxwell 关系式）。显然将式（1－9－104）代入到式（1－9－103）中便得到式（1－5－23）。

在气体动力学中，通常不讨论一般形式的热状态方程，而是局限于热完全气体，它满足 Clapeyron 方程即

$$P = RT\rho = RT/v \tag{1-9-105}$$

将式（1－9－105）代入到相关方程式（1－9－104）便得到 $(\partial e/\partial v)_T = 0$，因此对热完全气体，有

$$e = e(T) \tag{1-9-106}$$

这种气体没有分子内聚力，不能凝聚成液体或固体（在有限温度范围内，热完全气体不出现临界点）。相反，如果量热状态方程是 $e = e(T)$ 的话，那么量热状态方程必须满足式（1－9－104），便可以得到

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P = 0$$

积分上式便得到

$$P = \left(\frac{RT}{v}\right)g(v) \tag{1-9-107}$$

式中，$g(v)$ 是任一个积分函数。归纳一下，将式（1－9－104）用于上面所说的两类状态方程便有如下两种相应的结果，即

$$P = RT/v \Rightarrow e = e(T) \quad \text{（对于热状态方程）}$$

和
$$e = e(T) \Rightarrow P = \left(\frac{RT}{v}\right)g(v) \quad \text{（对于量热状态方程）}$$

现引进以 $h = e + Pv = e + (P/\rho)$ 所定义焓的定义，于是对于热完全气体来说，这时焓为

$$h = e(T) + RT = h(T) = \int_{T_0}^{T} c_p \, \mathrm{d}T + h_0 \tag{1-9-108}$$

而
$$e = e(T) = \int_{T_0}^{T} c_v \, \mathrm{d}T + e_0 \tag{1-9-109}$$

这时 e，h 只与 T 有关，而且它们的导数也只相差一个气体常数，即

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}T} + R \tag{1-9-110}$$

由式（1－9－108）与式（1－9－109）可以表明：热完全气体的内能 e 和焓 h 都仅是温度的函数，它们与其他参数无关。这时气体的定压比热、定容比热和比热比也都是温度的函数[98]。显然，如果用

$$e = (\text{常数}) \cdot T \tag{1-9-111}$$

去定义一种量热完全气体的话，会使气体动力学所研究的问题进一步简化。在这种情况下，由式（1－9－110）有

$$h = (\text{常数} + R) \cdot T \tag{1-9-112}$$

现在可以给量热完全气体下定义了，它是比热（包括 c_v 与 c_p）与比热比 γ 都为常数的热完全气体。对于量热完全气体来说，有

$$\left.\begin{aligned} e &= c_v T \\ h &= c_p T \\ P &= \rho R T \end{aligned}\right\} \tag{1-9-113}$$

也就是说，对于量热完全气体来讲，式（1－9－107）被简化为 Clapeyron 方程，即相当于任意积分函数 $g(v) = 1$；必须注意，热完全气体不一定就是量热完全气体；但是，凡是量热完全气体的，它必定是热完全气体。在本书中，量热完全气体（Thermally perfect gas）又常简称为完全气体。显然，对于完全气体有

$$\frac{s}{R} = \ln\left[\frac{T^{1/(\gamma-1)}}{\rho}\right] + \text{常数}$$

或者
$$P = \left(\frac{P_1}{\rho_1^{\gamma}}\right)\rho^{\gamma} \exp\left[\frac{S - S_1}{c_v}\right] \tag{1-9-114}$$



二、多方气体及正压流体的数学描述

从气体的热状态方程 $P=P(v,s)$ 出发（这里 v 与 s 分别代表气体的比容与熵），仿照量热完全气体的推导过程，在推导中仍然假定比热容（c_v，c_p）与比热比 γ 都为常数以及气体为热完全气体，则可得到

$$P=B(s)\rho^{\gamma} \tag{1-9-115}$$

式中，$B(s)=(\gamma-1)\exp\left(\dfrac{s-s_0}{c_v}\right)$，这里 s_0 是一个适当的常数[99, 18]，γ为比热比。

比较式（1-9-115）与式（1-9-114）可以发现：两者在确定熵值时略有不同。在气体动力学许多专业文献中，还特别将式（1-9-115）所定义的气体称为多方气体（Polytropic gas）。对于多方气体，除满足式（1-9-115）外还有式（1-9-116）成立，即

$$\left.\begin{aligned} e&=\frac{B(s)}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=c_vT \\ a^2&=B(s)\gamma\rho^{\gamma-1}=\gamma RT \\ RT&=B(s)\rho^{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \tag{1-9-116}$$

式中，a 代表气体的当地声速；$B(s)$ 是关于熵的函数，它的定义同（1-9-115）式，即

$$B(s)=(\gamma-1)\exp\left(\frac{s-s_0}{c_v}\right) \tag{1-9-117}$$

对于正压流体，则认为密度只是压强的函数并且与其他的热力学变数（例如温度、湿度）无关。从数学上讲，正压流体一定存在一个力势函数 Π（常称作压力函数），使

$$\nabla\Pi=\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{1-9-118}$$

成立；也就是说，$\Pi=\int_L \mathrm{d}P/\rho$ 与积分曲线 L 无关；换句话说，$\mathrm{d}P/\rho$ 应该是 Π 的全微分。

参 考 文 献

1　Tsien H S (钱学森). Similarity laws of hypersonic flows. J. of Math. and Phys. 1946, 25: 247～251

2　von Karman T. From low speed aerodynamics to astronautics. Oxford: Pergamon Press, 1963

3　Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol.2. New York: Interscience, 1989

4　Mises von R. Mathematical theory of compressible fluid flow. New York: Academic Press, 1958

5　Landau L D, Lifshitz M E. Fluid mechanics. New York: Pergamon, 1959

6　冯康. 数值计算方法. 北京：国防工业出版社，1978

7　Anderson J D. Computational fluid dynamics (the basics with applications). New York: McGraw-Hill, 1995

8 陈懋章. 压气机气动力学发展的一些问题. 航空学报，1985. 6(5): 405～410
9 Wesseling P. Principles of computational fluid dynamics. New York: Springer, 2001
10 Durand W F. Aerodynamic theory. Berlin: Springer, 1935
11 Lamb H. Hydrodynamics. New York: The Macmillan Company, 1932
12 Prandtl L, Tietjens O G. Fundamentals of hydro and aeromechanics. New York: McGraw Hill, 1934
13 Goldstein S. Modern developments in fluid dynamics. London: Oxford University Press, 1938
14 Keller C, Marks L S. The theory and performance of axial flow fans. New York: McGraw Hill, 1937
15 Spannhake W. Centrifugal pumps, turbines, and propellers. Cambridge: MIT the Technology Press, 1934
16 普朗特 L. 流体力学概论. 郭永怀等译. 北京：科学出版社，1987
17 Tsien H S (钱学森). Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids. J. of Aeronaut Sci, 1939, 6: 399～407
18 Courant R, Friedrichs K O. Supersonic flow and shock waves. New York: Interscience, 1948
19 Liepmann H W, Puckett A E. Introduction to aerodynamics of a compressible fluid. New York: John Wiley & Sons Inc., 1947
20 Ferri A. Elements of aerodynamics of supersonic flows. New York: the Macmillan Co., 1949
21 Shapiro A H. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. New York: The Ronald Press, 1953
22 Howarth L. Modern developments in fluid dynamics-high speed flow. London: Oxford Univ. Press, 1953
23 朗道，栗弗席兹. 连续介质力学. 彭旭麟译. 北京：人民教育出版社，1958
24 洛强斯基. 液体与气体力学. 林鸿荪，张炳煊等译. 北京：高等教育出版社，1957
25 阿尔然尼可夫，马尼采夫. 空气动力学. 张炳暄等译. 北京：高等教育出版社，1954
26 库赫曼 D，维贝尔 J. 航空发动机空气动力学. 张玉良译. 北京：国防工业出版社，1959
27 杰依奇. 工程气体动力学. 徐华舫译. 北京：燃料工业出版社，1955
28 柯钦. 叶栅的流体动力学理论. 北京：科学出版社，1958
29 阿勃拉莫维奇. 实用气体动力学. 北京：高等教育出版社，1955
30 斯捷金. 喷气发动机原理. 北京：国防工业出版社，1961
31 普罗斯库拉. 涡轮机流体动力学. 王适存译. 北京：中国工业出版社，1964
32 鲍里先柯. 发动机气体动力学. 李正荣，王甲升等译. 北京：国防工业出版社，1966
33 哈洛克. 轴流式压气机（流体力学与热力学）. 张文清译. 北京：国防工业出版社，1966
34 Vavra M H. Aero-thermodymics and flow in turbomachines. New York: Robert E. Krieger Publishing Company, 1960
35 Wu C H (吴仲华), Wolfenstein L. Application of radial equilibrium condition to axial-flow compressor and turbine design. NACA Rep. No. 955, 1950
36 Wu Chung Hua. General theory of fluid flow with subsonic or supersonic velocity in turbomachines of



arbitrary hub and casing shapes. NACA TN 2302, 1951

37 Wu Chung Hua. A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed flow types. NACA TN 2604, 1952

38 Wu Chung Hua. Three-dimensional turbomachine flow equations expressed with respect to non-orthogonal curvilinear coordinates and methods of solution. Proceeding of the 3rd International Symposium on Air-Breathing Engines, 1976, 233～252

39 Donaldson C, Summerfield M, Charyk J V. High speed aerodynamics and jet propulsion. New Jersey: Princeton University Press, 1954～1964

40 Howarth L. Modern developments in fluid dynamics-high speed flow. London: Oxford Univ. Press, 1953

41 Oswatitsch K. Gas dynamics. New York: Academic Press, 1956

42 Ferrari C, Tricomi F G. Transonic aerodynamics. New York: Academic Press, 1968

43 Anderson J D. Hypersonic and high temperature gas dynamics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1989

44 Hayes W D, Probstein R F. Hypersonic flow theory. New York: Academic Press, 1959

45 ЧерныйГ.Г. Течения газа с болъшой сверхзвуковой скоростъю. Москва:Физматгив, 1959

46 Devienne F M. Rarefied gas dynamics. New York: Pergamon Press, 1960

47 Dorrance W H. Viscous hypersonic flow. New York: McGraw-Hill Book Company, 1962

48 Capman S, Cowling T G. The mathematical theory of non-uniform gases. London: Cambridge University Press, 1952

49 ЗельдовичЯБ, РайзерЮП. Физика ударных волн ивысокотемперамуных гидродинамических явлений. Москва: Hayka, 1966

50 Stone H W. 21st century space transportation system design approach: HL-20 personnel launch system. J. of Spacecraft and Rockets, 1993, 30(5): 521～528

51 Naftel J C, Talay T A. Ascent abort capability for the HL-20. J. of Spacecraft and Rockets, 1993, 30(5): 628～634

52 Magnus R, Gallaher, Yoshihara H. Inviscid transonic flow over airfoils. AIAA J. 1970, 8: 2157～2162

53 Murman E M, Cole J D. Calculation of plane steady transonic flows. AIAA J. 1971, 9: 114～121

54 Ballhaus W F, Steger J L. Implicit approximate factorization scheme for the low-frequency transonic equation. 1975, NASA TM X-73082

55 Beam R M, Warming R F. An implicit finite-difference algorithms for hyperbolic systems in conservation-law form, J. of Computational Physics, 1976, 22: 87～110

56 MacCormack R W. Current status of numerical solutions of the Navier-Stokes equations. 1985, AIAA

Paper 85～0032

57 Jameson A, Turkel E. Implicit schemes and LU decompositions. Math. Comp., 1981, 37(156): 385～397

58 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation law. J. Comput, Phys., 1983, 49: 357～393

59 吴文权，刘翠娥．使用非正交曲线坐标与速度分量 S_1 流面正问题流场矩阵解．工程热物理学报，1980, 1(1): 17～27

60 朱荣国．使用非正交曲线坐标与速度分量 S_2 流面反问题流场线松弛法．工程热物理学报，1980, 1(1): 28～35

61 Wu Chung-Hua, Wang Bao Guo(吴仲华，王保国). Matrix solution of compressible flow on S_1 surface through a turbomachine blade row with splitter vanes or tandem blades. ASME J. of Engineering for Gas Turbines and Power, 1984, 106: 449～454

62 华耀南，吴文权．S_1流面跨声流场流函数矩阵解．工程热物理学报，1987, 8(2): 130～132

63 赵晓路．使用非正交曲线坐标与速度分量的 S_1 流面跨声速流函数解．工程热物理学报，1984, 5(3): 244～249

64 王正明．交替方向积分法解 S_1 流面跨音流函数方程．工程热物理学报，1984, 5(3): 250～255

65 Wang Bao Guo. An iterative algorithm between stream function and density for transonic cascade flow. AIAA J. of Propulsion and Power, 1986, 2(3): 259～265

66 陈宏翼，吴仲华．含激波跨声速 S_2流面反问题的椭圆型方程间断解．工程热物理学报，1987, 8 (1): 23～30

67 沈孟育，张耀科．跨音涡轮中完全三维流动的计算．数值计算与计算机应用，1984, 5(2): 125～128

68 蒋洪德．倾斜透平静叶栅的全三元流场分析．工程热物理学报，1989, 10(1): 32～35

69 王保国，卞荫贵．转动坐标系中三维跨声速欧拉流的有限体积-TVD 格式．空气动力学学报，1992, 10(4): 472～481

70 陈乃兴，张丰显．透平级三维湍流流动的数值计算．工程热物理学报，1995, 16(2): 156～160

71 顾春伟，徐建中．用拟流函数求解叶轮机械三维可压流场．工程热物理学报，1991, 12(4): 361～366

72 刘前智，周新海．多级风扇/压气机三维粘性流场的数值分析．2001, 22(4): 435～437

73 黄伟光，陈乃兴，山崎伸彦等．叶轮机械动静叶片排非定常气动干涉的数值模拟．工程热物理学报，1999, 20(3): 294～298

74 张宏武，徐燕骥，黄伟光等．跨音透平级动叶顶部间隙流动的数值模拟．工程热物理学报，2002, 23(4): 441～444

75 Кочин НЕ. Векторное исчисление иначала тензорного исчисления. Москва: Hayka, 1964

76 华罗庚．高等数学引论(第一卷第二分册)．北京：科学出版社，1979

77 Schouten J A. Tensor analysis for physicists. London: Oxford Univ. Press, 1951



78 吴仲华. 工程流体动力学. 北京：清华大学出版社，1980
79 Truesdell C, Toupin R. The classical field theories. In S. Flugge (ed.). Handbuch der Physik, vol.3, pt.1, Berlin: Springer-Verlag, 1960
80 童秉纲，孔祥言，邓国华. 气体动力学. 北京：高等教育出版社，1990
81 吴望一. 流体力学. 北京：北京大学出版社，1982
82 沈孟育，周盛，林保真. 叶轮机械中的跨音速流动. 北京：科学出版社，1988
83 周光垌，严宗毅，许世雄，章克本. 流体力学. 北京：高等教育出版社，1993
84 Л Д. 朗道，E M. 栗弗席茨. 流体力学. 孔祥言等译，童秉纲校. 北京：高等教育出版社，1983
85 陈懋章. 粘性流体动力学基础. 北京：高等教育出版社，2002
86 复旦大学数学系. 流体力学. 上海：上海科学技术出版社，1960
87 清华大学工程力学系. 流体力学基础. 北京：机械工业出版社，1980
88 庄礼贤，尹协远，马晖扬. 流体力学. 合肥：中国科学技术大学出版社，1991
89 叶敬棠，柳兆荣，许世雄. 流体力学. 上海：复旦大学出版社，1989
90 张兆顺，崔桂香. 流体力学. 北京：清华大学出版社，1999
91 江宏俊. 流体力学. 北京：高等教育出版社，1985
92 王保国，黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法. 北京：国防工业出版社，2000
93 王竹溪. 热力学简程. 北京：人民教育出版社，1964
94 谢锐生. 热力学原理. 关德相译. 北京：人民教育出版社，1980
95 张远君. 流体力学大全. 北京：北京航空航天大学出版社，1991
96 Morse P M, Ingard K U. Theoretical acoustics. New York: McGraw-Hill, 1968
97 Thompson P A. Compressible fluid dynamics. New York: McGraw-Hill, 1972
98 卞荫贵，徐立功. 气动热力学. 合肥：中国科学技术大学出版社，1997
99 Emmons H W. Fundamentals of gas dynamics (section B). New Jersey: Princeton University Press, 1958

习　题

1. 求 $\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$ 在柱坐标系与球坐标系的表达式.

2. 若 $\boldsymbol{P}$ 为反对称张量，证明：

（1） $\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}_c$；

（2） $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{b})=0$，其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两矢量。

3. 反对称张量常用三个数 ω_1，ω_2，ω_3 来表示，实际上它们是一个向量的三个分量，例

如，反对称张量 $\boldsymbol{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$，通常定义 $\boldsymbol{\omega}$ 为反对称张量 A 的轴矢量（或极矢量）。今将并矢张量 $\boldsymbol{ab}$ 分解为对称部分和反对称部分。证明与反对称部分相对应的轴矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 是：$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ 。

4. 设φ_1与φ_2为任意标量函数，试证明：$\nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \varphi_2 - \varphi_2 \nabla \varphi_1) = \varphi_1 \Delta \varphi_2 - \varphi_2 \Delta \varphi_1$

式中，$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$，为拉普拉斯算子。

5. 试求：（1）笛卡儿直角坐标系；（2）柱坐标系；（3）球面坐标系中的第二种克里斯托菲符号表达式。

6. 在笛卡儿坐标系下证明：$\nabla \cdot [(\nabla \boldsymbol{a})_c] = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a})$，式中下注脚 c 表示张量的转置。

7. 试证明在自然坐标系下，轴对称定常流动的连续方程是 $\rho V(2\pi r \Delta n) = \text{const}$，其中 r 是考察点到对称轴的距离，Δn 是子午面内流线间的距离。如果将此式与欧拉方程合并，试证明能得到如下形式的运动方程：

$$\frac{M^2-1}{V}\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial \theta}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial S} = 0$$

其中 $M = V/a$，a 为声速；V 为速度 $\boldsymbol{V}$ 的模；θ 为速度倾角；S 为沿流线的坐标。

8. 试证明：定常、有旋、无粘气体的流动，在旋转坐标系（令转动角速度 $\omega = \text{const}$）下沿流线具有广义的 Bernoulli 积分

$$\frac{W^2 - (\omega r)^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}P}{\rho} = \text{const}$$

式中，r 是考察点到旋转轴的距离。

9. 写出平面剪切流动（这里令 $V_y = V_z = 0$，仅在 y 方向有速度梯度，并且 $\boldsymbol{V} = V_x \boldsymbol{i} + V_y \boldsymbol{j} + V_z \boldsymbol{k}$）时耗散函数的显式表达。

10. 已知：$\mathrm{d}h = T\mathrm{d}S + v\mathrm{d}P$，$c_p = (\partial h/\partial T)_P$，$(\partial S/\partial P)_S = -(\partial v/\partial T)_P$，

试证明：c_p 随压强的变化率为

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_P$$

式中，v 为比容。

11. 对完全气体，试推出下列导数：$(\partial v/\partial P)_S, (\partial^2 v/\partial P^2)_S, (\partial^3 v/\partial P^3)_S$ 的表达式，这里请



用v,P和 γ表示之。式中v,P,S和 γ分别为比容、压强、熵和比热比。

12. 证明：$c_p-c_v=-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P^2\bigg/\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$。

13. 高压气罐内盛有量热完全气体，已知它的温度与压强分别为 T_0 与 P_0，该罐有一个出气小孔，已知外界大气压为 P_e，试求出小孔定常出流时的速度公式。

14. 在上题中，引入了定常流的假设求得了小孔出流速度公式。若罐内气体不能得到及时补充则会迅速减少，问：阀门打开的瞬间，罐内气体的密度随时间的减少率？已知高压罐的容积为 2.0 m³，初始密度 $\rho_0=1.3\ \mathrm{kg/m^3}$，截面积为 1.0 cm² 的小孔阀门被打开时测得出口处气流速度为$V_0=300\ \mathrm{m/s}$，并假设每一时刻的密度在罐内均匀分布。

15. 把上题的罐抽成真空后，改为由小孔向罐内输气。已知条件为：高压罐的容积为 2.0 m³，小孔的面积为 1.0 cm²，小孔处送入的气流流速为$V_e=300\ \mathrm{m/s}$，压强为$P_e=3.0\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$，温度为$T_e=265\ \mathrm{K}$，假定气体一进入罐内便静止下来，另外还假定罐内参数分布均匀（小孔附近除外）。试求当罐内压力升至$P=2.0\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$时所需的时间？

16. 对于完全气体来说，试证明经过微弱的压强脉冲后，压强的相对变化值为

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=\gamma\frac{\mathrm{d}V}{a}$$

而绝对温度的相对变化值为

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=(\gamma-1)\frac{\mathrm{d}V}{a}$$

式中，a 与 γ 分别为声速与比热比。

17. 如果未受声扰动时介质（媒质）的静态密度不均匀，它是空间的函数即$\rho_1=\rho_1(x,y,z)$，试证明在这种情况下的声波方程为

$$\nabla^2P'-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}=(\nabla P')\cdot\left[\nabla(\ln\rho_1)\right]$$

这里，P'为声压，即$P'=P-P_1$；ρ_1,P_1与a_1分别表示未受扰动前静态的密度、压强与声速。

18. 在声学研究中经常使用密度的相对变化（即$\frac{\rho-\rho_1}{\rho_1}\equiv\sigma$）去描述声波在介质中压缩和膨胀交替变化传递信息的情况，试证明当假定声波传播过程是绝热的，并且气体振动是微小振幅时，波动方程变成如下表达形式

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=a_1^2\nabla^2\sigma$$

式中，ρ_1与a_1为初始密度与初始声速；∇^2为拉普拉斯算子。

第 2 章　膨胀波、压缩波和激波

膨胀波和激波是超声速气流特有的重要现象。超声速气流在加速时要产生膨胀波，减速时一般会出现激波。尤其是当超声速气流绕过光滑的外凸曲壁面时，壁面上每一点都发出一道膨胀波，气流经过每一道这样的膨胀波后，参数发生了一些微小变化，气流折转了一个微小角度，于是气流通过由无数多道膨胀波所组成的膨胀波区后，参数发生有限的变化，并且气流折转了一个有限的角度；显然，在不考虑气体粘性和与外界的热交换时，气流穿过膨胀波束的流动过程为绝能等熵的膨胀过程。另外，当超声速气流绕过光滑的凹曲壁面时，壁面上每一点都发出一道马赫波，当凹曲面的曲率半径较大时这些波为微弱压缩波。显然，当这些波处于分散而各自独立状态存在时，气流穿过它们时仍可按等熵流来处理，但一旦它们汇集在一起时就形成强压缩波即激波，对强压缩波而言等熵理论就不适用了。激波现象是气体高速运动过程中最重要的现象之一[1]，它是气体经受强烈压缩后产生的非线性传播波。由于气体通过激波波阵面时状态参数在极短的瞬间发生极大的变化，因而这种变化中的每一状态是热力学非平衡状态，必然要发生不可逆的耗散过程，因此即使在流动绝热的条件下，熵增也是不容忽略的，也就是说激波损失即由于激波而导致的可用能量减小的影响应当考虑。应该特别指出的是，随着飞行器和发动机性能的提高，超声速进气道、超声速压气机、超声速涡轮、超声速喷管等已被广泛采用。另外，超声速燃烧理论的研究也促进了国际上超声速燃烧冲压发动机的研究进程。显然，进行这些部件的气动设计和流场分析时首先要遇到膨胀波和激波问题。本章将着重分析这两种波的产生条件、性质、运动规律、相互间的作用以及有关理论计算等。为了揭示问题的本质，在讨论中假定流体是无粘、定常、绝能的完全气体。

§ 2.1　膨胀波、压缩波的形成及普朗特–迈耶流动

2.1.1　几个重要的概念与术语

1. 完全气体

完全气体是一种理想化的气体，它不考虑分子之间的内聚力和分子本身的体积，仅考虑分子的热运动（包括分子间的碰撞）。

2. 热完全气体

热完全气体仅是真实气体在一定温度和压力范围内的近似。热完全气体状态方程



（Clapeyron 方程）为

$$P = \rho RT \tag{2-1-1}$$

式中，R 为气体常数。对于热完全气体，内能和焓都是温度的函数而与其他参变量无关。

3. 量热完全气体

量热完全气体是比热容和比热比为常数的热完全气体。显然，凡是量热完全气体必然是热完全气体，但反之则不然。这是由于当气体的温度与分子振动特征温度量级相当时，分子振动能被激发，但尚未产生电解，这时气体是热完全气体，但不是量热完全气体。在航空发动机涡轮温度场计算中，变比热问题直接影响着温度场的计算及涡轮特性线计算的准确性，因此区分量热完全气体与非量热完全气体是必要的。

4. 理想气体

理想气体是指无粘性和无导热性的气体。

5. 绝能流动

绝能流动是指流体在流动过程中，与外界既无热量交换又无机械功输入输出的流动。均能是指在整个流场上流体质点所具有的总能量处处相等。因此，均能、均熵在概念上区别于等能、等熵。前者是从当地观点出发，指流场各处的能量相等和熵值相等；后者是从随体观点出发，指流体质点的能量和熵值沿迹线（只有在定常运动时才沿流线）不变。

2.1.2　理想气体定常、等熵流动的基本方程组

由流体力学知道，假定流体是无粘、定常、绝热的热完全气体，并且无彻体力 $\boldsymbol{f}$ 则式（1－4－25）、式（1－4－26）与式（1－4－27）被简化为

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{2-1-2}$$

$$(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{2-1-3}$$

$$h + \frac{V^2}{2} = h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} \tag{2-1-4}$$

上述三个式子分别为连续方程、运动方程和定常绝热情况下沿流线的能量方程。另外，气体的状态方程和等熵流动中的声速关系分别为

$$P = \rho RT \tag{2-1-5}$$

$$(\partial P / \partial \rho)_s = \mathrm{d}P / \mathrm{d}\rho = a^2 \tag{2-1-6}$$

将（2－1－3）式两边点乘 $\boldsymbol{V}$，并注意到式（2－1－6）得到

$$\boldsymbol{V}\cdot\left[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right]=-\boldsymbol{V}\cdot\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)\nabla P\right]=-\boldsymbol{V}\cdot\left[\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho\right]=-\frac{a^2}{\rho}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho \qquad (2-1-7)$$

注意到
$$\boldsymbol{V}\cdot\left[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right]=\boldsymbol{V}\cdot\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})\right]=(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

于是式（2－1－7）变为

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{a^2}{\rho}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho \qquad (2-1-8)$$

由式（2－1－8）与式（2－1－2），消去$\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho$项得

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right)=a^2(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \qquad (2-1-9)$$

又由式（2－1－4）并注意$h=c_pT$后可得到

$$a^2=a_\infty^2+\frac{\gamma-1}{2}\left(V_\infty^2-V^2\right) \qquad (2-1-10)$$

因此式（2－1－9）与式（2－1－10）就组成了理想气体定常、等熵流动的基本方程组。将式（2－1－9）在直角笛卡儿（x,y,z）坐标系下表示，并注意到$V^2=u^2+v^2+w^2$，于是可得到式（1－9－68），即

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{uv}{a^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{vw}{a^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{uw}{a^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0 \qquad (1-9-68)$$

特别是对于不可压缩流动，由于$a\to\infty$，于是式（1－9－68）进一步被简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \qquad (2-1-11)$$

如果假定理想气体的定常等熵流动还是无旋运动时，则可定义速度势函数φ，于是式（1－9－68）被进一步整理为关于势函数的非线性二阶偏微分方程，即

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{2uv}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{2vw}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{2uw}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=0 \qquad (1-9-70)$$

相应地式（2－1－10）变为



$$a^2 = a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left\{V_\infty^2 - \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \tag{2-1-12}$$

2.1.3　膨胀波与微弱压缩波的形成

气体的扰动都是以波的形式向流场各处传播的。特别是在超声速流场中，在某处使气体膨胀或者压缩的任何扰动都是通过等熵波（连续波）或者激波（间断波）传播到流场一定范围内。在扰动波中，声波或马赫波是一种微弱扰动波，气流参数，例如压强、密度、温度、速度等穿过这种波时只发生非常微小的变化。在这种情况下，气流通过这种波的流动过程仍可按等熵流动来处理。但对于强波而言，等熵理论就不适用了。

当超声速气流流过凸曲面或凸折面时，如图 2.1 所示，由于通道面积加大，气流要进行膨胀。假设超声速直匀流沿外凸壁面流动，在点 O_1 处向外折转一个微小的角度 $d\theta_1$，这里 $d\theta_1$ 代表流线方向角度的变化（即气流折转角），并规定逆时针方向折转角为正，顺时针方向折转角为负。由于壁面的微小折转，因此在壁的折转处（即扰动源），例如图 2.1（a）的 O_1 处，就必然会产生一道马赫波 O_1L_1，它与来流方向夹角 $\mu_1 = \arcsin(1/M_1)$；同样的，在 O_2、O_3 等一系列点处，继续外折一系列微小的角度 $d\theta_2$，$d\theta_3$，…。在壁面的每一个折转处，都产生一道膨胀波 O_1L_1、O_2L_2、O_3L_3、…，各膨胀波与该波前气流方向的夹角为μ_1，μ_2，μ_3，…，并且有

$$\mu_1 = \arcsin(1/M_1);\quad \mu_2 = \arcsin(1/M_2);\quad \mu_3 = \arcsin(1/M_3);\ \cdots$$

因为气流每经过一道膨胀波，马赫数都有所增加，即 $M_1 < M_2 < M_3 < \cdots$，故有 $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \cdots$。

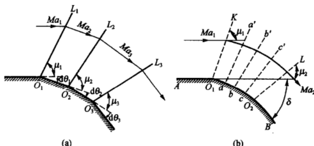


图 2.1　超声速气流流经凸折面与凸曲面时形成的膨胀波

（a）凸折面；（b）凸曲面

由高等数学中极限的概念，曲线是由无数段微元折线组成的。因此，超声速气流绕外凸曲壁的流动与绕凸折面的流动在本质上是相同的，只是这时曲壁上每一点都相当于一个折

点，自每一点都发出一道膨胀波，气流每经一道这样的膨胀波，参数都会发生一个微小的变化，折转一个微小的角度 $d\theta$，因此气流通过由无数多道膨胀波所组成的膨胀波区后，参数便发生了一个有限值的变化，并且气流折转了一个有限的角度δ，如图 2.1（b）所示。通常将平面、定常、超声速理想可压缩气流绕光滑凸壁、凹壁（在形成间断之前）及绕有限凸角的均熵流动称作 Prandtl-Meyer 流动，简称 P–M 流动。超声速气流绕外钝角流动具有下列特点：

（1）当超声速来流为平行于壁面的定常直匀流时，在壁面转折处必定产生一扇形膨胀波束，如图 2.2 所示，此扇形波速是由无限多的马赫波所组成。

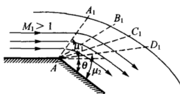


图 2.2　超声速气流流经外钝角时形成的膨胀波束

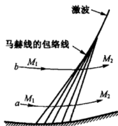


图 2.3　气流流经凹面时形成的微弱压缩波

（2）气流每经过一道马赫波，参数只有微小的变化，因而经过膨胀波束时，气流的参数是连续变化的（即速度连续变大，压强、温度、密度相应的连续变小）。显然，在不考虑气体粘性与外界的热交换时，气体穿过膨胀波束的流动过程为绝能等熵的膨胀过程。

（3）沿膨胀波束中的任意一条马赫线，扰动参数不变，并且这些马赫线都是直线。

（4）对于给定的起始条件，膨胀波束中任意一点处的速度大小仅与该点的气流方向有关。

类似地，超声速气流流经凹壁面时，由于通道面积缩小，气流要经受压缩，因此产生一系列马赫波，当凹曲面的曲率半径较大时，这些波为微弱压缩波，如图 2.3 所示。当它们处于分散而各自独立存在时，气流穿过它们时仍可按等熵流来处理，但当它们一旦汇集在一起时就会形成强压缩波即激波。

另外，超声速气流如果流经凹折面或者楔形物时，这时气流在折点处形不成分散的微弱压缩波（马赫波），而会直接被突跃压缩形成一道强压缩波即激波，如图 2.4（a）、图 2.4（b）所示。





图 2.4　超声速气流流经凹折面与楔形物体时形成的激波

（a）凹折面；（b）楔形物

2.1.4　P–M 流动时的微分关系

现在来推导 P–M 流动时速度大小与气流折转角间的关系，如图 2.5 所示，图中 $|\Delta\theta| \ll 1$，角 θ 以逆时针方向为正；线 OA 为气流的扰动线（即马赫数），与来流方向成马赫角 μ；气流流过扰动线，受膨胀（凸角）或压缩（凹壁面），速度变为 $V+\Delta V$（对膨胀过程，$\Delta V>0$；对压缩过程，$\Delta V<0$），而气流方向与偏转后的壁面平行。首先用几何方法建立起扰动线前后气流参数的变化与 $\Delta\theta$ 间的关系，然后再按本节所规定的角度正负去考虑 $\Delta\theta$ 的正负值。为便于叙述，以下选取膨胀加速为例。

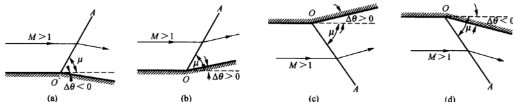


图 2.5　在不同物面边界条件下 P–M 流动的膨胀或压缩波

（a）膨胀波；（b）压缩波；（c）膨胀波；（d）压缩波

现在用几何方法建立扰动线前后的气流速度变化与 $\Delta\theta$ 间的关系。如图 2.6 所示，令来流的速度为 V，穿过马赫波后，速度变为 $V+\mathrm{d}V$，则速度方向顺时针折转了 $\mathrm{d}\theta$ 角。考虑到超声速气流穿过膨胀波后，平行于波面的速度分量保持不变（这是由于沿波面方向作控制体时由动量守恒定律所决定），也就是说波前后气流的速度在马赫线上的投影必定相等，因此，由正弦定理有（见图 2.6）

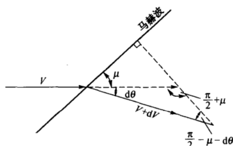


图 2.6 马赫波前后的速度关系

$$\frac{V+\mathrm{d}V}{V}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\mu\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\mu-\mathrm{d}\theta\right)}$$

注意到 $\sin(\mathrm{d}\theta)\approx\mathrm{d}\theta$，$\cos(\mathrm{d}\theta)\approx 1$，于是上式变为

$$1+\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{1}{1-(\mathrm{d}\theta)\tan\mu} \qquad (2-1-13)$$

利用级数展开，当 $x<1$ 时有

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

于是式（2－1－13）右边可用上式级数展开并略去二次以上小量之后得

$$\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\tan\mu}\frac{\mathrm{d}V}{V} \qquad (2-1-14)$$

将 $\tan\mu=1/\sqrt{M^2-1}$ 代入式（2－1－14）并注意到 $\mathrm{d}\theta$ 沿顺时针方向为负的约定，则式（2－1－14）变为

$$-\mathrm{d}\theta=\sqrt{M^2-1}\frac{\mathrm{d}V}{V} \qquad (2-1-15)$$

注意，在气体动力学中通常约定：由气流方向逆时针转过 μ 角所形成的扰动线或马赫线叫左伸马赫数，在有限强度弱波法中也叫左伸波或第一族波；显然这里式（2－1－15）给出了超声速气流穿过左伸波（或左伸马赫线）时的微分关系式。当 $\mathrm{d}\theta<0$ 时，则 $\mathrm{d}V>0$，于是气流膨胀加速；而当 $\mathrm{d}\theta>0$ 时，则 $\mathrm{d}V<0$，于是气流受压缩而减速，如图 2.5（a）与图 2.5（b）所示。

类似地，当气流绕图 2.5（c）与图 2.5（d）所示的凸角或凹角流动所产生的扰动线或马赫波叫右伸马赫线，在有限强度弱波法中称作右伸波或第二族波。仿上述推导过程，很容易得到右伸波前后流动参数改变量与气流折转角之间的微分关系为

$$\mathrm{d}\theta=\sqrt{M^2-1}\frac{\mathrm{d}V}{V} \qquad (2-1-16)$$

显然，当 $\mathrm{d}\theta>0$ 时，则 $\mathrm{d}V>0$ 即气体膨胀加速；当 $\mathrm{d}\theta<0$ 时，则 $\mathrm{d}V<0$ 即气体受压缩而减速。应该指出：式（2－1－15）和式（2－1－16）适用于任何气体，其中包括非完全气体。

下面推导积分关系式，为此要对式（2－1－15）进行积分。为了使计算有通用性，假定膨胀过程的起点定在 $\theta=0$，$M=1$ 处，因此积分式可写为



$$-\int_0^\theta \mathrm{d}\theta = \int_1^M \sqrt{M^2-1}\frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{2-1-17}$$

上式右边的 $\frac{\mathrm{d}V}{V}$ 可用 M 数表示，因

$$V = M \cdot a$$

两边取对数再微分，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}M}{M} + \frac{\mathrm{d}a}{a} \tag{2-1-18}$$

对于量热完全气体，在定常绝热条件下，则有

$$a = a_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

两边取对数，再微分之后代入式（2－1－18）后得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\frac{\mathrm{d}M}{M} \tag{2-1-19}$$

再代到式（2－1－17）中，得

$$-\theta = \int_1^M \frac{\sqrt{M^2-1}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\frac{\mathrm{d}M}{M} \tag{2-1-20}$$

经过积分，即得 P–M 流动的微分关系式（对于左伸膨胀波）

$$-\theta = \nu(M) \tag{2-1-21}$$

而

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \arctan\sqrt{M^2-1} \tag{2-1-22}$$

这里要指出的是，上式成立的条件是：①规定膨胀或压缩过程的起点在 $\theta=0$， $M=1$ 处，并且式中还用到了当 $M=1$ 时取 $\nu(1)=0$ 的约定；②只适用于量热完全气体。

$\nu(M)$ 一般称为普朗特—迈耶函数，它具有角度量纲（度或弧度），仅为比热比 γ 与马赫数 M 的函数。而马赫角 μ 与马赫数 M 的关系式为

$$\mu = \arcsin\frac{1}{M} = \arctan\frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \tag{2-1-23}$$

对于任意两个马赫数 M_1 和 M_2 的左伸膨胀波系，则 P-M 流动关系式可表达为

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \nu(M_1) - \nu(M_2) \tag{2-1-24}$$

同样，对右伸膨胀波系则上式变为

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=\nu(M_2)-\nu(M_1) \tag{2-1-25}$$

值得注意的是：式（2－1－24）与式（2－1－25）也可用于左伸弱压缩波与右伸弱压缩波。两个式子的差别仅在于（$\theta_2-\theta_1$）前的正负号相反，为避免运算中混淆，通常采用流动偏转角的绝对值[2]而不论壁面的弯折方向，因此对压缩偏转和膨胀偏转分别有

$$\nu(M_2)=\nu(M_1)+|\theta_2-\theta_1| \quad （膨胀过程） \tag{2-1-26a}$$

$$\nu(M_2)=\nu(M_1)-|\theta_2-\theta_1| \quad （压缩过程） \tag{2-1-26b}$$

上面两个式子很好的反映了在压缩偏转中 $\nu(M)$值逐渐减小，而在膨胀偏转中 $\nu(M)$值逐渐增大这一物理事实，并且在这两种情况下，$\nu(M)$的变化量都等于流动偏转角。在通常的计算中，一旦$\Delta\theta,M_1,T_1,P_1,\rho_1$给定，则利用式（2－1－24）或式（2－1－25）便可确定出M_2；再利用等熵关系式便可求出T_2、P_2、ρ_2值。作为特例，我们可以计算出如下这种特殊状况下的气流折转角，今考虑膨胀到真空状态（P=0，T=0），这时$M\to\infty$，气流折转角达最大值，从式（2－1－22）可求出

$$\nu(M)_{\max}=\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}-1\right] \tag{2-1-27}$$

当$\gamma=1.4$时，$\nu(M)_{\max}=130.45^\circ$，应当指出，这仅是理论上的极限值，实际上是达不到的。

例 1　设有$M_1=2$的均匀气流绕外凸壁膨胀，气流的最终方向相对于其最初方向转折了-10°（顺时针方向转折）即$\Delta\theta=-10^\circ$，试求气流膨胀后的M_2值。

解：设气流为空气，$\gamma=1.4$，因为是左伸膨胀波系，故用式（2－1－24）计算。由 P-M 函数表（见附表 1）查出$M_1=2$，得$\theta_1=-\nu(M_1)=-26.3795^\circ$（这是气流从$M_0=1,\theta_0=0$膨胀到$M_1=2$所折转的角度）。在这个角度上气流再继续顺时针折转 10°，也就是说$\theta_2=\theta_1-10^\circ=-36.3795^\circ$，于是$\nu(M_2)=\nu(M_1)-(\theta_2-\theta_1)=36.3795^\circ$；按这个角度查表得到$M_2=2.385$。

例 2　假设气流以$M_1=2$的马赫数沿二维壁面流动，绕过气流折转角$|\Delta\theta|$为 20° 的尖凸角，如图 2.7 所示。试求出扇形膨胀波束区的$\Delta\phi$角以及下游马赫数M_2值、P_2/P_2值与T_2/T_1的值。

解　这是超声速气流穿过左伸膨胀波系问题，应使用式（2－1－24）进行求解。由M_1=2，故$\nu(M_1)=26.4^\circ$，$\mu_1=\mu(M_1)=30^\circ$，$\theta_1=-\nu(M_1)=-26.4^\circ$；在后缘处，由式（2－1－24），并注意到$\Delta\theta=-20^\circ$，于是$\nu(M_2)=\nu(M_1)-\Delta\theta=46.4^\circ$。因而，$M_2=2.83$，$\mu_2=\mu(M_2)=20.7^\circ$。按照气体动力学中的规定：马赫波极角$\phi$ 即气流从声速开始膨胀到某一个马赫数 M 时膨胀波束的扇形区所张的角度。扇形区前缘的马赫角$\mu_0=90^\circ$，后缘的马赫角为$\mu=\arcsin\frac{1}{M}$；当气流由声速流膨胀到 M 时，气流所折转的角度$\theta=-\nu(M)$（对于左伸波），由几何关系则有$\varphi+\mu+\theta=90^\circ$，即



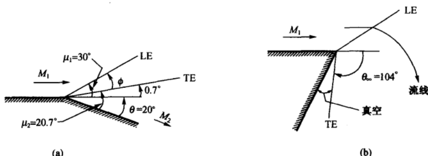


图 2.7　超声速气流沿壁面的流动

（a）例 2 图；（b）例 3 图

$$\varphi = 90^{\circ} - \mu + \nu(M) \qquad (2-1-28)$$

显然，式（2－1－28）对左伸波和右伸波均成立。由上式可知，当气体性质一定时φ仅仅与马赫数有关。本书附表 1 中给出了比热比$\gamma=1.4$时，φ与M的对应关系。对于超声速气流绕外钝角的流动，设膨胀波束前的马赫数为M_1，膨胀波束后的马赫数为M_2，则由式（2－1－28）便可算出φ_1与φ_2值。设膨胀波束扇形区所张的角度为$\Delta\varphi$，则

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \mu_1 - \mu_2 + \nu(M_2) - \nu(M_1) \qquad (2-1-29)$$

于是将本题有关数据代入上式便得到：$\Delta\varphi = 30^{\circ} - 20.7^{\circ} + 46.4^{\circ} - 26.4^{\circ} = 29.3^{\circ}$，

最后，由等熵关系式可算出压比与温度比为

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2/p_0}{p_1/p_0} = \frac{0.03467}{0.1278} = 0.271$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_0}{T_1/T_0} = \frac{0.3827}{0.5556} = 0.689$$

例 3　假定例 2 中的M_1不变而逐渐增加$|\Delta\theta|$的值时，试讨论：当$M_2 \to \infty$时，膨胀波束扇形区后缘的位置及这时相应的$|\Delta\theta|$值（记作$|\Delta\theta|_{max}$）；如果再进一步增大偏转角将会出现什么现象？

解　由式（2－1－27）算出$M_2 \to \infty$时$\nu(M_2)$的极限值。因此

$$\nu(\infty) = \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right) \times 90^{\circ}$$

当$\gamma=1.25$时，则$\nu(\infty)=180^{\circ}$；当$\gamma=1.4$时，$\nu(\infty)=130.5^{\circ}$；当$\gamma=5/3$时，则$\nu(\infty)=90^{\circ}$；在$M_2 \to \infty$且$\gamma=1.4$时，由式（2－1－24）得$|\Delta\theta|_{max} = |\nu(M_1) - \nu(\infty)| = 104^{\circ}$，在这种情况下，由于$\mu(\infty)=0^{\circ}$，因此膨胀扇后缘是沿下游壁面的，并且在这条马赫线上，$P_2=0$，$T_2=0$，

$\rho_2=0$；如果再进一步增大偏转角，在后缘与壁面之间就会出现真空（如图 2.7（b）所示）。这时膨胀不再受下游壁面的影响。

例 4 设有 $M_1=2.21$，$P_1=0.1\times10^5$ Pa 的超声速气流，经内凹曲壁使气流内折了 $\delta=28°$，试求压缩波后气流的 M_2、P_2，并求出第一道和最后一道压缩波的波角 μ_1 与 μ_2。

解 由 M_1 值查表得 $\nu(M_1)=32°$，$\mu_1=26.9°$，$p_1/p_*=0.092$；由于是左伸压缩波，由式（2－1－24）得 $\nu(M_2)=\nu(M_1)-\Delta\theta=32°-28°=4°$，查表得 $M_2=1.218$，$\mu_2=55.2°$，查气动函数表得 $p_2/p_*=0.4029$，故 $p_2=\dfrac{p_2}{p_*}\dfrac{p_*}{p_1}p_1=0.437\times10^5$ Pa。

例 5 设 $M_1=1$ 的直匀流（$\theta_1=0°$）绕外凸壁折转 $-5°$ 如图 2.8（b）所示，试用 FORTRAN 或 C 语言编制气流流线形状的源程序。

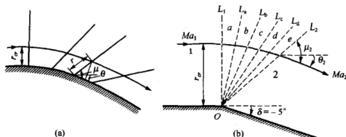


图 2.8 超声速气流绕外凸壁流动

解 这里仅给出编程中的要点提示。

（1）首先确定流线的位置。令 r 为壁面上某一点沿马赫线到流线的距离如图 2.8（a）所示，并假定在气流速度等于声速处 $r=r_*$，$\mu=90°$；在膨胀过程中，流道的横截面积为 $r\sin\mu$（这里取垂直于图面为单位长度）是逐渐增大的，在气流速度等于声速处，流道横截面积为最小，由连续方程 $r\rho V\sin\mu=r_*\rho_*V_*$ 在绝能等熵流动中

$$\frac{\rho V}{\rho_* V_*}=q(M)=\left(\frac{r}{r_*}\sin\mu\right)^{-1}$$

式中 $q(M)$ 的定义同（1－8－33）式；下标*表示临界值。由上面两式并注意到式（2－1－23）便得到

$$\frac{r}{r_*}=\frac{M}{q(M)}=\sqrt{\left(\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \qquad (2-1-30)$$



显然，$\frac{r}{r_*}$ 也是 M 数的函数，此函数关系也已列入本书附表 1 中。

（2）确定扇形膨胀波区域的第一道膨胀波与最后一道膨胀波的方向。

（3）为简化计算，在第一道膨胀波与最后一道膨胀波之间的连续膨胀区假定用有限道膨胀波（例如用六道）来代替，因此气流每经过一道波，流动方向就突然折转 1°。

（4）在给定 r_* 值后便可以计算出每道波上流线的相应 r 值。

（5）给出一系列的 r_* 值，便可画出一系列的流线。

§ 2.2　激波的性质及激波前后的参数关系

超声速气流被压缩时，一般不像超声速气流膨胀时那样连续地变化，而往往以突跃压缩的形式实现。我们把气流中产生的突跃式的压缩波称作激波。激波是一种强扰动波，是一种非线性传播波，它是超声速气流中一个很重要的物理现象，它对流动阻力或流动损失会产生很大的影响。气体通过激波时的压缩过程是在非常小的距离内完成的，即激波的厚度非常小，理论计算和实际测量表明，在一般情况下，激波的厚度大约在 10^{-6} 米左右[3]，这个数量已经与气体分子的自由行程达到同一个数量级了[4]。可以想像，在这样小的距离并且在极短的瞬间内气流完成一个显著的压缩过程，因此这种变化中的每一状态不可能是热力学平衡状态，即这种过程必然是一种不可逆的耗散过程，应该说气体的粘性和热传导对激波有十分重大的影响[5]，而且激波内部的结构非常复杂。但是，从工程应用的角度，可以把这一压缩过程所占的空间距离处理为一个面，这个面就是激波面，对于激波前后气流参数的变化来讲它是个间断面。

关于激波的形成，可以分两方面说明：其一是驻激波的形成，其二是运动激波的形成。但考虑到国内任何一本流体力学基础教材，例如文献［6～13］，对上述两方面的形成均有介绍，本课程作为流体力学基础课程的后续课程，为避免重复这里仅给出驻激波与运动激波形成问题的有关要点。

2.2.1　驻激波的形成

① 当超声速气流经凹曲面时，由于通道面积缩小，气流受到压缩，产生一系列马赫波，在凹曲面的曲率半径较大时，这些波为微弱压缩波。当它们处于分散而各自独立存在时，气流穿过它们可按等熵流处理，但一旦汇集在一起时，它们便形成强压缩波即激波，如图 2.9（a）与图 2.9（b）所示。

② 超声速气流如果流经凹折面或者楔形物时，如图 2.9（c）与图 2.9（d）所示，气流在折点处形不成分散而各自独立的微弱压缩波，而是直接被突跃压缩形成一道强压缩波即激波。



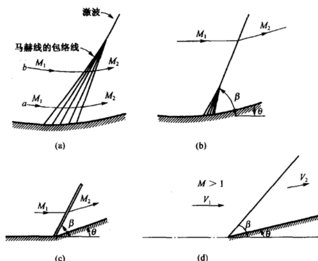


图 2.9　超声速气流中激波的形成

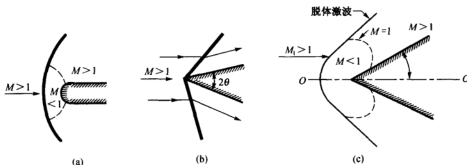


图 2.10　绕钝头体与对称楔上流动的脱体激波与附体激波

③ 观察钝头体超声速飞行时的流场照片，发现在物体前面有一道弓形的脱体曲线激波（图 2.10（c）与图 2.10（a））。在曲线激波的中段后面，有一亚声速区，其余则为超声速区。图 2.10（b）为附体激波。其实，曲线激波可以认为是无数微元段的平面斜激波的组合，仅在其正中间的一个微段是正激波，因此搞清楚平面斜激波的基本规律是非常重要的。



2.2.2　运动激波的形成

这里扼要说明流体力学传统教材中常采用的例子去描述运动激波的形成。设有一根很长的等截面直管，管内的左端放置一个活塞，活塞右侧充满着静止的气体，此时气体的压强、温度等分别用 P_1、T_1 等表示；现对活塞施加外力使之向右作加速运动，在 t 时间内速度由零加速到 V；为便于说明问题，今将这个加速的全过程分成 n 个微小的阶段，每个阶段占有的时间为 $\Delta t = t/n$，显然当 n 选得很大时，则每个阶段内活塞的速度增量 ΔV 将很小。所以每一个阶段的加速都可看成是一个微弱的压缩扰动，都要产生一道微弱扰动压缩波。

显然，每经过一个微小的阶段，在气体中就多一道微弱压缩波，每道压缩波总是在经过了前几次压缩后的气体中以当地声速相对于气体向右传播。气体每压缩一次，声速就增大一次，而且随着活塞速度的增大，活塞附近气体跟活塞一起向右移动的速度也增大，所以后面产生的微弱压缩波的绝对传播速度比前面的快。

经过 t 时间后，活塞的速度加速到 V，在管内形成了 n 道微弱压缩波，因为后面的波比前面的波传播得快，因此随着时间的推移，波与波之间的距离逐渐减小。最后，后面的波终于赶上了前面的波，使所有的微弱压缩波都聚集在一起，汇成了一道波，这道波就不再是弱压缩波而是强压缩波，即激波。

下面推导激波的传播速度。图 2.11（a）表示由于活塞的加速压缩运动在管内气体中形成的激波在某一瞬时的位置。

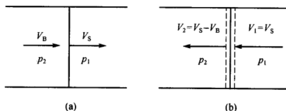


图 2.11　管内激波及沿激波选取的控制体

用 V_S 和 V_B 分别代表激波向右传播的速度和激波后气体的运动速度（即活塞向右移动的速度）。为便于分析，取随激波一起运动的坐标系，在这个坐标系中激波静止不动，这时激波前的气体速度 $V_1 = V_S$ 向左边流向激波，穿过激波后气体速度为 $V_2 = V_S - V_B$，如图 2.11(b)所示。沿激波取控制体并应用积分型动量方程（1－4－36）式，注意到这里为一维、定常、无粘流，于是整理后得到

$$V_S V_B = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1} \qquad (2-2-1)$$

再对控制体应用积分型连续方程式（1－4－35）并注意一维、定常流动的条件，得

$$V_{B}=\frac{\rho_{2}-\rho_{1}}{\rho_{2}}V_{S} \tag{2-2-2}$$

联立上面两式解出 V_B 与 V_S，得

$$V_{S}=\sqrt{\frac{P_{1}}{\rho_{1}}\frac{(P_{2}/P_{1})-1}{1-\rho_{1}/\rho_{2}}} \tag{2-2-3}$$

$$V_{B}=\sqrt{\frac{P_{1}}{\rho_{1}}\left(\frac{P_{2}}{P_{1}}-1\right)\left(1-\frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}\right)}=\sqrt{\frac{(P_{2}-P_{1})(\rho_{2}-\rho_{1})}{\rho_{1}\rho_{2}}} \tag{2-2-4}$$

最后再对控制体应用积分型能量方程式（1－4－37）并注意这里为一维、定常与无粘流动的条件，得

$$h_{1}+\frac{V_{1}^{2}}{2}=h_{2}+\frac{V_{2}^{2}}{2} \tag{2-2-5}$$

注意到 $h=c_pT, c_P=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}R, V_1=V_S, V_2=V_S-V_B$ 及式（2－2－3）、式（2－2－4），便可得到

$$\frac{\rho_{2}}{\rho_{1}}=\frac{\dfrac{1}{B}\dfrac{P_{2}}{P_{1}}+1}{\dfrac{P_{2}}{P_{1}}+\dfrac{1}{B}} \tag{2-2-6}$$

式中

$$B\equiv\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{2-2-7}$$

将式（2－2－6）代到式（2－2－3）后，得

$$V_{S}=a_{1}\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{P_{2}-P_{1}}{P_{1}}} \tag{2-2-8}$$

由于波后压强 P_2 总是大于波前压强 P_1，因此上式根号内的数值总是大于 1 的，故有 $V_S>a_1$；另外由上式也可以看到：当激波很弱即 $\dfrac{P_2}{P_1}\to 1$ 时，$V_S\to a_1$，即当激波是很微弱的压缩波时，其传播速度为声速。

例 6 设长管中静止空气的参数 $P_1=0.981\times10^5$ Pa, $\rho_1=1.225$ kg/m³, $T_1=288$ K。经活塞压缩后，在气体中产生一道激波，波后空气的参数为：$P_2=1.765\times10^5$ Pa，$\rho_2=1.850$ kg/m³，求激波的传播速度和激波后空气的运动速度。

解 由式（2－2－3）求出激波的传播速度为



$$V_S = \sqrt{\frac{0.981\times10^5}{1.225}\frac{\frac{1.765}{0.981}-1}{1-\frac{1.225}{1.850}}} = 435 \text{ m/s}$$

由式（2-2-4）求出激波后气体的运动速度，代入有关数据后为

$$V_B = 147 \text{ m/s}$$

而波前气体中的声速为

$$a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1.4\times287.06\times288} = 340 \text{ m/s}$$

显然，$V_S > a_1$。

2.2.3　激波间断面的动力学条件及激波性质

假设在流体中存在着一个曲面，流体穿过此面时气流参数发生间断。一般令这个曲面是运动着的，它的形状所满足的方程为 $f(\boldsymbol{r},t)=0$；令 Δn 为间断面在 Δt 时间内沿法线方向所走过的距离，于是 $N=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta n}{\Delta t}$ 称为间断面法向运动的速度（又称作间断面法向的移动速度）。在 $t+\Delta t$ 时刻，将 $f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)=0$ 的左边在 $(\boldsymbol{r},t)$ 处作级数展开即

$$f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)=f(\boldsymbol{r},t)+(\Delta\boldsymbol{r})\cdot(\nabla f)+(\Delta t)\frac{\partial f}{\partial t}+\cdots$$

注意到 $f(\boldsymbol{r},t)=0$ 以及当 $\Delta t\to0$ 时 $\Delta\boldsymbol{r}\to\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，于是省略高阶项后，$f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)=0$ 变为

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\cdot(\nabla f)+(\mathrm{d}t)\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2-2-9}$$

另外，考虑到

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\\ \nabla f&=|\nabla f|\boldsymbol{n}\end{aligned}\right\} \tag{2-2-10}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为间断面的单位法矢量，而 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的分量为 $N\boldsymbol{n}$。故由式（2-2-9）推出

$$N=-\frac{\partial f/\partial t}{|\nabla f|} \tag{2-2-11}$$

作为特例，如果间断面方程 $f(x,y,z,t)=0$ 时，则该曲面上任一点的法向运动速度 N 为



$$N = -\frac{\partial f/\partial t}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \tag{2-2-12}$$

下面推导间断面的动力学条件。设$\sigma(t)$为运动着的控制体的表面，它包围着激波波阵面的一部分，并且跟随这局部的激波波阵面以速度 $\boldsymbol{b}$（这里 $\boldsymbol{b}$ 就是式（2-2-10）中的 $\boldsymbol{B}$）一起运动着，同时约定：垂直于控制表面的向外的单位法矢量为 $\boldsymbol{n}$ 如图 2.12 所示。根据习惯，下标为“1”时表示流体进入控制体的那一边（即上游一侧），这里观察者是随控制体一起运动的；类似的，下标为“2”为流体离开控制体的那一边（即下游一侧）。如果令 $\boldsymbol{V}$ 表示流体的绝对速度，则（$\boldsymbol{V}$–$\boldsymbol{b}$）表示相对于控制体的流体速度，（由于观察者位于控制体上，因此他看到的流体速度只能是（$\boldsymbol{V}$–$\boldsymbol{b}$）），并且有

$$(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}<0 \quad （在流入侧或 1 边）$$

$$(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}>0 \quad （在流出侧或 2 边）$$

因此定义 w_1 与 w_2 作为相对速度法向分量的大小，即

$$\left.\begin{aligned} w_1 &\equiv -(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}_1 = (\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}_2 \\ w_2 &\equiv (\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-2-13}$$

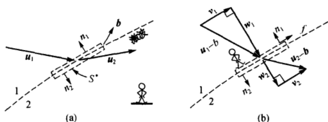


图 2.12 包含激波波阵面的控制体

（a）静止的观察者所看到的速度；（b）在控制体上的观察者所看到的速度

将式（1-4-3）～式（1-4-6）分别用到这里的控制体上，并注意到这里气体为定常、无粘、无彻体力、绝能的特点，于是对每单位激波波阵面面积来讲，分别变为

$$\rho_2 w_2 - \rho_1 w_1 = 0 \tag{2-2-14}$$

$$\rho_2 w_2 \boldsymbol{V}_2 - \rho_1 w_1 \boldsymbol{V}_1 = -P_2\boldsymbol{n}_2 - P_1\boldsymbol{n}_1 \tag{2-2-15}$$

$$\rho_2\left(e_2+\frac{V_2^2}{2}\right)w_2 - \rho_1\left(e_1+\frac{V_1^2}{2}\right)w_1 = -P_2\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}_2 - P_1\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}_1 \tag{2-2-16}$$

$$\rho_2 s_2 w_2 - \rho_1 s_1 w_1 \geqslant 0 \quad 或者 \quad s_2 \geqslant s_1 \tag{2-2-17}$$

式中，（不考虑下注脚时）ρ, s, P, e 分别表示密度、熵、压强、内能。显然，式（2-2-14）



表明：在激波两边穿过激波波阵面的质量通量相同；另外，如果将 $\boldsymbol{b}(\rho_1 w_1 - \rho_2 w_2) = 0$ 加到式（2－2－15）上，并注意到 $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$，便有

$$\rho_2 w_2(\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{b}) - \rho_1 w_1(\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{n}_1(p_2 - p_1) \tag{2-2-18}$$

我们取由 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 构成的单位正交曲线标架（这里 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{m}$ 构成右手系），并且单位切矢量 $\boldsymbol{t}$ 在 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $(\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{b})$ 的平面内。于是将式（2－2－18）分别点乘单位矢量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{t}$，便得到

$$p_1 + \rho_1 w_1^2 = p_2 + \rho_2 w_2^2 \tag{2-2-19}$$

$$v_1 = v_2 \equiv v = (\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{t} = (\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{t} \tag{2-2-20}$$

显然，式（2－2－20）表明：相对速度的切向分量在通过激波时是一个不变量。另外将式（2－2－19）代到式（2－2－18），消去（ $p_2 - p_1$ ）项并注意应用式（2－2－14），于是得到

$$\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{n}_1(w_1 - w_2) \tag{2-2-21}$$

这是一个非常重要的表达式，它表明：穿过激波时速度的变化总是垂直于激波波阵面。

另外，如果在式（2－2－16）的两边时同加上 $p_2 w_2 - p_1 w_2$，并注意到式（2－2－14）与式（2－2－18），则可得到

$$\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1) \tag{2-2-22}$$

上面这个方程的一个重要推论是：对于静止激波 $(\boldsymbol{b} = 0)$，总焓 $h_0 = h + \dfrac{V^2}{2}$ 在穿过激波时是个不变量。另外，利用 $(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{b})^2 = w^2 + v^2$ 和 $v_1 = v_2$ 这两个重要关系式，则式（2－2－22）又可变为

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} \tag{2-2-23}$$

显然，在速度项方面，它仅含有法向的分量。今沿用惯例，把穿过激波时任意参量的突变值放在一个用黑体的方括号之中[14]，例如压强的突变量为 $p_2 - p_1 \equiv [p]$，因此激波基本关系（2－2－14）、（2－2－19）、（2－2－20）、（2－2－23）与（2－2－17）式可写为

$$\left.\begin{aligned}
&[\rho w] = 0 \\
&[P + \rho w^2] = 0 \\
&[v] = 0 \\
&\left[h + \frac{w^2}{2}\right] = 0 \\
&[s] \geqslant 0
\end{aligned}\right\} \tag{2-2-24}$$

式（2－2－24）为激波条件，又称作间断面的动力学条件，它适用于任何观察者。值得注意的是：令 $\boldsymbol{b}$ 为激波波阵面的速度，于是由图 2.12（b）可知此时相对速度为

$$\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{b}=-w_1\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{ut}=w_1\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{ut}\equiv\boldsymbol{W}_1+\boldsymbol{u} \tag{2-2-25}$$

$$\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{b}=-w_2\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{ut}=w_2\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{ut}\equiv\boldsymbol{W}_2+\boldsymbol{u} \tag{2-2-26}$$

式中，v 由式（2-2-20）定义。

如果在 $\boldsymbol{b}$ 上再附加一个 $\boldsymbol{ut}$（这里 $\boldsymbol{t}$ 为激波的单位切矢量），即定义一个 $\boldsymbol{b}'$，$\boldsymbol{b}'\equiv\boldsymbol{b}+\boldsymbol{ut}$，于是此时的相对速度便成为

$$\boldsymbol{V}_1-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u})=\boldsymbol{V}_1-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{ut})=-w_1\boldsymbol{n}_1=w_1\boldsymbol{n}_2 \tag{2-2-27}$$

$$\boldsymbol{V}_2-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u})=\boldsymbol{V}_2-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{ut})=-w_2\boldsymbol{n}_1=w_2\boldsymbol{n}_2 \tag{2-2-28}$$

它变成了一个等价的正激波问题。也就是说只要引进一个适当的 $\boldsymbol{b}'$，则所有的激波都可以看作是正激波。另外，如果考虑到激波面形状所满足的方程 $f(\boldsymbol{r},t)=0$ 并注意到式（2-2-25）、式（2-2-26）以及激波面的单位法矢量 $\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \tag{2-2-10*}$$

于是式（2-2-24）中的第 1、2 及第 4 个式子又可改写为如下形式

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1\boldsymbol{W}_1\cdot(\nabla f)=\rho_2\boldsymbol{W}_2\cdot(\nabla f)\\&p_1(\nabla f)\cdot(\nabla f)+\rho_1(\boldsymbol{W}_1\cdot\nabla f)^2=p_2(\nabla f)\cdot(\nabla f)+\rho_2(\boldsymbol{W}_2\cdot\nabla f)^2\\&h_1(\nabla f)\cdot(\nabla f)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{W}_1\cdot\nabla f)^2=h_2(\nabla f)\cdot(\nabla f)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{W}_2\cdot\nabla f)^2\end{aligned}\right\} \tag{2-2-24*}$$

式中，∇f 是 f 对空间的梯度。

显然，式（2-2-24）*是一个便于计算机上使用的通用形式。另外，由式（2-2-24）中的前两个式子还可能推出

$$w_1w_2=\frac{[P]}{[\rho]} \tag{2-2-29}$$

将上式两边同乘 $\rho_1\rho_2$，得

$$J^2=-\frac{[P]}{[v]} \tag{2-2-30}$$

这里 J 为穿过激波面的质量通量，$J=\rho_1w_1=\rho_2w_2$，而 $v=1/\rho$ 为比容。现在定义激波马赫数 M_s（因 w_1 代表相对速度的法向分量，因此 M_s 也叫激波前法向分速的马赫数，简称波前法向马赫数，并且也常用 M_{1n} 表示）

$$M_s\equiv M_{1n}\equiv\frac{w_1}{a_1} \tag{2-2-31}$$

借助于式（2-2-24）中的连续方程与动量方程，并注意 M_s 的定义式，于是很容易推得



$$\frac{[P]}{\rho_1 a_1^2} = -M_s \frac{[w]}{a_1} = -M_s^2 \frac{[v]}{v_1} \tag{2-2-32}$$

由上式可得到

$$[w][w] = -[P]\left[\frac{1}{\rho}\right] \tag{2-2-33}$$

式中，v 代表比容。

引进激波强度 Π 的定义，即

$$\Pi \equiv \frac{[P]}{\rho_1 a_1^2} \tag{2-2-34}$$

于是激波马赫数又可表示为

$$M_s = M_{1n} = -\frac{\Pi}{[w]/a_1} \tag{2-2-35}$$

为了说明它的大小，我们进行如下计算：利用热力学函数及泰勒级数展开并注意到基本气动导数 Γ 的定义（见式（1-9-95）），于是可以推出激波马赫数 M_s 的如下表达式

$$M_s = 1 + \frac{\Gamma_1}{2}\Pi + \frac{1}{4}\left[\frac{a_1^2 \Gamma_1}{3 v_1 T_1}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S + \frac{3\Gamma_1^2}{2} + \frac{a_1^6}{3 v_1^4}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial P^3}\right)_S\right]\Pi^2 + \cdots \tag{2-2-36}$$

式中，Γ 为基本气动导数；Π 为激波强度；a 与 v 分别为声速与比容；式中下注脚 1 代表激波前的参数。

显然，对于压缩激波，由于 $\Gamma_1 > 0$ 且 $\Pi > 0$，因此 $M_s \geqslant 1$。另外，由式（2-2-24）中的能量方程并注意利用式（2-2-29）便得到

$$[h] = v_1[P] + \frac{1}{2}[v][P] \tag{2-2-37}$$

这就是 Rankine-Hugoniot（朗肯-雨贡纽）方程。它又可写为

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \tag{2-2-38}$$

对于完全气体，则 $h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}$，于是式（2-2-38）又可写为如下常见的表达形式

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{v_2}{v_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{v_2}{v_1} - 1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} \tag{2-2-39}$$

如果把 $h(s,P)$ 和 $v(s,P)$ 都看作 s 与 P 的函数，并且将 $[h]$ 和 $[v]$ 作泰勒级数展开，并注意到

$(\partial h/\partial s)_P = T$ 和 $(\partial h/\partial P)_s = v$ 的恒等关系式，则式（2-2-37）便可变成如下形式

$$[S] = \frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial P^2}\right)_S [P]^3 + O\left([P]^4\right) \quad (2-2-40)$$

式中，v 为比容。

注意在上式推导中只保留了关于 $[P]$ 的三次项，正由于高次项被略去，因此上式多用于弱激波的计算。引进 Γ 与 Π 后，则式（2-2-40）又可改写为无量纲形式

$$\frac{T_1[S]}{a_1^2} = \frac{1}{6}\Gamma_1 \Pi^3 + O(\Pi^4) \quad (2-2-41)$$

式中，Γ 与 Π 分别由式（1-9-95）与式（2-2-34）定义。

式（2-2-41）表明：通过激波的熵增与 Π 的三次方成正比。最后，总结一下强间断面上的三个条件：一个是连续条件，即式（2-2-24）中的第一个式子；另一个是动量条件，即式（2-2-15），第三个是能量条件，即式（2-2-39），它们是气体动力学中处理激波问题时常用的三个表达式，即

$$\left.\begin{aligned} &[\rho w] = 0 \\ &[\rho w \boldsymbol{V}] = \boldsymbol{n}_1[P] = -\boldsymbol{n}_2[P] \\ &\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2} \end{aligned}\right\} \quad (2-2-42)$$

式中，w 由式（2-2-13）定义，w_1 与 w_2 分别代表着相对速度即 $(\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{b})$ 与 $(\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{b})$ 沿法向分量的大小。

2.2.4 激波前后的参数关系

对于完全气体，Rankine-Hugoniot 方程式（2-2-39）可以重新整理为如下形式

$$\frac{[v]}{v_1} = \frac{\left[\frac{1}{\rho}\right]}{\frac{1}{\rho_1}} = -\frac{2[P]/P_1}{2\gamma + (\gamma+1)[P]/P_1} \quad (2-2-43)$$

式中，v 代表比容。

如果将上式代入到式（2-2-32）便可得到如下三个关系式

$$\frac{[P]}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_{1n}^2 - 1) \quad (2-2-44)$$



$$\frac{[w]}{a_1}=-\frac{2}{\gamma+1}(M_{1n}-\frac{1}{M_{1n}}) \tag{2-2-45}$$

$$\frac{[\frac{1}{\rho}]}{1/\rho_1}=-\frac{2}{\gamma+1}\left(1-\frac{1}{M_{1n}^2}\right) \tag{2-2-46}$$

引进激波后马赫数 M_{2n} 的定义，即 $M_{2n}=w_2/a_2$，它又可改写为

$$M_{2n}=\frac{w_1+[w]}{a_1}\frac{a_1}{a_2}=\left(M_{1n}+\frac{[w]}{a_1}\right)\frac{a_1}{a_2}$$

将上式两边平方，得

$$M_{2n}^2=\left(M_{1n}+\frac{[w]}{a_1}\right)^2\frac{T_1}{T_2}=\left(M_{1n}+\frac{[w]}{a_1}\right)^2\frac{P_1/\rho_1}{P_2/\rho_2}$$

将式（2-2-44）与式（2-2-46）代入上式后得到

$$M_{2n}^2=\frac{M_{1n}^2+\dfrac{2}{\gamma-1}}{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}M_{1n}^2-1} \tag{2-2-47}$$

另外，气体（假设为完全气体）通过激波的熵增由式（1-5-44a）给出，即

$$\Delta s\equiv s_2-s_1=c_P\ln\frac{T_2}{T_1}-R\ln\frac{P_2}{P_1}=c_P\ln\frac{v_2}{v_1}+c_V\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{2-2-48}$$

式中，c_V 与 c_P 分别为定容比热容与定压比热容；v 为比容。

由于 $s_{02}-s_{01}=s_2-s_1$，并注意到通过激波时总焓不变，即 $T_{02}=T_{01}$，于是在两个滞止状态之间应用上式时可得

$$[s]=-R\ln\frac{P_{02}}{P_{01}} \tag{2-2-49}$$

或者

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}=\exp\left(-\frac{[s]}{R}\right) \tag{2-2-50}$$

由于 $[s]>0$，所以 $P_{02}<P_{01}$，即通过激波时总压总是减小的。如果将式（2-2-44）与式（2-2-46）代入到式（2-2-48）后便得到用激波马赫数 M_{1n} 表达的熵增公式，即

$$\exp\left(\frac{[s]}{R}\right)=\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_{1n}^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}\left[\frac{2}{(\gamma+1)M_{1n}^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{2-2-51}$$

§ 2.3 正激波与斜激波

所谓正激波指气体运动的速度方向与该激波面正交。对于正激波，我们仅研究两类：一类是定常气体运动时所产生的固定正激波，又称驻激波；另一类是运动正激波。

2.3.1 定常气体运动的固定正激波

当$\boldsymbol{b}'=0$时，则式（2-2-27）与式（2-2-28）简化为

$$\boldsymbol{V}_1 = w_1\boldsymbol{n}_2 = V_1\boldsymbol{n}_2 \tag{2-3-1}$$

$$\boldsymbol{V}_2 = w_2\boldsymbol{n}_2 = V_2\boldsymbol{n}_2 \tag{2-3-2}$$

式中，$\boldsymbol{n}_2$为沿流动方向的单位矢量。

因此，对于固定正激波式（2-2-24）中的部分式子便可写成如下形式

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{2-3-3}$$

$$\rho_1 V_1^2 + P_1 = \rho_2 V_2^2 + P_2 \tag{2-3-4}$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{2-3-5}$$

而这时式（2-2-44）、式（2-2-45）、式（2-2-46）与式（2-2-47）可写为

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{2-3-6}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \tag{2-3-7}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \tag{2-3-8}$$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \dfrac{2}{\gamma-1}}{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}M_1^2 - 1} \tag{2-3-9}$$

对于正激波，则有$M_{1n} = M_1 \equiv V_1/a_1$，$M_{2n} = M_2 \equiv V_2/a_2$；另外，由气体的状态方程$P = \rho RT$，以及式（2-3-6）、式（2-3-8），则很容易得到温度比T_2/T_1的表达式，即



$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{P_2}{P_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_1^2-1\right)}{\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}M_1^2} \tag{2-3-10}$$

类似的，由式（2-2-51）可得到用 M_1 表达的熵增计算式。另外，如果引进速度系数（见式（1-8-22））以及 λ 数与 M 数间的关系（见式（1-8-25）），则式（2-3-9）又可变为

$$\lambda_1\lambda_2=1 \tag{2-3-11}$$

这就是著名的普朗特（Prandtl）方程，又称普朗特关系式。它又可写为

$$V_1V_2=a_*^2 \tag{2-3-12}$$

式中，a_*为临介声速。

由式（1-8-21）知道：$(a_*)_1=(a_*)_2=a_*$，即激波前与激波后的临介声速相等。式（2-3-12）也表明：当激波前 $V_1>a_*$ 时，则波后必定有 $V_2<a_*$。也就是说，对于固定的正激波当其前方来流为超声速时，则穿过正激波后必定为亚声速流动。

例 7　超声速瑞利（Rayleigh）皮托管测总压。对于定常亚声速流动，可利用皮托管测出总压 P_0 与静压 P，并由此可得到马赫数 M；但对于定常的超声速流动，皮托管只能测到激波后的总压 P_{02}，如果欲计算激波前的马赫数 M_1，问是否还需测量激波前的压力 P_1？

解　如图 2.13，需要测 P_1。这是由于

$$\frac{P_{02}}{P_1}=\frac{P_{02}}{P_2}\frac{P_2}{P_1}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)=\frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \tag{2-3-13}$$

于是便得到了用 M_1 表达 P_{02}/P_1 的计算式，因此只要测得 P_{02} 与 P_1 则便可求出 M_1 值。当然，测得 P_{02} 与 P_1 后查书后附表 2 也可以得到 M_1 值。

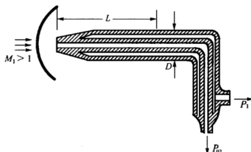


图 2.13　皮托管测超声速流动时的总压（波后总压）

2.3.2 运动正激波

在许多实际场合下形成的激波，在空间中并不是静止的，而是以一定的速度向前推进，这里仅讨论正激波的运动。设正激波的运动速度为 $\boldsymbol{N}(t)$，于是把坐标系固连在激波上考察气体的相对运动。显然由式（2-2-25）与式（2-2-26）得（此时 $\boldsymbol{u}=0$）

$$\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{N}=\boldsymbol{W}_1=w_1\boldsymbol{n}_2=(V_1-N)\boldsymbol{n}_2 \tag{2-3-14}$$

$$\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{N}=\boldsymbol{W}_2=w_2\boldsymbol{n}_2=(V_2-N)\boldsymbol{n}_2 \tag{2-3-15}$$

于是对运动正激波，则式（2-2-24）中的部分式子便可写成如下形式

$$\left.\begin{aligned}&\rho_2(V_2-N)=\rho_1(V_1-N)\\&P_2+\rho_2(V_2-N)^2=P_1+\rho_1(V_1-N)^2\\&h_2+\frac{1}{2}(V_2-N)^2=h_1+\frac{1}{2}(V_1-N)^2\end{aligned}\right\} \tag{2-3-16}$$

当然对运动正激波，也可用式（2-2-14）、式（2-2-15）、式（2-2-16）写出，此时变为

$$\left.\begin{aligned}&\rho_2(V_2-N)=\rho_1(V_1-N)\\&\rho_2V_2(V_2-N)+P_2=P_1+\rho_1V_1(V_1-N)\\&\rho_2\left(e_2+\frac{V_2^2}{2}\right)(V_2-N)+P_2V_2=\rho_1\left(e_1+\frac{V_1^2}{2}\right)(V_1-N)+P_1V_1\end{aligned}\right\} \tag{2-3-17}$$

可以证明方程组式（2-3-16）与式（2-3-17）等价。

下面分两种情况讨论：一种是波前气体静止即 $V_1=0$ 的情况，另一种是 $V_1\neq0$ 的情况。

1. $V_1=0$ 时

这时式（2-3-17）简化为

$$\left.\begin{aligned}&\rho_2(V_2-N)=-\rho_1N\\&P_2-P_1=-\rho_2V_2(V_2-N)=\rho_1V_2N\\&\rho_1N\left(e_2+\frac{V_2^2}{2}\right)-P_2V_2=\rho_1e_1N\end{aligned}\right\} \tag{2-3-18}$$

而式（2-3-16）简化为



$$\left.\begin{aligned}&\rho_1 N=\rho_2(N-V_2)\\&P_1+\rho_1 N^2=P_2+\rho_1 N(N-V_2)\\&h_1+\frac{1}{2}N^2=h_2+\frac{1}{2}(N-V_2)^2\end{aligned}\right\}\tag{2-3-19}$$

于是仿照驻激波的推导过程可得到

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{N}{a_1}\right)^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\tag{2-3-20}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)(N/a_1)^2}{2+(\gamma-1)(N/a_1)^2}\tag{2-3-21}$$

由式（2-3-19）中第一式并注意应用式（2-3-21）消去 ρ_2/ρ_1 项，得

$$V_2=\frac{2N}{\gamma+1}\left[1-\left(\frac{a_1}{N}\right)^2\right]\tag{2-3-22}$$

或者

$$N=\frac{\gamma+1}{4}V_2+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}V_2\right)^2+a_1^2}=a_1\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\tag{2-3-23}$$

式中，V_2 叫激波的伴随速度。

显然激波强度越大（即 N 越大），则 V_2 也越大。V_2 既可以为亚声速，也可以为超声速。当波前气体静止时，波后伴随速度的方向总指向激波运动的方向。另外还需说明的是：式（2-3-23）右边那两个表达式可分别由式（2-3-20）与式（2-3-22）推出。

2. $V_1\neq 0$ 时

这里假设 V_1, P_1, ρ_1 及 N 为已知量，欲计算 V_2, P_2, ρ_2。为此把参考系固连在激波前的气流上，在这个新的参考系内 $\tilde{V}_1=0, \tilde{V}_2=V_2-V_1$，激波速度变为 $\tilde{N}=N-V_1$，对于这个新的参考系，借助于式（2-3-20）～式（2-3-23）式便得到如下几个表达式

$$\tilde{V}_2=V_2-V_1=\frac{2(N-V_1)}{\gamma+1}\left[1-\left(\frac{a_1}{N-V_1}\right)^2\right]\tag{2-3-24}$$

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{N-V_1}{a_1}\right)^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\tag{2-3-25}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)\left(\dfrac{N-V_1}{a_1}\right)^2}{2+(\gamma-1)\left(\dfrac{N-V_1}{a_1}\right)^2}\tag{2-3-26}$$

$$\tilde{N} = N - V_1 = a_1\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{2-3-27}$$

3. 运动正激波在固体壁面处的反射

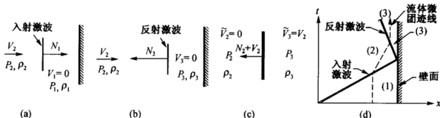


图 2.14　运动正激波遇固壁后的反射

如图 2.14（a）与图 2.14（d）所示，运动正激波在静止的气体中传播并假设静止气体中有一个固定的刚性平壁。当激波波阵面到达壁面的瞬间，气体受到壁面的压缩，将产生一道正激波（即反射波）向左传播，因此原来初始波的波后气体现在变成为反射波的波前气体。反射波所到之处，波后气体速度 $V_3=0$，状态为 P_3, ρ_3 如图 2.14（b）与图 2.14（d）所示。显然，反射激波的波前气体速度不为零，为此我们把新参考系固连在反射波的波前气体上，如图 2.14（c）所示，在此坐标系下，波前速度 $\tilde{V}_2=0$，激波速度为 (N_2+V_2) 其方向向左，波后速度为 $\tilde{V}_3=V_2$；于是借助于式（2-3-23）得到

$$N_2+V_2=\frac{\gamma+1}{4}\tilde{V}_3+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\tilde{V}_3\right)^2+a_2^2}=\frac{\gamma+1}{4}V_2+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}V_2\right)^2+a_2^2} \tag{2-3-28}$$

式中，a_2 可借助于 Rankine-Hugoniot 关系（2-2-39）式得到，即

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2=\frac{P_2}{P_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}-\dfrac{\rho_1}{\rho_2}}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}-\dfrac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{2-3-29}$$

另外，借助于式（2-3-20）可得到 P_3/P_2 的表达式

$$\frac{P_3}{P_2}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{N_2+V_2}{a_2}\right)^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{2-3-30}$$

作为课后练习，利用 Rankine-Hugoniot 关系（简称 R-H 关系式）可以证明下式成立，即

$$\frac{P_3}{P_2}=\frac{(3\gamma-1)P_2-(\gamma-1)P_1}{(\gamma-1)P_2+(\gamma+1)P_1} \tag{2-3-31}$$

当然以上各计算步骤也可以利用相应的正激波气动函数表（见附表 2）得到。



4. 两道不同方向运动的正激波相遇

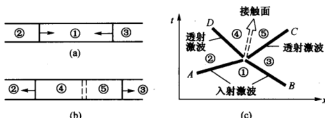


图 2.15　两道不同方向的运动正激波相遇

两道不同方向的运动正激波，如图 2.15(a)所示，在某一时刻相遇时，由于波后气体相互压缩因此将产生两道新的激波。这里分两种情况讨论：

① 如果相遇前两道正激波强度相等，则相遇后产生的两道新的正激波其强度也相等。

② 如果相遇前两道正激波的强度不等，则相遇瞬时两种不同状态的气流相接触，除要产生两道新的激波向不同的方向传播外，同时还会形成一道切向间断面，即两种不同状态气体的接触面，如图 2.15(b)与图 2.15(c)所示。接触面两侧满足 $P_4 = P_5 = P_C, V_4 = V_5 = N_C$；接触面两侧温度和密度不等。接触面把相遇后新产生的激波后的区域分成了两部分即④与⑤区。如果相遇前激波前后①，②，③区的参数以及 N_1, N_2 已知，则相遇后仅需确定下面的六个参数（即 $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \rho_4, \rho_5, P_C, N_C$），现略加叙述：

（a）由已知的 P_1, ρ_1, V_1 及 N_1 值，借助于式（2－3－24）、式（2－3－25）及式（2－3－26）式便可算出 V_2, P_2 及 ρ_2 值，再由状态方程便得到 a_2 值；

（b）由已知的 P_1, ρ_1, V_1 及 N_2 值，借助上述三式同样可算出 V_3, P_3 及 ρ_3 值，再由状态方程便得到 a_3 值；

（c）由前面算出的 P_3, V_3, a_3 值以及 P_2, V_2, a_2 值，借助于式（2－3－25）以及接触面压强相等（即 $P_5 = P_4$）的条件便得到

$$\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{\tilde{N}_1 - V_3}{a_3}\right) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]P_3 = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{\tilde{N}_2 - V_2}{a_2}\right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]P_2 \qquad (2-3-32)$$

（d）由前面算出的 V_3, a_3 以及 V_2, a_2 值，借助于式（2－3－24）以及接触面速度相等（即 $V_5 = V_4$）的条件可得到

$$V_3 + \frac{2(\tilde{N}_1 - V_3)}{\gamma+1}\left[1 - \left(\frac{a_3}{\tilde{N}_1 - V_3}\right)^2\right] = V_2 + \frac{2(\tilde{N}_2 - V_2)}{\gamma+1}\left[1 - \left(\frac{a_2}{\tilde{N}_2 - V_2}\right)^2\right] \qquad (2-3-33)$$

于是由式（2-3-32）与式（2-3-33）联立便可解出 $\tilde{N}_1$ 与 $\tilde{N}_2$ 值。显然一旦求出了 $\tilde{N}_1$ 与 $\tilde{N}_2$ 值，借助于式（2-3-24）、式（2-3-25）、式（2-3-26）式便可计算出④区与⑤区的 P,ρ 以及 N_C 值。

2.3.3 斜激波

在讨论了一般激波及正激波之后，斜激波问题就变得非常简单了，本节仅对斜激波问题的重要特点与常用公式作扼要介绍。

一、斜激波与正激波间的关系

图 2.16 给出了斜激波常用的一些符号以及与正激波间的关系。在斜激波中，角 β 定义为激波角，它是来流与激波面的夹角；角 θ 定义为气流偏转角，它是 V_1 与 V_2 间的夹角。正如以前所讲过的，任何一个激波经过变换后都可以看作正激波，斜激波与正激波在本质上是一样的，它是站在不同的惯性参考系上观察流动产生的差异造成的。因此我们可从正激波的关系式导出斜激波的关系式，只要注意到

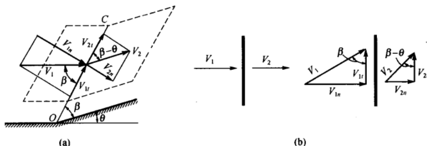


图 2.16 对斜激波所取的控制面及常用的一些符号

$$V_{1n}=V_1\sin\beta,\quad V_{2n}=V_2\sin(\beta-\theta) \tag{2-3-34}$$

或

$$M_{1n}=M_1\sin\beta,\quad M_{2n}=M_2\sin(\beta-\theta) \tag{2-3-35}$$

同样，在斜激波中存在着气体穿过激波时切向分速度保持不变的结论，即

$$V_{1t}=V_{2t}=V_t \tag{2-3-36}$$

由图 2.16(b)可得

$$V_t=V_{1n}\cot\beta=V_{2n}\cot(\beta-\theta) \qquad (2-3-36)*$$



注意到 $V_{1n} > V_{2n}$，因此 $\beta > \beta - \theta$，即 $\theta > 0$，这表明：气流通过斜激波后，向着贴近激波面的一边偏转。下面不加推导地给出斜激波的基本关系式。

1. R-H 关系

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{p_2}{p_1}+1}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}+\dfrac{p_2}{p_1}} \tag{2-2-39}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}-1}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}-\dfrac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{2-2-39}$$

2. 普朗特关系式

$$V_{1n}V_{2n} = a_*^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_t^2 = \frac{2}{\gamma+1}a_1^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_{1n}^2 \tag{2-3-37}$$

$$\lambda_{1n}\lambda_{2n} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\frac{V_t}{a_*}\right)^2 \tag{2-3-38}$$

从上式可以看出，因 $\lambda_{1n} > 1$ 则 λ_{2n} 必然小于 1，即 $V_{2n} < a_*$，但 V_2 并不一定小于 a_2，也就是说斜激波后的气流可以是超声速，也可以是亚声速的。

3. 密度比、压力比、温度比、速度比、熵增值以及与 $M_1 \sin\beta$ 间的关系

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\dfrac{\gamma+1}{2}M_1^2\sin^2\beta}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\sin^2\beta} = \frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}{2+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta} \tag{2-3-39}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2\sin^2\beta - 1) \tag{2-3-40}$$

压力系数

$$C_p = (p_2 - p_1)/(\rho_1 V_1^2/2) = \frac{4}{\gamma+1}\left(\sin^2\beta - \frac{1}{M_1^2}\right) \tag{2-3-41}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2\sin^2\beta - (\gamma-1)][(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta + 2]}{(\gamma+1)^2 M_1^2\sin^2\beta} \tag{2-3-42}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = -\ln\frac{p_{02}}{p_{01}} = \ln\left\{\left[1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2\sin^2\beta-1)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}{(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta+2}\right]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}\right\} \tag{2-3-43}$$

4. 激波角 β 与偏转角 θ 的关系

由图 2.16（b）可知

$$\tan\beta = \frac{V_{1n}}{V_{1t}}, \qquad \tan(\beta-\theta) = \frac{V_{2n}}{V_{2t}}$$

但 $V_{1t} = V_{2t} = V_t$，又利用连续方程和式（2－3－39），则得

$$\frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\theta)} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}{2+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta} \tag{2-3-44}$$

注意到

$$\tan(\beta-\theta) = \frac{\tan\beta - \tan\theta}{1+\tan\beta\tan\theta}$$

经过整理后得

$$\tan\theta = 2\cot\beta\frac{M_1^2\sin^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma+\cos 2\beta)+2} \tag{2-3-44}$$

由式（2－3－39）～式（2－3－43）可知，在 M_1 取定值的情况下，激波角 β 愈大，则激波愈强。当 $\beta = 90°$ 或 $\beta = \arcsin\frac{1}{M_1}$ 时，$\theta = 0$，即在正激波的情况下以及当激波弱化为马赫波时，则气流偏转角为零。当 β 从马赫角 μ 变到 $\pi/2$ 时，θ 总是正值，那么在这个范围内，θ 角必有一极大值 θ_{max}。当 θ 大于 θ_{max} 时，这时就不再有附体的斜激波解，而出现脱体激波。这里最大值 θ_{max} 和相应的 β_m 值可通过对式（2－3－44）微分得出，即

$$\sin^2\beta_m = \frac{1}{\gamma M_1^2}\left[\frac{\gamma+1}{4}M_1^2 - 1 + \sqrt{(1+\gamma)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2+\frac{\gamma+1}{16}M_1^4\right)}\right] \tag{2-3-45}$$

$$\tan\theta_{max} = \frac{2[(M_1^2-1)\tan^2\beta_m - 1]}{\tan\beta_m[(\gamma M_1^2+2)(1+\tan^2\beta_m)+M_1(1-\tan^2\beta_m)]} \tag{2-3-46}$$

为了直观起见，将式（2－3－44）做成了曲线，如图 2.17 所示。

应该指出，在绘制上述曲线时将要遇到给定一个确定的 M_1 和 θ 值时，对应的 β 有多值的现象。事实上首先将式（2－3－44）改写为如下形式的三次方程

$$\tan^3\beta + A\tan^2\beta + B\tan\beta + C = 0 \tag{2-3-47}$$

式中



$$
\left.\begin{aligned}
A &= \frac{1-M_1^2}{\tan\theta\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)} \\
B &= \frac{1+\dfrac{\gamma+1}{2}M_1^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2} \\
C &= \frac{1}{\tan\theta\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2-3-48)
$$

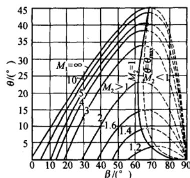


图 2.17　斜激波的θ与 β 关系曲线

它有三个根，一个根已能证实无意义[15]；另外两个根中，一个较小的 β，它对应于 $M_2>1$，称这时的 β 所对应的激波为弱斜激波；另一个较大的 β，它所对应的 $M_2<1$，这时 β 所对应的激波为强斜激（图 2.17 中用虚线表示）。也就是说对任一给定的偏转角 θ，存在两个性质不同的解，一个为强解 s，一个为弱解 w；在具体问题中到底是取强激波解还是取弱激波解，取决于产生激波的具体条件，即气流的来流 M 数和边界条件。在超声速气流中产生激波有下面几种情况[16, 15]：

（a）对于气流的偏转角所规定的激波。经无数的实验观察，可以得出如下结论：凡是由气流偏转角 θ 规定的激波强度，只要是附体激波，都取弱激波解。

（b）对于压力条件所决定的激波。这涉及具有自由边界的一类问题，例如超声速气流从喷管射出时，如果气流的出口压力 p_e 低于背压 p_B，那么超声速气流会产生斜激波以提高压力，这时激波的强度由压比 p_B/p_e 来决定，这就是自由边界上的压力条件。总之，求解这类问题，要根据压比 p_B/p_e 值及波前马赫数 M_1 的值来决定激波的强度。

（c）对于壅塞所决定的激波。尤其是在管道流动中可能发生某种壅塞现象的情况下，这时会迫使超声速的上游气流在某处发生激波，使气流作某种调整。这种激波的强度既不是由气流方向所规定，也不由环境压力所规定，而是由最大流量的极限条件所决定。

5. M_2 与 M_1 的关系

借助于（2-3-9）式，可得到斜激波下 M_1 与 M_2 间的关系，即

$$
M_2^2=\frac{M_1^2+\dfrac{2}{\gamma-1}}{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}M_1^2\sin^2\beta-1}+\frac{M_1^2\cos^2\beta}{\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\sin^2\beta+1} \qquad (2-3-49)
$$

从上式可以看出：对于一定的 M_1 来讲，如果 β 增大，M_2 就降低；β 取较小值时，$M_2>1$；β 大过一定值时，$M_2>1$。如果令 β^* 和 θ^* 分别表示 $M_2=1$ 时的 β 和 θ 值。从图 2.17 的曲线可以看出，θ^* 和 θ_{max}，β^* 和 β_m 都是很接近的，这里 β_m 表示当 θ 取最大值时所对应的 β 值。

二、激波极线

激波极线是在速度平面上表示 V_1 和 V_2 关系的速端曲线，借助它不仅可以直观地了解斜激波前后的速度的变化关系，而且可以很清楚地说明激波的相交与反射等现象。现在来推导激波极线方程。为此，利用斜激波的普朗特关系

$$V_{1n}V_{2n}=a_*^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_t^2$$

这里假设速度 V 在 x 和 y 轴上的分量分别用 V_x 和 V_y 来表示，并取 x 轴的方向与 V_1 同，并注意到如下几何关系（如图 2.18（a）所示）

$$V_{1n}=V_1\sin\beta,\quad V_t=V_1\cos\beta$$

$$V_{2n}=V_{1n}-\sqrt{V_{2y}^2+(V_1-V_{2x})^2}$$

$$\sin\beta=\frac{V_1-V_{2x}}{\sqrt{V_{2y}^2+(V_1-V_{2x})^2}},\quad \cos\beta=\frac{V_{2y}}{\sqrt{V_{2y}^2+(V_1-V_{2x})^2}}$$

代入普朗特关系，经过整理后，可得到激波极线方程

$$V_{2y}^2=(V_1-V_{2x})^2\frac{V_{2x}-\dfrac{a_*^2}{V_1}}{\dfrac{2}{\gamma+1}V_1+\dfrac{a_*^2}{V_1}-V_{2x}} \tag{2-3-50}$$

或者

$$\lambda_{2y}^2=(\lambda_1-\lambda_{2x})^2\frac{\lambda_1\lambda_{2x}-1}{\dfrac{2}{\gamma+1}\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_{2x}+1} \tag{2-3-51}$$

式中，$\lambda_{2x}=\dfrac{V_{2x}}{a_*}$，$\lambda_{2y}=\dfrac{V_{2y}}{a_*}$。

在给定了 λ_1 后，就可以在速度平面上画出 λ_{2x} 与 λ_{2y} 的曲线，这种曲线是由 Busemann 引进的，它就是大家熟知的 Descartes 叶形线[1]，又称激波极线，如图 2.18（b）所示。如果给定激波前的来流参数以及激波后的偏转角 θ 或激波角 β，就可以从激波极线图上求得激波后的流速 λ_2，从而得到激波后的其他参数。从激波极线图上可以看出，在某一给定的 λ_1 下，对应某一偏转角 θ，这时有三个解，即图 2.18（b）中的三个交点 1，2，3。点 3 相当于膨胀的情况（因 $V_2>V_1$），这违反热力学第二定律，所以点 3 没有实际意义，应该去掉。点 2 相当于弱激波的情况，点 1 相当于强激波的情况。

下面举例说明斜激波的计算及有关数值表的应用。



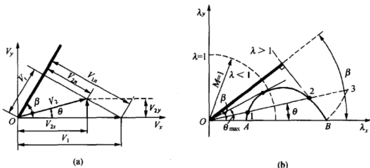


图 2.18 激波极线

例 8 设 $M_1 = 2.5$ 的超声速气流以零攻角绕过尖楔，其半顶角 $\theta = 10°$，求 β，p_2/p_1，M_2，p_{02}/p_{01}，T_2/T_1 和 ρ_2/ρ_1 的值。

解 以 $M_1 = 2.5$，$\theta = 10°$ 从斜激波表上可查得两个 β 值，本题是属于给定气流偏转角决定激波的这一类，因此只出现弱斜激波即 β 取较小的一个值，这里取 $\beta = 31.8°$；接着可算出 $p_2/p_1 = 1.87$，$M_2 = 2.086$，$p_{02}/p_{01} = 0.975$，$T_2/T_1 = 1.2$，$\rho_2/\rho_1 = 1.56$。

例 9 设空气自超声速喷管喷出（参见图 2.19），出口处 $M_1 = 2.2$，$p_1 = 0.187$ 大气压，而外界压力 $p_B = 1$ 大气压，求气流出口后产生的激波之后的 M_2, β, θ 值。

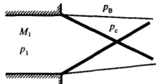


图 2.19 超声速气流从喷口射出

解 由斜激波表，按给定的 $M_2 = 2.2$，压比 $p_2/p_1 = 5.348$，查出

$$\beta = 81°,\quad \theta = 15.73°,\quad M_2 = 0.607$$

这是强激波解的情况。

例 10 设 $M_1 = 3.0$ 的超声速气流流过一个连续折转的凹角，其折角分别为 $\theta_1 = 4°$，$\theta_2 = 6°$，$\theta_3 = 10°$。试求气流折转后熵的变化。如果是同样的来流，经过一次折转，其偏转角为 $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$，则熵的变化又是多少？试比较上述两种结果。

解 （1）气流经三次折转，穿过三道斜激波的计算：

按 $M_1 = 3.0, \theta_1 = 4°$，查斜激波表，选定弱斜激波解，得 $\beta_1 = 22.36°$，$M_2 = 2.80$。又因 $M_{1n} = M_1 \sin\beta_1 = 1.14$，查正激波表，得 $\dfrac{\Delta S_1}{R} = -\ln\dfrac{p_{02}}{p_{01}} = -\ln 0.997\,26 = 0.002\,74$。

同理，按 $M_2 = 2.80, \theta_2 = 6°$，查表得 $\beta_2 = 25.46°$，$M_3 = 2.52$。因 $(M_{2n})_2 = M_2 \sin\beta_2 = 1.20$，查表得 $\dfrac{\Delta S_2}{R} = 0.007\,23$。

同理，按$M_3=2.52, \theta_3=10°$，查表得$\beta_3=31.87°$，$M_4=2.08$。因$(M_{3n})_3=M_3\sin\beta_3=1.33$，查表得 $\frac{\Delta S_3}{R}=0.026\,52$。

所以 $\Delta S=(\Delta S_1+\Delta S_2+\Delta S_3)=0.036\,49\times287=10.472\,6$ （J/kg·K）

（2）计算气流经一次折转，其转角为$\theta=4°+6°+10°=20°$时的斜激波。按$M_1=3.0, \theta=20°$，查表得$\beta=37.76°$，因$M_{1n}=M_1\sin\beta=1.837$，查得

$$\frac{\Delta s'}{R}=-\ln 0.796\,11=0.228\,02,$$

算出

$$\Delta s'=0.22802\times287=65.441\,7 \text{（J/kg·K）}$$

（3）两者比较

$$\frac{\Delta s'}{\Delta s}=\frac{65.441\,7}{10.472\,6}=6.25$$

显然，一次折转同三次折转相比较，熵增值要大 6.25 倍，因此采取多个斜激波来阻滞超声速气流可以大大减少机械能的损失。

例 11 设$M_1=3.0$的超声速气流流过顶角为30°的楔形体，气体的静压$P_1=1.0\times10^4$ Pa，静温为$T_1=216.5$ K，试用正激波表计算该流动工况下激波后的静压P_2，静温T_2，密度ρ_2，速度V_2，总压P_{02}和马赫数M_2。

解 将斜激波基本方程

$$\rho_1V_{1n}=\rho_2V_{2n} \quad \text{（连续方程）} \quad (2-3-52)$$

$$\rho_2V_{2n}^2+p_2=\rho_1V_{1n}^2+p_1 \quad \text{（法向动量方程）} \quad (2-3-53)$$

$$V_{2t}=V_{1t} \quad \text{（切向动量方程）} \quad (2-3-36)$$

$$h_1+\frac{V_{1n}^2}{2}=h_2+\frac{V_{2n}^2}{2} \quad \text{（能量方程）} \quad (2-3-54)$$

与正激波关系式（2-3-3）、式（2-3-4）、式（2-3-5）作比较不难看出，如果将描述正激波的基本方程式中的激波前后速度换成斜激波前后的法向分速度便得了描述斜激波的基本方程式。这种更换使我们有可能利用正激波表去计算斜激波。考虑到斜激波前后的法向马赫数

$$M_{1n}=M_1\sin\beta \quad (2-3-55)$$

$$M_{2n}=M_2\sin(\beta-\theta) \quad (2-3-56)$$

若将附表 2 中的第一列换成斜激波的法向马赫数M_{1n}，则该表中第二列便应为斜激波波后法向马赫数M_{2n}。计算时首先借助于附表 3 查出激波角β，再由式（2-3-55）算出M_{1n}。值



得注意的是，按照上述方法计算斜激波，实际上就是把气体通过斜激波的流动看作是以法向分速通过正激波的流动。这样处理虽然不会影响激波前后的静参数，但却改变了气流的滞止参数，因为法向分速只是气流速度的一部分。引进 T_{0n} 与 P_{0n}，其定义式为

$$T_{0n}=T+\frac{V_n^2}{2C_p}=T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_n^2\right) \tag{2-3-57}$$

$$P_{0n}=P\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_n^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=P\left(\frac{T_{0n}}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{2-3-58}$$

式中，$M_n=V_n/a$。

用正激波表计算斜激波时，表中的总压比应该换成 $(P_{0n})_2/(P_{0n})_1$。由式（2-3-54）可知 $(T_{0n})_1=(T_{0n})_2$，并注意使用（2-3-58）式

$$\frac{(P_{0n})_2}{(P_{0n})_1}=\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{T_{0n}}{T}\right)_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{T}{T_{0n}}\right)_1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

而 $P_0=P\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$，并注意到 $(T_0)_1=(T_0)_2$，于是上式变为

$$\frac{(P_{0n})_2}{(P_{0n})_1}=\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{T_0}{T}\right)_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{T}{T_0}\right)_1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\frac{(P_0)_2}{(P_0)_1}$$

故

$$\frac{(P_{0n})_2}{(P_{0n})_1}=\frac{(P_0)_2}{(P_0)_1} \tag{2-3-59}$$

式（2-3-59）表明 $(P_{0n})_2/(P_{0n})_1$ 等于 $(P_0)_2/(P_0)_1$。综上所述，借助附表 2 作斜激波计算时，应将该表的第一列换成 M_{1n}，第二列换成 M_{2n}，第三列、第四列、第五列分别表示斜激波的静压比、密度比、温度比，第六列表示斜激波的总压比，而第七列不使用于斜激波计算，所以这列在作斜激波计算时应删除。这时 $V_2,(P_0)_2$ 可按下列方法计算。

由 M_{2n} 值，借助式（2-3-56）便可计算出 M_2；再由 M_2 与声速 a_2 求出 V_2；最后由 P_2 与 M_2 值通过式（1-8-7）算出 $(P_0)_2$ 值。

下面具体计算本例题。因 $\theta=15°$，$M_1=3.0$，查附表 3 得到激波角 $\beta=32.2°$；$M_{1n}=M_1\sin\beta=1.599$；依 M_{1n} 值查正激波表得，此时 $M_{2n}=0.6687; P_2/P_1=2.8163$；$T_2/T_1=1.3873$，$\rho_2/\rho_1=2.030$；$(P_0)_2/(P_0)_1=0.8596$；注意到：$P_1=1.0\times10^4\ \text{Pa}$，$T_1=216.5\ \text{K}$，$\rho_1=0.161\ \text{kg/m}^3$，$V_1=M_1\sqrt{\gamma RT_1}$ $V_2=3\times(1.4\times287.06\times216.5)^{1/2}=885\ \text{m/s}$，故

$$P_2=\frac{P_2}{P_1}P_1=2.8163\times10^4\ \text{Pa},\quad T_2=\frac{T_2}{T_1}T_1=300\ \text{K}$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\rho_1 = 2.030\times0.161 = 0.326\ \text{kg/m}^3\text{，}\quad M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(32.2^\circ - 15^\circ)} = 2.26\text{；}$$

$$V_2 = 2.26\times(1.4\times287.06\times300)^{\frac{1}{2}} = 787\ \text{m/s}\text{，}$$

$$(P_0)_2 = \frac{P_2}{\pi(M_2)} = \frac{2.816\times10^4}{0.085\,2} = 3.30\times10^5\ \text{Pa}\text{；}$$

§2.4 激波、膨胀波的反射和相交

在超声速流动的实际问题中，所遇到的波系往往是非常复杂的，本节将研究如何运用前面已讲过的知识分析一些典型波系并说明决定各区域流动参数的计算方法。着重讨论由于边界条件所引起的速度方向不匹配和压强不匹配时而诱发的现象。

一、激波在固壁上的反射

在超声速风洞中，气流遇到模型（例如一个楔）会产生一道斜激波 AB 与洞壁交于 B 点，如图 2.20（a）所示。气流在激波后偏转了 θ 角，与模型表面平行，但与洞壁不平行。于是洞壁对气流的扰动作用好似一个半顶角为 θ 的楔，又在 B 点产生一道使气流偏转 $-\theta$ 角的斜激波 BC。因此，激波在固壁上的反射仍为激波，并且属于正常反射。

如果图 2.20（b）中楔的半顶角 θ，大于激波 AB 后的流速 M_2 所允许的斜激波的 $\theta_{\max}$ 值，这时反射激波成为图 2.20（b）所示的那样，这种反射叫马赫反射。在这种情况下，马赫反射波在接近上边壁面处，出现一段正激波 BC。为了使 B 点后的上下方的流动能够互相匹配，即具有相同的压力和流速方向，故在 B 点处产生反射的斜激波 BD，使区域③的流动情况与区域④相匹配。但由于 B 点上下方气流的熵值增加不一样，故区域③和④内的速度大小、密度和温度是不同的，其匹配的办法是从 B 点往下产生一个滑流面，它是个涡面，该面两边的速度的方向平行而大小不等，这是个非常重要的特征。

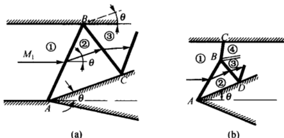


图 2.20 激波在固壁上的反射



二、异侧激波的相交

超声速气流在进气道入口处或喷管出口处 A 点和 B 点发生两道斜激波，交于 M 点，如图 2.21（a）（b）所示。在 M 点必产生两道反射的激波 MC 和 MD，使 M 点后方上下两区域④和⑤具有相同的压力和相同的速度方向。对于图 2.21（b）所示的情况，由于$\theta_2 \neq \theta_3$，上下两部分气流各自通过两道不等强度的激波，其熵值变化不一样，故在 M 点产生滑流面 MT。

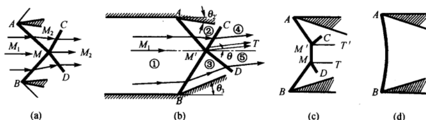


图 2.21　异侧激波的相互作用

当楔角较大，超出了激波正常反射的条件时，就出现类似于马赫反射的情况，即由两道斜激波 AM' 和 BM 和一道近似于正激波 MM' 组成（如图 2.21（c）所示）。在交点 M 和 M' 处产生反射激波 $M'C$ 和 MD，并且产生滑流面 MT 及 $M'T'$。当楔的角度再增大，最后将出现曲线激波，如图 2.21（d）所示。

三、同侧激波的相交

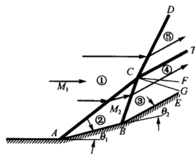


图 2.22　同侧激波的相互作用

如图 2.22 所示，在马赫数为 M_1 的气流中由于 θ_1 角产生的激波 AC 和在马赫数为 M_2 的气流中由于 θ_2 角产生的激波 BC 相交于 C 点。C 点是流动上下方的匹配点，因此在该点之后上下方的流场必须具有相同的压力及速度方向。在 C 点之上，两个同侧激波的相交将合成为一个较大强度的激波，其强度根据 C 点下方的流动情况来决定。在 C 点下方，气流从区域①越过两道强度已知的激波 AC 和 BC 进入区域③，因此区域③中的流动参数可以完全确定。这样就要求 C 点之上的激波具有如此的强度，使其区域⑤的压力和流速方向与区域③相同。但是在一般情况下，根据 M_1 和 $\theta = \theta_1 + \theta_2$ 的条件得出的 p_5 不会正好等于根据 M_2（由 M_1 和 θ_1 决定）和 θ_2 的条件得出的 p_3，因此在 C 点产生反射的膨胀波（也可能是压缩波，视具体流动情况而定），使区域④在对区域③的参数作某些改变后，能够与区域⑤相匹配。当然在区域④和⑤之间存在滑流面。实际上，反射波一般很弱，在近似计算时可略去不计，通常按区域⑤的气流偏转角 $\theta_5 = \theta_1 + \theta_2$ 来确定激波 CD。值得注意的是，虽然④区与⑤区的压强相等，流动方向相同，但它们速度的

模并不相等，因此在④区与⑤区之间存在着滑流线CT，它是决定两区相匹配的关键。

四、激波在自由面上的反射

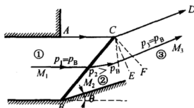


图 2.23 激波在自由面上的反射

如图 2.23 所示，自 B 点产生的斜激波遇到自由面 AC 时在 C 点要发生反射。气流在区域①中的压力 p_1 等于外界背压 p_B，通过斜激波 BC 后，气流的压力升高到 p_2，$p_2>p_B$，产生压力不平衡，于是气流在激波与自由面的交点处发生一个绕外钝角的膨胀流动，气流通过 ECF 膨胀区后，压力降低 ($p_3=p_B$)，方向与射流的边界 CD 平等，显然这时射流的截面积有了增加。

五、膨胀波在固壁上的反射

下面讨论膨胀波和压缩波的反射和相交问题。所谓膨胀波和压缩波均指小的有限强度的等熵波，当气流越过这类波时，波后的压力将下降或增加某个小的有限值。其实，膨胀波实际上是用一道波来代替一个小扇形膨胀区；而压缩波则是用一道等熵波来代替一道弱激波，因为弱激波的熵增值是气流折角的三次方小量，可近似略去不计。

膨胀波在固壁上的反射如图 2.24 所示。气流越过入射膨胀波 AB 后将加速，并折转 θ 角，这样便与上壁面的方向存在矛盾，因此必须产生反射波 BC，使气流方向折转回来。一般入射角 β 和反射角 β' 并不相等，按照气流折转方向来判断，BC 波是膨胀波。因此可以得到这样一个结论：膨胀波在固壁上反射仍为膨胀波。如果入射波 AB 交于壁面 B 处具有凹角 θ，则气流穿越 AB 波后能满足边界条件，因此这时便不产生反射波。

关于各区参数的计算可按如下办法：按①区给定的流动参数及折转角 θ，利用 P-M 波关系式，算出②区的流动参数；按②区的流动参数及折转角 θ，又可以计算③区的参数。

六、异侧膨胀波的相交

如图 2.25 所示，当两道膨胀波 AC 和 BC 相交后，穿过这两道波以后的气流方向彼此不平行，因此必须产生两道反射波 CD 和 CE，使两股气流彼此匹配。由此可得出结论：异侧膨胀波相交后产生两道新的异侧膨胀波。

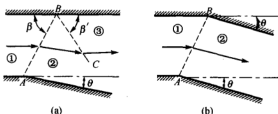


图 2.24 膨胀波在固壁上反射



七、膨胀波在自由表面（等压面）上的反射

膨胀波与自由边界相交的情况如图 2.26 所示。在膨胀波前的区域，气流压力 $p_1 = p_B$，经过膨胀波 AO 后气流压力下降为 p_2，$p_2 < p_B$。为满足自由边界上的条件，必须从 O 点发出一道斜激波 OB 以使压力回升到 $p_3 = p_B$。斜激波使气流向中心偏转，从而自由边界也要向气流的中心偏转。

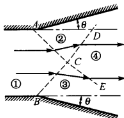


图 2.25　异侧膨胀波相交

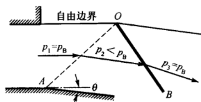


图 2.26　膨胀波在自由面上的反射

八、激波与膨胀波的相互作用

如图 2.27 所示，激波 AM 与膨胀波 BM 相交。为了便于计算起见，这里用有限个具有一定强度的波来代替。现假定 B 点的偏转角 θ_3 很小，只有一个膨胀波 BM，气流通过 BM 时，向下折转了 θ_3 角。而上边的气流通过斜激波 AM 时，则向下折转了 θ_2 角。为了使 M 点之后上下方气流得以匹配，便产生了激波 MD 和膨胀波 MC，并产生了滑流面 MT。

如图 2.28 所示，菱形机翼的顶端 A 处产生的斜激波与 C 处产生的膨胀波组相交。斜激波后区域②的流动参数很容易从已知区域①的参数求得。C 处的膨胀波可简化为几个有限强度的波。根据区域②的流动参数可决定第一道膨胀波 CB 的方位及其后区域③中的流动参数。于是定出了斜激波与第一道膨胀波的交点 B。B 点上方的激波由于膨胀波的相交而减弱了，

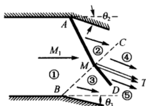


图 2.27　激波和膨胀波异侧相交

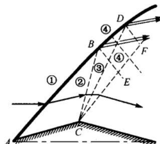


图 2.28　激波和膨胀波同侧相交

因此在 B 点上下方的气流穿过激波时熵值变化不同，为使 B 点之后上下方的流动得以匹配，在 B 处反射出膨胀波，使区域④和④′ 具有相同的压力和速度方向，而在两区域之间存在着滑流面 BF。激波 BD 以及膨胀波 BE 的强度及方位可根据区域④和④′ 的流动匹配条件而定出。

为了说明具体的计算过程，下面举一个异侧激波相互作用的例题。

例 12 如图 2.29 所示，有一个扩压管进口处产生一对斜激波，已知 $M_1=3.0$，$P_1=1.0\times10^5$ Pa，$\theta_1=5°$，$\theta_2=15°$，试求④区与⑤区的压强和气流方向。

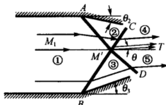


图 2.29 异侧激波相交

解 由 $M_1=3.0$，$\theta_1=5°$ 查附表 3 得这时弱斜激波的激波角 $\beta=23.65°$，$P_2/P_1=1.46$，波后马赫数 $M_2=2.75$；由 $M_1=3.0$，$\theta_2=15°$ 查附表 3 得这时弱解的激波角 $\beta=32.26°$，$P_3/P_1=2.80$，波后马赫数 $M_3=2.25$；先予估一个 θ 角，例如取 $\theta=9°$，故气流折转角 $\theta_1+\theta=14°$，并且以 $M_2=2.75$，气流折转角为 14°，查附表 3，取弱解得到 $P_4'/P_2=2.48$，于是

$$P_4'=2.48\times1.46\times P_1=3.62\times10^5\ \text{Pa}$$

在 $\theta=9°$ 的假设下，$\theta_2-\theta=15°-9°=6°$，并且以 $M_3=2.25$ 和折转角 6° 查附表 3，取弱解，得到 $P_5'/P_3=1.44$，于是

$$P_5'=1.44\times2.80\times P_1=4.04\times10^5\ \text{Pa}$$

比较 P_5' 与 P_4'，显然 $P_5'>P_4'$，于是重新假设 $\theta=9.5°$，重复上述计算过程，即由 $M_2=2.75$ 和气流折转角 $\theta_1+\theta=5°+9.5°=14.5°$ 去查附表 3，得到

$$P_4'=2.60\times P_2=3.80\times10^5\ \text{Pa}$$

在 $\theta=9.5°$ 的假设下，以 $M_3=2.25$ 和折转解为 $\theta_2-\theta=15°-9.5°=5.5°$ 去查附表 3 得到 $P_5'=1.365\times P_3=3.82\times10^5$ Pa，现在求出的 P_4' 和 P_5' 的偏差在允许的范围内，因此可以认为假定 $\theta=9.5°$ 是正确的，即气流经过激波 MC 或者 MD 后，相对于①区的气流方向逆时针转折 9.5°。

应当指出，上面介绍的是用试凑法得到 θ 准确值的一个过程，显然每给一个予估的 θ 值，便可算出与其对应的 P_4' 与 P_5'；给一系列的 θ 值，便可算出一系列与其对应的 P_4' 与 P_5' 值；于是可绘出 $P_4'=P_4'(\theta)$ 与 $P_5'=P_5'(\theta)$ 的两条曲线，它们的交点所对应的 θ 就是满足 $P_4=P_5$ 条件的解。上述过程完全可以编制成计算机程序。作为课后练习，试用 FORTRAN 语言或 C 语言编制本算例的计算机程序。



§ 2.5　超声速圆锥绕流及轴对称锥型流的求解

超声速圆锥零攻角定常绕流的图像与超声速气流绕楔的平面流动的图像不同。对于绕楔的平面流动，在附体的斜激后，气流即平行于壁面，而且为均匀流，如图 2.30（a）所示。对于绕圆锥的流动，假如气流经锥面激波后立刻与锥面平行且保持为均匀直线等速流动的话，则随流线离锥体轴线距离的增大、流通面积增大，显然这样的流动图形违背连续性方程。正是由于圆锥存在三维效应，因此气流流过激波后必须不断地向圆锥面靠近，如图 2.30（b）所示。总的说来，两种绕流的主要区别有：

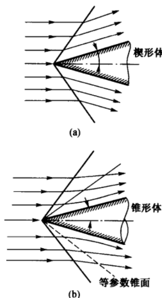


图 2.30　两种绕流的比较

① 当 $M_\infty > 1$ 且半楔角和半锥角不太大时，在尖楔和圆锥的头部尖点都产生激波间断面。当尖楔和圆锥的 M_∞ 及 θ 分别都相同时，由尖楔产生的斜激波角 β 大于圆锥产生的激波角。同时尖楔的头部激波面是平面，而圆锥产生的激波是锥面。

② 尖楔产生的激波比圆锥激波更易脱体。

③ 尖楔超声绕流其波后流场是平行的均匀流，而圆锥绕流通过激波后仍继续等熵减速压缩并且流线不断向锥面靠近。

2.5.1　锥型流以及超声速气流绕圆锥流动的基本方程

本节在球面坐标系 (r,σ,φ) 下讨论一般攻角的超声速定常圆锥绕流问题，这里 (r,σ,φ) 构成右手系。

首先引进锥型流的概念：凡流动参数与 r 无关的流动统称为锥型流，也就是说沿着每一条自锥顶发出的直线，气体的物理参数（例如密度、压强、速度、总焓等）保持不变。研究锥型流采用球坐标最方便，这里取 r 代表矢径，σ 代表矢径与锥的轴线在子午面上的夹角，φ 代表子午面与基准子午面之间的夹角。令速度 V 的分量在 (r,σ,φ) 坐标系中为 V_r、V_σ 以及 V_φ，方向分别为沿着半径、在子午面内垂直于半径以及垂直于子午面的方向，其定义为

$$V_r \equiv \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\qquad V_\sigma \equiv \frac{r\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t},\qquad V_\varphi \equiv \frac{(r\sin\sigma)\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{2-5-1}$$

在下文中为便于书写，特约定：将 V_r、V_σ 与 V_φ 分别用符号 u，v 与 w 代替。因为气流是锥型流，故对于气流的任一物理参数有

$$\frac{\partial}{\partial r}=0 \tag{2-5-2}$$

注意到无粘、定常、绝热运动的基本方程组

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0 \tag{2-5-3}$$

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}+\frac{1}{\rho}\nabla P=0 \tag{2-5-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2-5-5}$$

式中，h_0 为滞止焓（即总焓）。

对于球面坐标系中的锥型流，则上述基本方程组可简化为

$$2\rho u\sin\sigma+\frac{\partial}{\partial\sigma}(\rho v\sin\sigma)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho w)=0 \tag{2-5-6}$$

$$v\frac{\partial u}{\partial\sigma}+\frac{w}{\sin\sigma}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-v^2-w^2=0 \tag{2-5-7}$$

$$v\frac{\partial v}{\partial\sigma}+\frac{w}{\sin\sigma}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+uv-w^2\cot\sigma+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\sigma}=0 \tag{2-5-8}$$

$$v\frac{\partial w}{\partial\sigma}+\frac{w}{\sin\sigma}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+uw+vw\cot\sigma+\frac{1}{\rho\sin\sigma}\frac{\partial P}{\partial\varphi}=0 \tag{2-5-9}$$

因为总焓沿全场为常数，因此沿 φ 与 σ 方向便分别有

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\varphi}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)=-\left(u\frac{\partial u}{\partial\varphi}+v\frac{\partial v}{\partial\varphi}+w\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) \tag{2-5-10}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\sigma}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\sigma}\right)=-\left(u\frac{\partial u}{\partial\sigma}+v\frac{\partial v}{\partial\sigma}+w\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right) \tag{2-5-11}$$

将式（2-5-7）～式（2-5-11）整理后代到式（2-5-6）以消去压强与密度项，得

$$\begin{aligned}&u\left(2-\frac{v^2+w^2}{a^2}\right)+\left(1+\frac{w^2}{a^2}\right)v\cot\sigma+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial v}{\partial\sigma}+\\&\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial w}{(\sin\sigma)\partial\varphi}-\frac{vw}{a^2}\left(\frac{\partial v}{(\sin\sigma)\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right)=0\end{aligned} \tag{2-5-12}$$

假定流动是位流时，不妨令其速度势为



$$\phi = rG(\sigma,\varphi) \tag{2-5-13}$$

这里

$$u = G(\sigma,\varphi) \tag{2-5-14}$$

$$v = \frac{\partial G}{\partial \sigma} \tag{2-5-15}$$

$$w = \frac{\partial G}{(\sin\sigma)\partial \varphi} \tag{2-5-16}$$

于是式（2-5-12）又可变为

$$\begin{aligned}&\left(2-\frac{v^2+w^2}{a^2}\right)G+\left(1+\frac{w^2}{a^2}\right)(\cot\sigma)\frac{\partial G}{\partial \sigma}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2}+\\&\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 G}{(\sin^2\sigma)\partial\varphi^2}-\frac{2vw}{a^2}\frac{1}{\sin\sigma}\frac{\partial^2 G}{\partial\sigma\partial\varphi}=0\end{aligned} \tag{2-5-17}$$

在超声速气流中，气流的扰动区域可由一个锥型激波面围成。对于锥型流，此边界必定是一个锥形激波，而在扰动区域内的流动由式（2-5-17）所确定。显然，此时的锥型流对于 $(v^2+w^2)>a^2$ 是双曲型的，对于 $(v^2+w^2)<a^2$ 则是椭圆型的。

2.5.2 轴对称超声速气流绕圆锥的流动及其求解

一、轴对称超声速圆锥绕流的基本方程与边界条件

对于轴对称超声速圆锥流，由锥型流条件及轴对称性有，

$$\frac{\partial}{\partial r}=0 \tag{2-5-18}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}=0,\ 且 w=0 \tag{2-5-19}$$

于是式（2-5-12）与式（2-5-17）分别简化为

$$u\left(2-\frac{v^2}{a^2}\right)+v\cot\sigma+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\sigma}=0 \tag{2-5-20}$$

或者写为

$$u+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{u+v\cot\sigma}{1-\dfrac{v^2}{a^2}} \tag{2-5-21}$$

另外，在锥型流与轴对称的条件下，r 方向的动量方程式（2-5-7）退化为

$$\frac{du}{d\sigma}=v \tag{2-5-22}$$

将式（2-5-22）代入式（2-5-21）得

$$\left(1-\frac{(u')^2}{a^2}\right)\frac{d^2u}{d\sigma^2}+(\cot\sigma)\frac{du}{d\sigma}+\left(2-\frac{(u')^2}{a^2}\right)u=0 \tag{2-5-23}$$

式中，$u'\equiv du/d\sigma$，a 为声速并满足

$$\frac{u^2+(u')^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=h_0=\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{\gamma-1} \tag{2-5-24}$$

这里 U_∞ 与 a_∞ 分别为远前方来流的速度与声速。显然，式（2-5-23）是关于 u 的二阶非线性常微分方程，它的边界条件为

锥面条件：当 $\sigma=\delta_c$ 时，有

$$v=u'=0 \tag{2-5-25}$$

激波边界条件：当 $\sigma=\beta$ 时，有

$$u=U_\infty\cos\beta \tag{2-5-26}$$

$$\frac{-u'}{U_\infty\sin\beta}=\frac{2+(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\beta}{(\gamma+1)M_\infty^2\sin^2\beta} \tag{2-5-27}$$

式（2-5-27）实质上是斜激波前后法向分速度关系式（2-3-44）在轴对称超声速圆锥绕流问题中锥型斜激波前后法向分速的具体表达。在激波边界上的 u 实际上是激波后沿 r 方向的分速度（即激波切向分速），而波后法向分速度等于 $-v$；还有一点应特别需要指出的是：由于轴对称流都是零攻角流动，因此远前方来流 U_∞ 的方向与圆锥轴线平行，这里在推导式（2-5-27）时也注意使用了这一特征。另外，式（2-5-27）左边分子上有负号是由于激波后的法向速度分量与 σ 的正方向相反。当然，激波边界条件也可以使用普朗特关系式（2-3-37）来表达，用锥形流动的符号改写式（2-3-37）后变成了如下形式

$$\tan\beta=-\frac{a_*^2-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}u^2}{uu'} \quad（在激波边界上） \tag{2-5-28}$$

式中，a_* 为临界声速；$u'=du/d\sigma$。

在推导式（2-5-28）时使用了激波角与激波切向分速度间的关系。另外，这里 a_* 满足下面表达式

$$M_\infty^2=\frac{2u^2}{(\gamma+1)a_*^2\cos^2\beta-(\gamma-1)u^2} \quad（在激波边界上） \tag{2-5-29}$$

注意式（2-5-28）与式（2-5-29）中的 u 都是激波边界上的值，即 $u(\sigma)\big|_{\sigma=\beta}$，这时它实际上是激波后沿 r 方向的分速度。事实上，式（2-5-29）是借助于式（1-8-23）以及注



意了使用激波角、激波切向分速与波前速度间的关系之后导出的。

二、轴对称超声速圆锥绕流的数值求解

轴对称超声速圆锥绕流的主方程为式（2-5-23），它是一个二阶的非线性常微分方程，方程式（2-5-23）、式（2-5-24）以及式（2-5-25）、式（2-5-26）与式（2-5-27）构成了该问题的完整方程组，其中包括锥面条件与激波边界条件。显然，要得到这个问题的解析解并不是一件容易的事，因此多采用数值解法或图解法。图解法是布兹曼（Busemann）在 1929 年提出的，文献[15，17，18]中均有介绍。数值解法是由泰勒（Taylor）和麦可尔（Maccoll）1933 年首先提出的，1947 年 Kopal 给出了较详细的数值解，这里简单介绍一下数值求解的主要过程。计算由激波面 $\sigma=\beta$ 开始，对于给定的 γ 和来流 M_∞ 计算过程如下：

（1）任意假定一个 β 值（不应小于 Mach 角），由式（2-5-26）和式（2-5-27）计算出 $u(\beta)$ 与 $u'(\beta)$ 值；再由式（2-5-24）算出 $a(\beta)$ 值。

（2）由方程式（2-5-23）得

$$u''=\frac{\left(\dfrac{(u')^2}{a^2}-2\right)u-(\cot\sigma)u'}{1-(u')^2/a^2} \tag{2-5-30}$$

在 $\sigma=\beta$ 处，u、u' 与 a 均已知，因此可用上式算出 $u''(\beta)$ 值。

（3）取与 $\sigma=\beta$ 相邻的射线 $\sigma_1=\beta-\Delta\sigma$，于是在该射线上对 u 与 u' 作级数展开，保留一阶项

$$u(\beta-\Delta\sigma)=u(\beta)-u'(\beta)\Delta\sigma$$

$$u'(\beta-\Delta\sigma)=u'(\beta)-u''(\beta)\Delta\sigma$$

$$a(\beta-\Delta\sigma)=(\gamma-1)\left(\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{\gamma-1}\right)-\frac{\gamma-1}{2}\left[u^2(\beta-\Delta\sigma)+u'^2(\beta-\Delta\sigma)\right]$$

由上述三个式子算出 $u(\beta-\Delta\sigma)$、$u'(\beta-\Delta\sigma)$ 与 $a(\beta-\Delta\sigma)$ 值。

（4）再取与 $\sigma_1=\beta-\Delta\sigma$ 相邻的射线 $\sigma_2=\sigma_1-\Delta\sigma$。同样的，先由式（2-5-30）计算出 $u''(\beta-\Delta\sigma)=u''(\sigma_1)$ 值，然后再借助于下面的三个式子即

$$u(\sigma_i-\Delta\sigma)=u(\sigma_i)-u'(\sigma_i)\Delta\sigma \tag{2-5-31}$$

$$u'(\sigma_i-\Delta\sigma)=u'(\sigma_i)-u''(\sigma_i)\Delta\sigma \tag{2-5-32}$$

$$a(\sigma_i-\Delta\sigma)=(\gamma-1)\left(\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{\gamma-1}\right)-\frac{\gamma-1}{2}\left[u^2(\sigma_i-\Delta\sigma)+u'^2(\sigma_i-\Delta\sigma)\right] \tag{2-5-33}$$

作计算。例如取 $i=1$，则可计算出 $u(\sigma_2)$、$u'(\sigma_2)$ 与 $a(\sigma_2)$ 的值。

（5）仿照上一步的计算过程，一直计算到取 $i=n-1$，即得到 σ_n 的值，这里 $\sigma_n\equiv\sigma_{n-1}-\Delta\sigma=\beta-n\Delta\sigma$。如果算出的 $u'(\sigma_n)=0$ 即 $v(\sigma_n)=0$，则计算停止，这时的 σ_n 就是半

锥角δ_c，并且这时的$u(\sigma_n)$就是锥面速度$u(\delta_c)$。至此，我们便得到一个来流为M_∞，半锥角为δ_c的锥型流的流场解。

（6）对于同一个来流M_∞，可以假定不同的β值，重复（1）～（5）的过程，便可得到同一个来流M_∞绕不同半锥角δ_c圆锥的一组解。

（7）选定另一个M_∞，重复步骤（1）～（6）的过程，又可得到这个马赫数来流下绕不同半锥角圆锥的流场解。

作为课后练习题，试将上述计算过程用 FORTRAN 语言或 C 语言编程，并用所编的程序完成$M_\infty=3.8$，$\delta_c=20°$时零攻角超声速无粘流的圆锥绕流计算，这里空气的比热比$\gamma=1.4$。

§2.6 超声速进气道的激波系以及排气喷管的波系分析

2.6.1 超声速进气道的激波系分析

进气道（或称进气扩压器）的作用是把迎面来流的速度降低，压强提高，把气流均匀地、总压损失尽量小地引入发动机，来满足发动机在各种不同的条件下所需要的空气流量。进气道性能的好坏，除了用总压恢复系数来评定外，还要考虑到进气道是整个飞行器的一个组成部分，因此，还要求进气道的型面有最小的外部阻力，结构简单，质量要轻等。

当进气道迎面来流为超声速时，由于超声速气流在减速增压过程中在进气道前面或进气道内要产生激波，因此将引起气流总压的显著降低。所以，在设计超声速进气道时，如何合理地组织激波系以保证进气道总压损失尽量小是非常重要的。按照气流的压缩形式超声速进气道可分为皮托（Pitot）式、外压式、内压式和混压式。图 2.31 给出了几种型式进气道的原理图及其激波系，图中所示为诸进气道处于临界工作状态的流动图形。对于皮托式进气道，超声速来流在进口处经正激波突降为亚声速流，而后在内部扩张管道中继续减速增压；对于外压式进气道，超声速来流在进口前经历一系列斜激波，受到超声速压缩，最终在进口处经正激波降为亚声速流，外压式进气道的超声速压缩减速过程发生在口外；对于内压式进气道，超声速气流在口内经一系列激波（或微弱压缩波）减速，最后在喉道附近经正激波降为亚声速。对于混压式进气道则兼有外压式和内压式的特点，超声速压缩部分发生在口外，部分发生在口内。

一、皮托式进气道

超声速皮托式进气道的形状基本上与亚声速进气道相同。其工作原理是超声速来流直接经正激波降为亚声速流。显然其总压恢复系数是随来流马赫数的增大而下降的。当M_∞在小于 1.3 时，σ不低于 0.94，这时损失不太大；而$M_\infty>1.6$以后，则σ下降很快。因此，这种



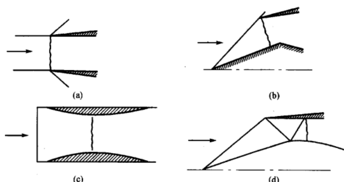


图 2.31　各种进气道的激波系

（a）皮托式；（b）外压式；（c）内压式；（d）混压式

进气道通常仅用于 M_∞ 小于 1.3～1.4 的飞机。由于发动机要求的流量不同，进气道存在三种不同的工作状态，如图 2.32 所示。图 2.32（a）表示临界工作状态，流量系数等于 1.0，正激波恰好位于进口处；图 2.32（b）为亚临界工作状态，进口前有脱体激波。与临界工作状态相比，有一部分流量在波后以亚声速溢出口外，$\varphi<1.0$，有附加阻力或溢流阻力；总压恢复则基本上与临界工作状态相同；图 2.32（c）为超临界工作状态，正激波吸入进口下游的扩张段内，依靠增加损失的办法来满足发动机对流量的要求。这时 $\varphi=1.0$，无附加阻力，但总压恢复低于临界值。

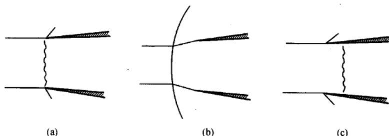


图 2.32　皮托式进气道的三种工作状态

（a）临界工作状态；（b）亚临界工作状态；（c）超临界工作状态

二、外压式进气道

为了克服皮托式进气道在大马赫数时损失过大的缺点，外压式进气道使来流先经过斜激波降为马赫数较低的超声速气流，然后再经正激波降为亚声速气流。在同样的来马赫数下，外压式进气道的总压恢复系数高于皮托式的。当然外压式进气道的激波总压恢复系数是与斜



激波的数目、激波强度的配置有关的。在激波数目一定的条件下，存在着一种最佳的配置，存在着一个最大的总压恢复系数。图 2.33 表示一个单楔二波系外压式进气道的三种工作状态。图中θ_1是楔尖和罩唇联线与来流方向的夹角，β为激波倾斜角。图中所示是$\beta>\theta_1$（斜激波在罩唇之前）的情形。图 2.33（a）表示临界工作状态，此时正激波位于进口处，$\varphi=\varphi_{max}$（对应于此进气道在给定马赫数下的最大流量系数），在$\beta>\theta_1$时，$\varphi_{max}<1.0$。这时，在对应于进口捕获面积A_c的自由流管中，有部分流量经斜激波溢出口外，因此称为超音速溢流。这时虽有附加阻力，但阻力不大。另外，像皮托式进气道一样，当发动机要求的流量小于或大于临界工作状态的流量时，正激波会被推出口外或吸入口内，如图 2.33（b）和图 2.33（c）所示，这时便形成了亚临界或超临界工作状态。亚临界工作状态的$\varphi<\varphi_{max}$，多余的流量以亚声速流的形式溢出口外，称为亚声速溢流，这时伴随有很大的附加阻力，总压恢复系数则基本上保持与临界值相等。而超临界情况则有$\varphi=\varphi_{max}$，并且总压恢复系数因正激波的吸入而下降。

图 2.34 给出了$\beta=\theta_1$，$\beta>\theta_1$和$\beta<\theta_1$三种情形，并分别被称为额定、亚额定和超额定工作状态。对于额定和超额定状态，$\varphi_{max}=1.0$，对于亚额定状态，$\varphi_{max}<1.0$。同一个进气道，随着来流马赫数增大，激波倾斜角β减小，是可以由亚额定变为额定或超额定状态的。随着飞行马赫数增大，获得最佳总压恢复的压缩面折角变得很大。为使在进口处产生正激波，外罩内表面必须与压缩面最后的方向平行。这样，外罩表面的倾斜角就很大，产生很大的外罩波阻。这就需要在气动设计时很好的在阻力和总压恢复系数之间进行权衡。

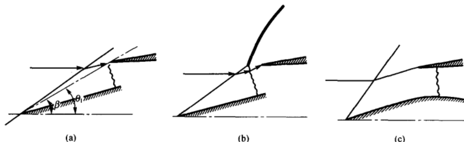


图 2.33 外压式进气道的工作状态

（a）临界；（b）亚临界；（c）超临界

三、内压式进气道

内压式进气道是一个先收缩后扩张的管道。在最理想的情况下，超声速来流直接流入进口，在收缩段内减速，至喉道达到声速，在扩张段内变为亚声速，像一个倒过来的拉瓦尔喷管，如图 2.35（a）所示。在此理想情况下，喉道截面积A_{th}与进口捕获面积A_c之间存在下列关系



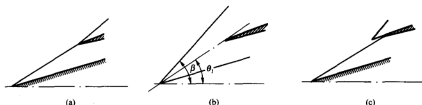


图 2.34 外压式进气道的亚额定、额定和超额定工作状态

(a) $\beta=\theta_1$；(b) $\beta>\theta_1$；(c) $\beta<\theta_1$

$$A_{th}=q(\lambda_\infty)A_c$$

式中，$q(\lambda)$ 为气动函数，下标 ∞ 表示来流参数。

显然，截面积 A_{th} 也是允许自由流直接撞入进口的气流能够由喉道通过的最小面积。在超声速情况，$q(\lambda_\infty)$ 随 λ_∞ 减小而增大，因此，为了实现上述理想工作情形，喉道截面积应该是可变的。也就是说，当 $\lambda_\infty=1.0$ 时，则 $A_{th}=A_c$；随着 λ_∞ 的增大，应该逐渐减小 A_{th}。实际上，要完全实现这种调节是很困难的，一个重要的困难就是所谓的启动问题，如内压式进气道的启动问题：如果内压式进气道的喉道面积不可调，例如喉道面积 A_{th} 取为设计马赫数 $M_{\infty d}$（对应的速度系数 $\lambda_{\infty d}$），于是当飞行马赫数小于 $M_{\infty d}$ 时，这个喉道面积就嫌小了，全部自由撞入的流量无法通过，迫使在进口前产生脱体激波，出现亚声速溢流，如图 2.35（b）所示。由于激波的存在，波后总压减小，使喉道通过流量的能力下降。这样，即使达到设计马赫数 $M_{\infty d}$，也不可能将激波吸入进气道，建立起理想的流动状态。因此，为了使内压式进气道在设计马赫数 $M_{\infty d}$ 时能建立起理想的流动状态，必须加大喉道面积，使得在进口前有激波的情况下，仍能保证自由撞入的全部流量均能通过喉道。另外，类似于外压式进气道的分析，内压式进气道也有三种工作状态，如见图 2.36 所示，这里不作详述。

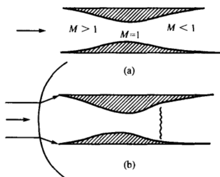


图 2.35 理想的内压式工作状态

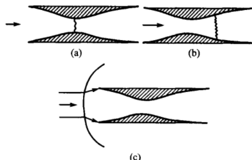


图 2.36 内压式进气道的工作状态

(a) 临界；(b) 超临界；(c) 亚临界

四、混压式进气道

混压式进气道的含意是既有外压又有内压。采用这种型式是为了减小外压式的外阻，而同时又缓和了内压式的启动问题和不利的边界层问题。

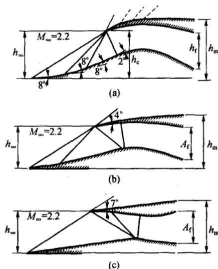


图 2.37　外压式与混压式的比较

图 2.37 为按 $M_\infty = 2.2$ 设计的三个进气道，三道斜激波各使气流折转 8°（接近于最佳折角）。图 2.37（a）为全外压式，全部激波汇交于唇口，罩唇内壁倾斜角为 24°；图 2.37（b）图 2.37（c）为混压式，图 2.37（b）与图 2.37（c）的罩唇内壁倾斜角分别为 8°与 0°，由于图 2.37（c）的内收缩较图 2.37（b）厉害，启动问题严重。这三种型式的总压恢复系数相同，而混压式的外阻却比外压式小得多。另外，混压式的压缩面较长，边界层较厚，且有部分激波包在进气道内，发生激波的反射和与边界层的相互干扰，对总压恢复和畸变有不利的影响。但与内压式相比，这方面的情况有了改善。特别是混压式减小了进口马赫数，大大缓和了启动问题。

2.6.2　排气喷管的重要作用及塞式喷管的波系分析

排气喷管是推进系统的一个十分重要的部件，一方面通过它把燃气的可用热能转变为喷射动能而产生推力，同时又由于它能对发动机的反压起控制作用，从而控制发动机的工况，因此发动机推力和燃油消耗率受排气喷管性能的影响，较其他部件都大。例如在超声速飞行和亚声速巡航情况下，喷管效率下降 1%时，则发动机净推力将下降约 1.7%左右。

排气喷管在飞机上的布局对整个飞机外阻和发动机推力的影响都很大。不合理的布局会使喷管推力减小，或使喷管阻力和机身后体阻力增大。这是因为喷管射流与机体外流之间存在相互干扰的缘故。在现代战斗机上，后体阻力占飞机整个阻力的 50%左右，因此喷管/后体的良好一体化设计，对提高飞机性能是十分重要的。另外，垂直起落和短距起落的飞机，同时还要求具有良好的低速和机动性能，这就有必要选用能使推力换向和反向的排气喷管。对当代及下一代先进军用飞机来说，生存力已成为航空设计师必须考虑的一个十分重要的因素，也就是说对隐身技术应该非常重视。而排气喷管是飞机的主要热辐射信号源，因而研制出先进的低红外辐射信号和雷达散射截面的排气喷管，有极为重要的意义。当代飞机，对于



噪声控制有着严格要求。因为噪声不仅污染环境，而且降低了飞机的隐蔽性及疲劳强度。而排气噪声是飞机噪声的主要来源，因此排气喷管应该具有抑制噪声的能力。

综上所述，排气喷管应具有满足先进飞机多种要求的能力及良好的喷管/后体一体性，以使整个飞机获得最大性能。目前可供选用的排气喷管类型有：几何形状固定的喷管（包括简单锥形收敛喷管、大涵道分流喷管、收敛–扩张型喷管）和几何形状可调的喷管（包括收敛–扩张型喷管、非轴对称喷管、塞式喷管，及矩形喷管）等等。选用何种型式排气喷管，在很大程度上取决于发动机、飞机或弹道的综合考虑。作为喷管波系分析的说明，下面仅以塞式喷管为例。塞式喷管可视为常规收敛–扩张喷管的改型，一般可分为三种基本类型，如图 2.38 所示：图 2.38（a）气流的超声速膨胀完全发生在喷管的环形通道内，因此可称为完全内膨胀塞式喷管。图 2.38（b）气流的超声速膨胀部分发生在喷管内部，部分发生在喷口外，因此可称之为混合式塞式喷管。图 2.38（c）气流的超声速膨胀完全发生在喷管口外，因此称作完全外膨胀塞式喷管。

1. 完全内膨胀塞式喷管

这种喷管是利用中心塞体与喷管锥形外壳间的环形扩张通道产生气流的超声速膨胀，因此在性能上与普通收敛–扩张喷管相似，但它可以把气流的扩张角增大，从而使喷管长度缩短。这种喷管内的气体流动，可以假定为泉流（在流体力学中常称为点源），其源点在塞体与喷管外壳壁面延伸后的交点处。

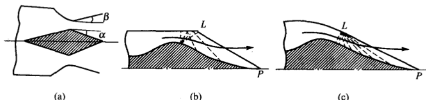


图 2.38　三种塞式喷管

（a）完全内膨胀塞式喷管；（b）混合式塞式喷管；（c）完全外膨胀塞式喷管

2. 完全外膨胀塞式喷管

这种喷管的喉道呈环形，气流绕喷管外壳唇口膨胀到外界大气压强，气体流动受发自唇口的膨胀波系所控制，其转角受塞体型线的约束。喷管外壳唇口与塞体顶尖的相对位置，应正好使排气流发自唇口的最后一道马赫线 L_p，落在塞体顶点上。正是因为气流是在塞体表面与外界大气之间进行膨胀，所以它的性能与收敛–扩张喷管的性能有所不同。

3. 混合膨胀塞式喷管

这种喷管，在设计工况下，唇口边射流的压强正好等于外界大气压。塞体顶点的位置正好使唇口边缘和塞体顶点的连线 L_p 成为射流的最后一道马赫线。这种喷管的工作状态，常

用下面几个压比来规定。

（1）排气压比，即进入喷管时气流的总压与外界大气压之比。

（2）设计压比，它对应于喷管出口截面与喉道截面之比，即 A_e / A_{th} 的值。

（3）内膨胀压比，它对应于外壳唇口处流道截面与喷管喉道截面之比，即 A_i / A_{th} 的值。

正是由于气流流经这种喷管时发生内外膨胀，因此这种喷管兼有完全内膨胀喷管长度较短和完全外膨胀喷管性能较好的优点[19]。

§2.7 压气机及涡轮中的激波与膨胀波

在航空发动机的研制中，提高推重比以及尽可能地减小部件尺寸与质量始终是设计师们努力的方向，因此超、跨声速的压气机在航空领域内获得了广泛应用。按照通常的定义，当动叶进口相对马赫数沿全部叶高都大于 1.0 时，这时的压气机级称为超声速级；而只在部分叶高上 $M_{w1}>1.0$ 的则称为跨声速级。应该指出：目前实际应用的多为跨声速级，“纯”超声速级的应用较少。对地面燃气轮机来说，情况更是如此。因此，在跨声速级内只是叶顶部分的基元级是超声速的，其余部分则还是高亚声速流动。对超声速级来说，可以有三种情况，即：

① 激波在动叶内的超声速级；② 激波在静叶内的超声速级；③ 激波在转子及静子内的超声速级。

图 2.39～图 2.41 分别给出了它们的速度三角形。由这三张图可以看出，在第一种情况中，动叶出口相对速度与绝对速度均为亚声速，激波只发生在动叶叶栅的进口部分或槽道内。第二种情况的动叶出口相对速度与绝对速度均为超声速，激波只发生在静叶中。第三种情况是：动叶出口相对速度是亚声速的，而出口绝对速度是超声速的。因此，静叶进口也是超声速流。这时，激波在动叶和静叶中都有发生。

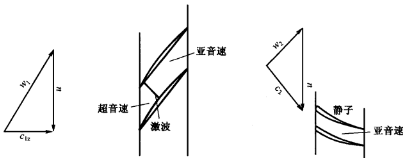


图 2.39 在动叶内含激波的压气机基元级叶栅及其速度三角形



按照超、跨声速级的早期发展经验，上述三种情况中只有第一种获得了应用，其他两种情况由于性能差，效率低而没有得到实际应用。其原因是明显的：在第一种情况下，叶尖部分的动叶叶栅转折角小，叶型薄，比较适合于超声速流动；而在静叶轮毂部分，情况正好相反。因此，本节对超声速叶栅流动的讨论只局限于第一种情况。

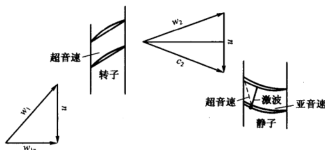


图 2.40　在静叶内含激波的压气机基元级叶栅及其速度三角形

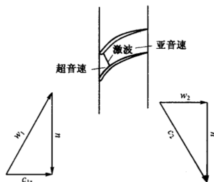


图 2.41　在动叶及静叶内含激波的压气机基元级叶栅及其速度三角形

2.7.1　超声速压气机叶栅中的流动

在跨声速压气机的基元级气动设计中，压比高、流道面积变化大，级内径向流动不可忽略，再加上激波的存在、激波与边界层的相互作用等，因此三维流动显著，超声速平面叶栅的试验数据已不再适于跨声速或超声速压气机中基元级的设计，所以弄清楚超声速叶栅的流动图像十分必要。

一、高亚声速进气时激波的形成与发展

为便于叙述，我们首先研究进气为高亚声速时的激波形成过程。假定进气总压不变，仅仅改变叶栅出口的压力。由于叶背曲率的存在，沿叶背表面的气流被加速而达到声速，然后再经过一束膨胀波，变成超声速，这样，就产生了一个超声速区。由于叶背产生的扰动随着远离叶型而逐渐减弱，因此这个超声速区将随着离开叶型而逐步过渡到均匀的亚声速区。这个超声速区域有一条声速线作为其边界，如图 2.42 所示。在这声速线的下游，在叶背上经过一系列膨胀波，气流进一步加速。然后这些膨胀波在等压线上（例如在音速线上）进行反射，形成一系列压缩波（异类反射）。这些压缩波又各自在叶片壁面上进行反射（同类反射），并收敛到一起形成一个一定强度的激波且与声速线连成一体，如图 2.42 及图 2.43 所示。

当进口马赫数 M_1 继续加大时，激波会扩展到槽道的整个截面，并移向叶片尾缘。当然，这时的激波外形是与叶栅的稠度、叶型安装角、叶片的厚度等几何参数有关。图 2.44 给出了同一个叶栅当进口马赫数增加时激波形成的情况。

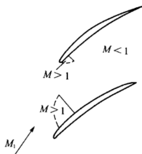


图 2.42　跨声速叶栅内的流动

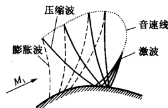


图 2.43　激波的形成

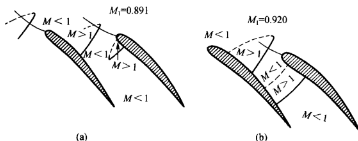


图 2.44　激波的形成



二、低超声速进气时的激波形状

这里所谓低超声速的确切涵义是：进气速度的轴向分速小于当地声速。在这种条件下，叶栅前缘产生的波系能够传播到叶栅的上游，因而能改变进口流场的状态。当马赫数略大于1时，叶片构成的扰动在叶片的前缘附近产生一道脱体激波。如果 M_{w1} 继续增加，则脱体激波可以向附体激波转化，如图 2.45 所示。当 M_{w1} 接近 1.15～1.20 时，脱体波已大致附着于叶片前缘。在低超声速进口的条件下，叶片进口区的激波组成与叶片前缘型线有密切联系。在实际应用中有下列三种情形：① 叶背前段为外凸曲线；② 叶片前段为直线；③ 叶背前段为内凹曲线。图 2.46～图 2.48 给出了三种情况下的激波构成。

由图 2.46 可以看出，在第一种情况下，前缘激波可以分为上下两段：上段一直伸向叶栅的左上方，常称为外伸激波，它接近一道斜激波。下段伸向相邻叶片的叶背，在低超声速时，它相当接近于一道正激波，可称作槽道激波。槽道激波之后气流为亚声速。由于叶背型线是外凸的，因而发射出超声速膨胀波（马赫波）。由型线上 *AB* 段（不包括 *B* 点）发出的膨胀波与同一叶片前缘产生的外伸激波相交，使其强度减弱并后弯。由 *BC* 段发射的膨胀波则与邻近一个叶片产生的激波相交，使其强度减弱。由 *B* 点发射的膨胀波（用虚线表示）则不与任何外伸激波相交，称之为中性马赫波。它表明：在叶型 *B* 点的切线方向是均匀进口气流在无限远处的流动方向。另外，由 *C* 点发射的膨胀波落在脱体激波与滞止流线（即通过叶片前缘驻点的流线）的交点上。这道膨胀波称为第一道吞入的马赫波。由 *CD* 段发射的膨胀波只与邻近叶片的槽道激波相交。*D* 点是槽道激波前当地马赫数为最高之点。因此，这点的激波强度最大。如果 M_{w1} 继续提高，而压比 p_2/p_1 不变，则叶片前的脱体激波向附体激波转化。第二种情况下的波系与第一种情况的波系相似，但由于叶型背弧前段为直线，因而在背弧上不发射膨胀波。所以槽道激波前的马赫数在相同 $M_{w1}=1.3$ 条件下应比第一种情况的低些，如图 2.47（a）所示。在 M_{w1} 进一步增加时，脱体激波将会转化为附体激波，如图 2.47（b）所示，来流方向平行于叶型背弧的直线段。由于内弧段直线与背弧段直线有一夹

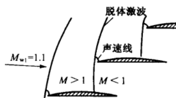


图 2.45　栅前 $M_{w1}=1.1$ 时的流场及激波

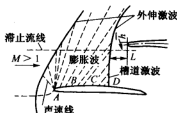


图 2.46　双圆弧叶型叶栅前的激波系

角，因此，在内弧前缘处一定会产生一斜激波，以便使气流方向改变成为与内弧直线段平行。另外，还有一道激波，其大小与位置与背压 p_2 直接有关。对第三种情况（叶片前缘叶背部分为内凹形曲线）来说，气流在前缘周围产生加速，接着在凹面上连续发生压缩波而使气流减速。这些压缩波则在叶背等处汇集成为激波向左上方伸展。由于这组压缩波使超声速气流扩压减速，减小了这个斜激波前的气流马赫数，所以损失也就降低了，如图 2.48 所示。

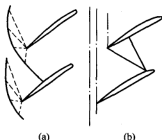


图 2.47　直线进口段叶型的栅前激波系

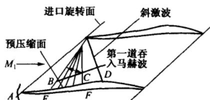


图 2.48　预压缩叶型栅前激波系

这里必须强调指出：以上各种情况下激波与膨胀波（或压缩波）的相互作用是保证叶片进口状态周期性的必要条件。

正如上面所叙述的，从本叶片及相邻叶片上发出的膨胀波与外伸激波相遇，使它的强度逐渐衰减。当外伸激波延伸到无限远处时就变成一道马赫波。实验与理论计算都已证实：这种衰减是十分迅速的。因此，对某个流道而言，通常可以仅考虑本身叶片产生的外伸激波以及相邻的叶片所发出的槽道激波。对叶栅激波损失来说，槽道激波起主要作用。因为它本身强度大（因而阻力大），而且它直达下一叶片的叶背，从而引起激波与该叶片叶背上边界层的相互作用，使损失急剧增加。为了减小超声速叶栅的损失，就有必要降低槽道激波前的马赫数。由于叶型背面 D 点上马赫数为最高，因此，该处激波的强度最大并且与当地边界层的相互作用也最剧烈。所以，D 点上马赫数的控制是一个重要的设计问题。第二、三种情况中叶背前部采用直线或内凹形曲线，因此是减小 D 点马赫数的一种处理措施。

如果减小栅后背压 p_2 值，则激波就向叶片前缘接近。同时，根据叶型与来流攻角的不同，在叶盆前缘也有可能出现激波，如图 2.49（a）所示。如果再进一步发展，气流可以在喉部截面处达到声速，产生于叶盆的激波也会贯穿于整个槽道而向下游移动，造成很大的损失，如图 2.49（b）所示。

如果不发生前面所说的阻塞现象，那么，进一步倾斜的槽道激波与叶盆产生的激波联结在一起形成了 λ 形。如果栅后背压 p_2 相当低，则槽道激波变成斜激波并且在背面上反射，如图 2.50 所示。

如果提高进口马赫数 M_{w1} 直到它的轴向分量等于或大于 1，这时激波的前伸部分就不会



传播到叶栅的上游而是进入叶片槽道内部并被反射，如图 2.51 所示。

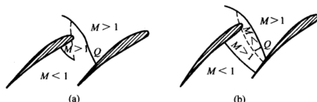


图 2.49　槽道内激波系的形成

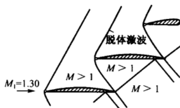


图 2.50　M_{w1}=1.3 时双圆弧叶栅内的激波系

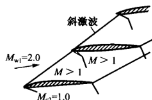


图 2.51　M_{w1}=2.0 时的激波系

从上面的讨论可以看出：叶栅激波与膨胀波所组成的波系结构不同于孤立翼型，它比机翼绕流的确复杂得多。叶栅的激波形状不仅与叶栅本身几何参数有关，而且还与进口相对马赫数 M_{w1}、叶栅的压比等有关。正由于这些问题的复杂性，才促使了叶轮机械气动热力学研究的不断发展与完善。

2.7.2　任意回转面叶栅超声速进口流场中惟一进气角的确定

叶栅绕流存在着周期性条件；对于进气轴向马赫数小于 1 的超声速来流，还存在着惟一进气角的条件[20]；这是叶栅超声速进口流场计算中最为关注的两大条件[21]。

一、相对坐标系下沿任意流面流动的基本方程组

今考虑以等角速度 ω 旋转的相对坐标系并在这个坐标系中选取一个（即动坐标系固连在该流面上）。假定气体沿流面的运动是定常的，气体是无粘的，可压缩的完全气体，于是式（1-3-17）、式（1-3-21）、式（1-3-19）被简化为

$$\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{W})=0 \tag{2-7-1}$$

$$\boldsymbol{W}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\boldsymbol{W}\times(\nabla\times\boldsymbol{W})-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}=\nabla I-T\nabla S \tag{2-7-2}$$

$$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=\boldsymbol{W}\cdot\nabla I=0 \tag{2-7-3}$$

式中，W,V,ρ,I 与 S 分别为相对速度，绝对速度、密度、转子焓与熵。令 (x^1,x^2) 为流面上的高斯（Gauss）坐标，令该流面的法向测地线为 x^3，取 m 为法向测地线的弧长，取 $x^3=m$，于是（x^1,x^2,x^3）构成了半测地坐标系（它为右手系）。这个坐标系度量张量的重要特点是

$$\left.\begin{aligned} &g_{3\alpha}=g_{\alpha 3}=0 \qquad &(\alpha=1,2)\\ &g_{33}=1,\ g^{33}=1 &\\ &g^{3\alpha}=g^{\alpha 3}=0 \qquad &(\alpha=1,2)\end{aligned}\right\} \tag{2-7-4}$$

考虑到气体沿流面的运动，有

$$w^3=0,\quad w_3=0 \tag{2-7-5}$$

设圆柱坐标系 (r,φ,z) 也固连于该流面上，并假设该流面可以表示为下面形式的参数方程

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,x^2)$$

这里 $x^{1'}=r,x^{2'}=\varphi,x^{3'}=z,(x^1,x^2)$ 为曲面的高斯坐标。于是在该流面上采用 (x^1,x^2,x^3) 坐标系时的度量张量为

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}&=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^\beta}+r^2\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^\beta}\\ &=\frac{\partial r}{\partial x^\alpha}\frac{\partial r}{\partial x^\beta}+r^2\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}+\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z}{\partial x^\beta} \qquad (\alpha,\beta=1\sim 2)\end{aligned} \tag{2-7-6}$$

在 (x^1,x^2,x^3) 坐标系下，令 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为坐标系的基矢量，于是旋转角速度 ω（这里假定旋转轴为柱坐标系 (r,φ,z) 中的 z 轴）的逆变分量 ω^3 为

$$\omega^3=\frac{\omega r}{\sqrt{g}}\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x^1,x^2)} \tag{2-7-7}$$

这里 $\partial(r,\varphi)/\partial(x^1,x^2)$ 为函数行列式，g 为在 (x^1,x^2,x^3) 坐标系中由 g_{ij} 组成行列式的值。由于 (x^1,x^2,x^3) 为半测地坐标系，因此

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{12}=g_{11}g_{22}\sin^2\theta \tag{2-7-8}$$

式中，θ 为基矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 间的夹角。

相对速度 $\boldsymbol{W}$ 为

$$\mathbf{W}=w_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha=w^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \qquad (\alpha=1,2) \tag{2-7-9}$$

将式（2-7-9）代入到式（2-7-1）并注意到式（2-7-5）与式（2-7-4），得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\rho w^\alpha\sqrt{g}\right)+\rho\sqrt{g}\frac{\partial w^3}{\partial x^3}=0 \tag{2-7-10}$$

引进积分因子 $\tau(x^\alpha)$，使下式成立即



$$w^{\alpha}\frac{\partial \ln\tau}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial w^3}{\partial x^3}\quad(\alpha=1,2) \tag{2-7-11}$$

将上式代入到式（2－7－10）便有

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\rho\tau w^{\alpha}\sqrt{g}\right)=0\qquad(\alpha=1,2) \tag{2-7-12}$$

由上式便可定义流函数 ψ，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^1}=-\rho\tau w^2\sqrt{g}\\[2mm]\dfrac{\partial\psi}{\partial x^2}=\rho\tau w^1\sqrt{g}\end{cases} \tag{2-7-13}$$

由此不难验证有如下等式成立，即

$$(\tau\rho W)^2=(\nabla\psi)\cdot(\nabla\psi)=g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}\qquad(\alpha,\beta=1\sim2) \tag{2-7-14}$$

式中，τ 为流面的法向厚度（又称流片的法向厚度）[22, 23]。

另外，将式（2－7－5）、式（2－7－4）用于式（2－7－2）后变为

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}^3\\ w^1 & w^2 & 0\\ -\dfrac{\partial w_2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial w_1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial w_2}{\partial x^1}-\dfrac{\partial w_1}{\partial x^2}\end{vmatrix}-2\sqrt{g}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}^3\\ \omega^1 & \omega^2 & \omega^3\\ w^1 & w^2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$\left[\frac{\partial I}{\partial x^1}-T\frac{\partial S}{\partial x^1},\frac{\partial I}{\partial x^2}-T\frac{\partial S}{\partial x^2},\frac{\partial I}{\partial x^3}-T\frac{\partial S}{\partial x^3}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^1\\ \boldsymbol{e}^2\\ \boldsymbol{e}^3\end{bmatrix} \tag{2-7-15}$$

将上式两边点乘 $\boldsymbol{e}_2$ 便得到

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^2}-\frac{\partial w_2}{\partial x^1}\right)-2\sqrt{g}\left(\omega^3\right)=\frac{1}{w^1}\left(\frac{\partial I}{\partial x^2}-T\frac{\partial S}{\partial x^2}\right) \tag{2-7-16}$$

式中，w^3 由式（2－7－7）给出。

同样的将式（2－7－5）、式（2－7－4）用于式（2－7－3）后变为

$$w^{\alpha}\frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}}=0\qquad(\alpha=1,2) \tag{2-7-17}$$

另外，对于反映熵增的式（1－3－20）在气体定常、绝热、无粘的条件下也简化为

$$\boldsymbol{W}\cdot\nabla S=0 \tag{2-7-18}$$

或者

$$w^{\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^{\alpha}}=0 \tag{2-7-19}$$

因此，式（2－7－12）、式（2－7－15）、式（2－7－17）以及式（2－7－19）便构成了相对坐标系下气体沿任意流面流动的基本方程组，它常被称为叶轮机械吴仲华基本方程组（简称吴氏方程组）。这组方程已被广泛的用于 S_1 与 S_2 流面的无粘计算。如果考虑粘性，则吴氏方程为[22]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{W})=0 \tag{1-3-17}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}-\boldsymbol{W}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=-\nabla I+T\nabla S+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi} \tag{1-3-21}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+\dot{q}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{W}) \tag{1-3-19}$$

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\dot{q}+\frac{\phi}{\rho} \tag{1-3-20}$$

式中，ϕ 为耗散函数；$\boldsymbol{\Pi}$ 为粘性应力张量。

应当指出：上述方程组在研究三维流动时含有 6 个标量方程，但仅有五个方程独立。事实上，只要将式（1－3－21）两边点乘 $\boldsymbol{W}$ 便可得到

$$\boldsymbol{W}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}=-\boldsymbol{W}\cdot\nabla I+T\boldsymbol{W}\cdot\nabla S+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{W}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}) \tag{2-7-20}$$

注意到热力学吉布斯（Gibbs）关系与转子焓定义，又可得到

$$\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}=T\frac{\partial S}{\partial t} \tag{2-7-21}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\boldsymbol{W}\cdot\nabla I=\frac{\partial h}{\partial t}+\boldsymbol{W}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}+\boldsymbol{W}\cdot\nabla I \tag{2-7-22}$$

式中，h 为静焓。

于是将式（2－7－20）、式（2－7－21）与式（2－7－22）三式相加便得到式（1－3－19），这表明由式（1－3－17）、式（1－3－21）、式（1－3－19）与式（1－3－20）所包含的六个方程中仅有五个是相互独立的。同样地对于无粘流动，如果将 $\boldsymbol{W}$ 点乘式（2－7－2）的两边便得到

$$\boldsymbol{W}\cdot\nabla I-T\boldsymbol{W}\cdot\nabla S=0 \tag{2-7-23}$$

显然，上式减去式（2－7－3）就可得到式（2－7－18）。这也就是说由式（2－7－1）、式（2－7－3）与式（2－7－18）所包含的六个标量方程（即一个连续方程、三个方向的运动方程、一个能量方程和一个熵方程）中仅有五个是相互独立的。在实际计算中，可以使用一个连续方程、



两个方向上的运动方程、一个能量方程和一个熵方程作为五个独立的方程。当然也可以使用由式（1－3－17）、式（1－3－18）和式（1－3－19）所组成的基本方程组。

二、任意回转流面上的高斯坐标

作为任意流面的特例，这里讨论任意回转流面。仍像上面叙述的那样，取 (x^1,x^2,x^3) 固连在以等角速度 ω 旋转的流面上。这里 x^1,x^2 张在流面上，它们是流面上的高斯坐标，x^3 沿半测地线方向，因此 (x^1,x^2,x^3) 仍为半测地坐标系，这时式（2－7－4）、式（2－7－6）、式（2－7－7）、与式（2－7－8）仍然适用。因为任意回转面为流面，当然有式（2－7－5）成立。如果令 l 为任意回转面的子午母线（又称子午流线），φ 沿周向为圆周角坐标；于是取 $x^1=l,x^2=\varphi$，则由 (l,φ,x^3) 所构成的半测地坐标系为正交曲线坐标系，在这个坐标系中度量张量为

$$\begin{cases}\sqrt{g_{11}}=1,\sqrt{g_{22}}=r,\sqrt{g^{11}}=1,\sqrt{g^{22}}=\dfrac{1}{r}\\ g_{ij}=0\quad(i\neq j)\\ g^{ij}=0\quad(i\neq j)\\ g^{33}=1,\ g_{33}=1\end{cases}\tag{2-7-24}$$

设回转面母线的参数方程为

$$r=r(l),\ z=z(l)$$

其中 l 为母线的弧长。于是在 (l,φ,x^3) 这个坐标系中 ω^3 与 g 分别变成

$$\omega^3=\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}=\omega\sin\sigma\tag{2-7-25}$$

$$g=(r)^2\tag{2-7-26}$$

式中，σ 为子午母线与轴线方向的夹角[22, 24]。

应当指出，张在任意回转面上高斯坐标 (x^1,x^2) 的曲线有多种形状，它们可以是正交的，也可以是非正交的。文献［25］是国内在 S_1 流面上使用非正交曲线坐标的典型文献，文献［26］求解了 S_1 流面上含分流叶栅或串列叶栅的流场，并且使用了非正交贴体曲线坐标系，可供感兴趣者进一步阅读。

三、旋转流面上超声速流动基本方程组的特征分析

假设在以等角速度 ω 旋转的相对坐标系中，流面上的气体作定常流动，并假定该气体是无粘、无热传导、无外加热，忽略了气体彻体力的完全气体，因此由连续方程、运动方程和能量方程所组成的基本方程组在三维欧氏空间中为

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{W})=0\tag{1-3-17}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{W}+\nabla\frac{(W)^2}{2}-\nabla\frac{(\omega r)^2}{2}=-\frac{1}{\rho}\nabla P\tag{2-7-27}$$

$$\boldsymbol{V}\cdot(\nabla h)-\frac{\boldsymbol{V}\cdot(\nabla P)}{\rho}=0 \tag{2-7-28}$$

式中，h 为焓，它是压强 P 与密度 ρ 的函数。

因此式（2-7-28）又可写为

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_P \boldsymbol{V}\cdot(\nabla\rho)+\left[\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_\rho-\frac{1}{\rho}\right]\boldsymbol{V}\cdot(\nabla P)=0 \tag{2-7-29}$$

使用热力学函数很容易得到

$$a^2=-\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_P \Big/ \left[\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_\rho-\frac{1}{\rho}\right] \tag{2-7-30}$$

于是将式（2-7-29）变为

$$a^2\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho-\boldsymbol{V}\cdot\nabla P=0 \tag{2-7-31}$$

注意到式（1-3-2）以及绝对运动为定常流、相对运动也为定常流动的假定，上式又可变为

$$a^2\boldsymbol{W}\cdot\nabla\rho-\boldsymbol{W}\cdot\nabla P=0 \tag{2-7-32}$$

于是由式（1-3-17）、式（2-7-27）和式（2-7-32）所组成的关于 $\rho,\boldsymbol{W},P$ 方程组为我们进行相对流面上超声速流动特征分析时所使用的基本方程组，在三维欧氏空间中为

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{W})=0\\ (\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{W}+\dfrac{1}{\rho}\nabla P+\nabla\dfrac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}}{2}=\nabla\dfrac{(\omega r)^2}{2}\\ \boldsymbol{W}\cdot\nabla P-a^2\boldsymbol{W}\cdot\nabla\rho=0\end{cases} \tag{2-7-33}$$

由于流面为任意回转面，因此取 $x^1=l,x^2=\varphi,x^3$ 沿流面的半测地线方向，x^1 与 x^2 张在流面上，并且注意到

$$\left.\begin{aligned}w^1&=W_l\\ w^2&=W_\varphi/r\end{aligned}\right\} \tag{2-7-34}$$

这里 W_l 与 W_φ 分别为 $\boldsymbol{W}$ 沿 l 与 φ 方向的物理分速度，而 w^1 与 w^2 为相对速度的逆变分量。在 (x^1,x^2,x^3) 坐标系下将式（2-7-33）在流面上作展开，并注意引进流面法向厚度 τ，于是 l 与 φ 方向的运动方程、能量方程和连续方程可表示为



$$
\begin{cases}
W_l \dfrac{\partial W_l}{\partial l} + \dfrac{W_\varphi}{r} \dfrac{\partial W_l}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial P}{\partial l} = b_1 \\
W_l \dfrac{\partial W_\varphi}{\partial l} + \dfrac{W_\varphi}{r} \dfrac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial P}{r \partial \varphi} = b_2 \\
W_l \dfrac{\partial \rho}{\partial l} + W_\varphi \dfrac{\partial \rho}{r \partial \varphi} - \dfrac{W_l}{a^2} \dfrac{\partial P}{\partial l} - \dfrac{W_\varphi}{a^2} \dfrac{\partial P}{r \partial \varphi} = 0 \\
r\tau W_l \dfrac{\partial \rho}{\partial l} + \tau W_\varphi \dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi} + r\tau\rho \dfrac{\partial W_l}{\partial l} + \rho\tau \dfrac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = b_3
\end{cases}
\tag{2-7-35}
$$

式中，b_1, b_2, b_3 为相应式子展开整理后的右端项。作为课后练习题，读者可自行补上这里 b_1, b_2, b_3 的具体表达式。

设 λ 为方程组式（2-7-35）所对应的特征方程的特征根（关于特征方程的有关问题，本书第 4 章与第 8 章还要专门讲授，当然也可参阅文献[27]的第五章§2 与§3 节），该特征根有四个，它们分别为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{W_\varphi}{r W_l} \tag{2-7-36}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{r} \tan(\beta - \mu) \tag{2-7-37}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{r} \tan(\beta + \mu) \tag{2-7-38}$$

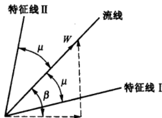


图 2.52　物理面特征线

式中，μ 与 β 分别为马赫角与气流角，如图 2.52 所示；r 为回转面半径，因此回转面上的特征线方程为

$$r \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \tan(\beta \mp \mu) \tag{2-7-39}$$

在特征线上必须满足的相容性关系为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\beta}{\sin\mu\cos\mu} \mp \frac{\mathrm{d}P}{\gamma P} \mp \frac{\cos\beta}{\cos\mu\cos(\beta\mp\mu)} \mathrm{d}\ln(\tau r) + \\
&\frac{\tan(\beta\mp\mu)}{\sin\mu\cos\mu} \frac{\omega^2 r}{(W)^2} \mathrm{d}r + \frac{\left(\dfrac{W_\varphi}{r} + 2\omega\right)}{W\sin\mu\cos(\beta\mp\mu)} \mathrm{d}r = 0
\end{aligned}
\tag{2-7-40}
$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\rho} + \frac{1}{2}\mathrm{d}(W)^2 - \omega^2 r \mathrm{d}r = \mathrm{d}I - T\mathrm{d}S \tag{2-7-41}$$

代入式（2-7-40）消去 $\mathrm{d}P/P$ 项后得到

$$\tan\mu\,\mathrm{d}\beta \pm \frac{\mathrm{d}W}{W} \mp \frac{\mathrm{d}I - T\mathrm{d}S}{(W)^2} \mp \frac{\sin^2\mu\cos\beta}{\cos\mu\cos(\beta\mp\mu)}\mathrm{d}\ln(\tau r) + \frac{\sin\mu}{W\cos(\beta\mp\mu)}\left(\frac{W_\varphi}{r} + 2\omega\right)\mathrm{d}r \mp \frac{(\omega)^2 r\cos\beta}{(W)^2\cos\mu\cos(\beta\mp\mu)}\mathrm{d}r = 0 \tag{2-7-42}$$

式中，I 与 S 分别为转子焓与熵。

式（2-7-42）就是任意回转流面上沿特征线（其中包括第 I 族和第 II 族特征线）的相容性方程，这个方程在特征线计算中要经常使用。特别是对于平面叶栅，此时 $\mathrm{d}r=0$，并假设流片厚度 $\tau=1$，假定全场均 I（即转子焓不变），于是式（2-7-42）式可简化为

$$\frac{1}{W}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\beta}\right)_{\mathrm{I,II}} = \mp\tan\mu - \frac{(\sin\mu)^2}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}(S/R) \tag{2-7-43}$$

式中，γ 为比热比；R 为气体常数。

当然，对于平面叶栅如果选取 x, y 为直角坐标系，则式（2-7-39）可简化为[28]

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{I,II}} = \tan(\beta\mp\mu) \tag{2-7-44}$$

方程式（2-7-44）也被广泛用于一般二维、定常、绝热、无粘气体的超声速流动问题[29~38]。

四、关于栅前脱体曲线激波的自动伸展

假设特征线网格足够密集，致使曲线激波的各曲线段能够用线段 AB, BC, CD, DE, EF 来代替。下面我们以已知激波段 CB 为例，讨论生成激波段 BA 的伸展过程，如图 2.53 所示。

假设脱体曲线激波段两端点 B 和 C 的位置，点 P 的位置和流动参数均已知（这里 BP 是第 I 族特征线），并且给定曲线激波段上游流场，则过点 P 作第 II 族特征线后可将激波段由 CB 伸展到 A，并且点 A 的位置是惟一确定的。下面给出确定 A 点坐标 (x_A, y_A) 的过程：

由第 II 族特征线的相容性方程（2-7-43）式并用点 A 和点 P 将其差分离散得到

$$\frac{1}{\tilde{W}_{PA}}\frac{W_2 - W_P}{\beta_2 - \beta_P} = \tan\tilde{\mu}_{PA} - \frac{(\sin\tilde{\mu}_{PA})^2}{\gamma}\frac{(S/R)_2 - (S/R)_P}{\beta_2 - \beta_P} \tag{2-7-45}$$

式中，$\tilde{W}_{PA}$ 与 $\tilde{\mu}_{PA}$ 为平均值，即

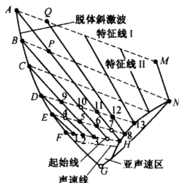


图 2.53　特征线的计算及激波的自动伸展



$$\tilde{W}_{PA}=\frac{W_P+W_2}{2},\quad \tilde{\mu}_{PA}=\frac{\mu_P+\mu_2}{2}$$

这里下注脚 2 表示点 A 在激波后的参数；在迭代求解时

$$\tilde{W}_{PA}^{(n)}=\frac{W_P+W_2^{(n-1)}}{2},\quad \tilde{\mu}_{PA}^{(n)}=\frac{\mu_P+\mu_2^{(n-1)}}{2}$$

这里上注脚 (n) 和 $(n-1)$ 分别表示第 n 次迭代和第 $(n-1)$ 次迭代，当 $n=1$ 时取

$$\tilde{W}_{PA}^{(1)}=W_P,\tilde{\mu}_{PA}^{(1)}=\mu_P$$

注意：在上面的式子中，W_2,μ_2 和 S_2 应由下面的斜激波关系及特征线方程式（2-7-44）确定。斜激波关系是

$$W_2=\frac{M_2}{\sqrt{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}} \tag{2-7-46a}$$

$$M_2=\frac{\sqrt{\dfrac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\sin^2\sigma}{\gamma M_1^2\sin^2\sigma-\frac{\gamma-1}{2}}}}{\sin(\sigma-\delta)} \tag{2-7-46b}$$

$$\delta=\sigma-\arctan\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\tan\sigma\right) \tag{2-7-46c}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{P_2}{P_1}+1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{P_2}{P_1}} \tag{2-7-46d}$$

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\sin^2\sigma-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{2-7-46e}$$

$$\sigma=\pi-(\theta+\beta_1)=\pi-\left(\arctan\left|\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\right|+\beta_1\right) \tag{2-7-46f}$$

$$\mu_2=\arctan\frac{1}{\sqrt{M_2^2-1}} \tag{2-7-46g}$$

$$S_2/R=\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left[\frac{2}{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\sigma}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\gamma-1}\ln\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\sin^2\sigma-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]\right\}+S_1/R \qquad (2-7-46h)$$

$$=\left(\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)+S_1/R$$

$$\beta_2=\beta_1+\delta \qquad (2-7-46i)$$

式中，σ 为激波角；δ 为折转角；下注角 1 表示 A 点激波前参数，下注角 2 仍表示点 A 激波后的参数值。

角 σ,β_1,β_2 和 σ 间的相互关系如图 2.54 所示。显然，在确定激波角 σ 的过程中必须涉及到 x_A 和 y_A，因此必须补充通过点 P 与点 A 的第 II 族特征线方程即式（2-7-44），其离散化后为

$$y_A=(x_A-x_P)\tan(\beta_P+\mu_P)+y_P \qquad (2-7-46j)$$

将式（2-7-46）代入到式（2-7-45）中便得到一个关于 x_A 的超越代数方程，今简记为

$$f(x_A)=0 \qquad (2-7-47)$$

上式可用快速弦截法求解。在迭代计算中，第一次迭代的值 $x_A^{(1)}$ 可用 CB 的延长线与过点 P 的第 II 族特征线的交点坐标。实际计算表明：用该迭代法仅迭代 3～4 次便可得到精度较高的 x_A 值。重复上面单元的计算过程，便可以由 B 、A 和 Q 点，如见图 2.53 所示，将激波段继续往上伸展。

五、内点或边界点的单元分析

与文献［4］和文献［39］相比，本节内点计算时考虑了熵增的影响。下面以已知点 1 和点 2 去计算内点点 3 为例，如图 2.55 所示，说明这个单元的计算过程。

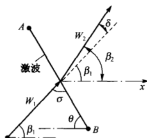


图 2.54　几个角度的定义

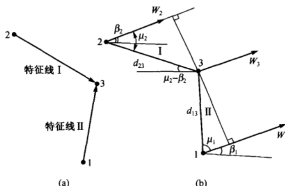


图 2.55　内点单元分析



在超声速流场的计算中，我们引进了三个量纲为 1 的参数

$$W^* \equiv W/a_{io};\quad \beta;\quad S^* \equiv (S - S_{io})/R \tag{2-7-48}$$

式中，下标 io 表示进口滞止状态。式中其余参数 T^*、M、P^*、ρ^* 均可由这三个基本参数算出，其具体公式是

$$T^* = 1 - \frac{\gamma - 1}{2}(W^*)^2 \tag{2-7-49a}$$

$$M = W^*/(\sqrt{T^*}) \tag{2-7-49b}$$

$$P^* = e^{-s^*}(T^*)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{2-7-49c}$$

$$\rho^* = P^*/T^* \tag{2-7-49d}$$

这里上标*表示量纲为 1 的值。以下讨论在点 1 和点 2 的位置及该点的 W^*、β、S^* 已知情况下，如何决定点 3 的几何坐标和该点的 W^*、β、S^* 值。事实上由特征线方程得

$$\begin{cases} \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \tan(\beta_{23} - \mu_{23}) \\ \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \tan(\beta_{13} + \mu_{13}) \end{cases} \tag{2-7-50}$$

由它确定出点 3 的坐标 (x_3, y_3)；由特征相容性方程得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{W_{13}}\dfrac{W_3 - W_1}{\beta_3 - \beta_1} = \tan\mu_{13} - \dfrac{(\sin\mu_{13})^2}{\gamma R}\dfrac{S_3 - S_1}{\beta_3 - \beta_1} \\ \dfrac{1}{W_{23}}\dfrac{W_3 - W_2}{\beta_3 - \beta_2} = -\tan\mu_{23} - \dfrac{(\sin\mu_{23})^2}{\gamma R}\dfrac{S_3 - S_2}{\beta_3 - \beta_2} \end{cases} \tag{2-7-51}$$

由式（2-7-51）决定出点 3 的 W 和 β 值。注意式中熵的计算用下面的近似办法。

假设沿流线熵为常数（即不考虑沿流线熵增的积累），且设点 1 与点 2 很近，认为两点间熵的变化为线性分布，于是有如下结果

$$S_3 = S_1 + \frac{d_{13}(S_2 - S_1)\sin\mu_1}{d_{23}\sin\mu_2 + d_{13}\sin\mu_1} \tag{2-7-52a}$$

或者

$$S_3 = S_2 + \frac{d_{23}(S_2 - S_1)\sin\mu_2}{d_{23}\sin\mu_2 + d_{13}\sin\mu_1} \tag{2-7-52b}$$

式中，d_{13} 表示点 1 和点 3 之间的距离；d_{23} 表示点 2 和点 3 之间的距离；另外在式（2-7-50）和式（2-7-51）中下标 13 和 23 分别表示点 1 与点 3 间及点 2 与点 3 间的平均值。

六、栅前周期性条件的实现

栅前周期性条件的实现是特征线法计算超声速叶栅流场的难点之一[40~42]，我们采用了下面的计算技巧，即：采用了一个叶片一个叶片地往上计算，直到相邻两个叶片激波前对应点的参数相同，即满足周期性条件为止。图 2.56 给出了这个流动模型的典型示意图，图中 $N=1,2,3,\cdots$，分别代表第一个，第二个，第三个……叶片，图中 M_i 与 β 分别表示进口马赫数与气流角。图 2.57（a），图 2.57（b）和图 2.57（c）分别给出了计算结果。很显然，除熵分布以外，其余流动参数算到第二、第三个叶片已相当接近了，而第三、第四个叶片更为接近；但对熵的分布，要多算几个叶片。由图 2.57（c）可以看到：一直计算到第六、第七个叶片才比较接近，由此可见，欲使熵的分布满足栅前周期性条件只算一、二个叶片是不够的。

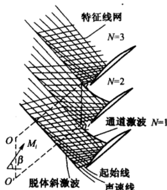


图 2.56　典型流动模型示意图

我们用 FORTRAN 语言将上述计算过程编制成计算机程序并在 UNIVAC-1100 机上一个叶片一个叶片地往上计算，计算 6 个叶片占用机时还不到 2 min，计算时占用的计算机内存也只有 30 KB 左右[43]。

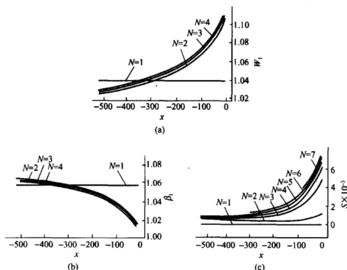


图 2.57

（a）激波前速度分布；（b）激波前气流角分布；（c）激波前熵分布



七、惟一进气角的确定

叶栅绕流存在着周期性条件。对于进气轴向马赫数小于 1 的超声速来流，还存在着惟一进气角的条件。取控制体 $oo'aa'$，如图 2.58 所示，aa' 之间的距离为一个栅距，oo' 认为是无限远均匀来流处。由于周期性条件，故在 oa 和 $o'a'$ 两条线上流动情况相同。令 N 为叶片数，因此连续方程为

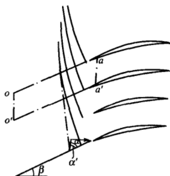


图 2.58　叶栅前缘脱体激波及周期性条件

$$\rho_\infty W_\infty \cos\beta_\infty = \frac{N}{2\pi r_\infty \tau_\infty}\int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}} (r\tau\rho W\cos\beta)\,\mathrm{d}\varphi \equiv b_1 \tag{2-7-53a}$$

φ 向（周向）动量方程为

$$\left(\rho W^2 \sin\beta\cos\beta\right)_\infty = \frac{N}{2\pi r_\infty^2 \tau_\infty}\int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}} (\tau\rho r^2 W^2 \sin\beta\cos\beta)\,\mathrm{d}\varphi \equiv b_2 \tag{2-7-53b}$$

轴向动量方程为

$$P_\infty + \left(\rho W^2 \cos^2\beta\right)_\infty = \frac{N}{2\pi r_\infty \tau_\infty}\int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}} [r\tau(P+\rho W^2\cos^2\beta)]\,\mathrm{d}\varphi \equiv b_3 \tag{2-7-53c}$$

能量方程为

$$c_P T_\infty + \frac{W_\infty^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\omega^2 r_\infty^2 - \omega^2 r_a^2 + W_a^2\right) + c_P T_a = b_4 \tag{2-7-53d}$$

式中，下注脚 a 表示 a 点处的参数值。

状态方程为

$$P = \rho R T \tag{2-7-54}$$

上述五个式中，含 $\rho_\infty, P_\infty, T_\infty, W_\infty$ 和 β_∞ 共五个未知数。由上述方程组中消去 $\rho_\infty, P_\infty, T_\infty$ 和 W_∞ 后得到

$$A_1 \cot^2\beta_\infty + B_1 \cot\beta_\infty + C_1 = 0 \tag{2-7-55}$$

式中

$$\begin{cases} A_1 = \left(\dfrac{b_2}{b_1}\right)^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{c_P}{R}\right) \\ B_1 = \dfrac{b_2}{b_1^2}\dfrac{b_3}{R}c_P \\ C_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_2}{b_1}\right)^2 - b_4 \end{cases}$$

于是由式（2-7-55）直接求出角 β_∞ 值，再求出 W_∞ 等气动参数值。应当指出：这样所得到的 β_∞ 和 M_∞ 值是对应于初始假定的无限远均匀进口处 β_0 和 M_0 值得到的。如果相互间差别不能满足迭代的允差范围，则用新计算的 β_∞ 和 M_∞ 值作初始假定值输入用特征线法去计算超声速进口的流场，然后再用式（2-7-55）去计算出新的 β_∞，再求出相应新的 M_∞ 值等。如此进行，直到输入的与新算出的 β_∞ 与 M_∞ 值均满足所要求的误差为止。

2.7.3 涡轮叶栅中的气流流动及波系结构

航空燃气涡轮发动机多采用反力式涡轮，也就是说气流在动叶和静叶片通道中都加速膨胀流动。涡轮叶栅的通道形式大体上可分两类，一类是纯收缩型，另一类是收缩—扩张型。工程实践表明，叶栅栅距、叶型型线设计等对涡轮中气流的绕流特性影响很大。对于同一个叶型和叶栅几何参数完全确定的叶栅，当进出口气动参数改变时涡轮叶栅的流场也会发生变化。

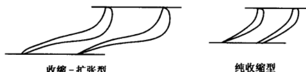


图 2.59　涡轮叶栅通道的形式

下面具体介绍一个纯收缩型通道的典型涡轮叶栅，当进口气动参数（例如进气角 β_1（相对速度与周向的夹角）和进气总压 P_{01}）不改变，而降低叶栅后背压 p_2 时的流动情况。

（1）在涡轮叶栅中气流是膨胀加速流动的。背压 p_2 较高时，在叶栅进口处流动速度很低，当燃气流经叶型表面时，在叶片前缘的某一点（前驻点）处，气流分叉流向叶背和叶盆。随着涡轮叶栅通道不断收缩，气流逐渐加速。但这时叶栅前后压差不大，叶栅中降压膨胀加速并不多，全流场都是亚声速流动，M_2 很小。

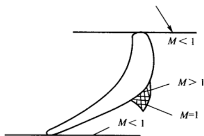


图 2.60　涡轮叶栅中的局部超声速区

（2）随着背压 p_2 的逐渐降低，涡轮叶栅中降压膨胀加速程度加大。气流沿叶背加速，就有可能在通道内叶背曲率最大的部位出现局部超声速区，该区以声速线开始，并大体上以正激波结尾。局部超声区以外都是亚声速流动，如图 2.60 所示。



我们定义叶型上某一点已达声速时的工况马赫数为临界马赫数 M_{2cr}，对一般叶栅来说，其值约为 0.7～0.8。显然，当背压继续降低时，局部超声区逐渐扩大，其后的结尾正激波也会顺流后移。

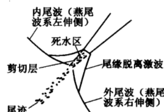


图 2.61　尾缘的激波系

（3）当背压降低到使工况马赫数达到某一数值时，在叶片尾缘处，由于气流急剧转弯加速，压力下降，出现另一个局部超声速区。从叶背、叶盆表面流出的气流离开尾缘后出现两道分离激波，两股气流在尾缘后某一位置会合，发生折转，同时产生两组压缩波，并汇集成一对燕尾形的斜激波，其右支（顺气流动方向看）伸向通道称为内尾波，左支伸向栅后，称为外尾波。如图 2.61 所示。

（4）背压继续降低，当内尾波与叶背局部超声速区后的正激波相遇时，即表明超声波区（声速线）贯穿整个通道，叶栅进入阻塞工况，此时的工况马赫数称为阻塞工况马赫数，一般约为 1.0（或略小于 1.0）。与此同时，栅前进口马赫数 M_1 将不随 M_2 的加大而增大，我们将进口马赫数 M_1 的最大值称为栅前阻塞马赫数，与之对应的叶栅流量也将达到最大值。这时栅后背压与栅前总压之比 p_2/p_{01}，称为临界压力比，用 $(p_2/p_{01})_{cr}$ 表示。在这种情况下，叶栅通道内的速度分布如图 2.62 所示，这时在喉部附近正激波（垂直激波）和内尾波相交贯穿。

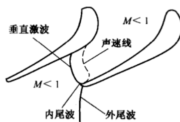


图 2.62　阻塞工况时通道内的速度分布

（5）背压继续降低，$(p_2/p_{01})<(p_2/p_{01})_{cr}$，叶栅出口气流为超声速，这是叶栅的超声速工况段。正激波沿叶背迅速推向叶栅外空间，气流绕叶盆尾缘急剧加速，在斜切口（叶栅喉部以后的通道区域）内形成一组扇形膨胀波射向相邻叶片的叶背，并在叶背上形成反射膨胀波。气流穿过该组膨胀波及反射膨胀波在斜切口继续超声速膨胀，即所谓的“超声斜切口膨胀”。随着出口马赫数的增大，内尾波逐渐变斜，射向叶背，内尾波作用在叶背壁面，与叶片边界层相互干扰后产生反射激波，并且在叶背上的入射点也将随着 M_2 增大向尾缘移动。图 2.63 给出了跨声涡轮叶栅在超声速工况下通道波系的情况。

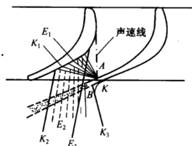


图 2.63　超声速工况下的通道波系

在这种工况下，通道波系主要由原先膨胀波



E_1，反射膨胀波 E_2，原生激波 E_3，尾缘脱离激波 K，内尾波 K_1，内尾波在叶背上的反射波 K_2，外尾波 K_3 以及叶片尾缘后的尾迹所组成。

参考文献

1 Courant R, Friedrichs K O. Supersonic flow and shock waves. New York: Springer-Verlag, 1976

2 Liepmann H W, Roshko A. Elements of gasdynamics. New York: Wiley, 1973

3 Thompson P A. Compressible fluid dynamics. New York: McGraw-Hill, 1972

4 Shapiro A H. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. Vols. 1 and 2, New York: Ronald Press, 1953

5 泽尔道维奇 Я Б，莱依捷尔 Ю П.激波和高温流体动力学现象物理学.张树材译，北京：科学出版社，1980

6 吴望一. 流体力学. 北京大学出版社，1982

7 清华大学工程力学系. 流体力学基础.北京：机械工业出版社，1982

8 庄礼贤，尹协远，马晖扬. 流体力学.合肥：中国科学技术大学出版社，1991

9 复旦大学数学系. 流体力学. 上海科学技术出版社，1960

10 周光坰，严宗毅，许世雄，章克本.流体力学（第二版），北京：高等教育出版社，2000

11 叶敬棠，柳兆荣，许世雄，吴正. 流体力学.上海：复旦大学出版社，1989

12 张兆顺，崔桂香. 流体力学. 北京：清华大学出版社，1999

13 景思睿，张鸣远. 流体力学. 西安交通大学出版社，2001

14 朗道 Л Д，栗弗席茨 E M.流体力学（下册）. 孔祥言等译，童秉纲校.北京：高等教育出版社，1990

15 童秉纲，孔祥言，邓国华. 气体动力学. 北京：高等教育出版社，1990

16 潘锦珊.气体动力学基础（修订版）. 北京：国防工业出版社，1989

17 时爱民，苏铭德，刘季稔. 气体动力学基础. 北京：科学出版社，1988

18 Краснов Н Ф. Аэродинамика тел вращения.Москва:Оборонгиз, 1958

19 姜正行. 飞机内流空气动力学. 徐华舫审校. 北京：航空工业出版社，1989

20 Hawthorne W R. Aerodynamics of turbines and compressors. Princeton: Princeton University Press, 1964

21 李根深，陈乃兴，强国芳. 船用燃气轮机轴流式叶轮机械气动热力学（原理、设计与试验研究）（下册）. 北京：国防工业出版社，1985

22 吴仲华.A general theory of two-and three-dimensional rotational flow in subsonic and transonic turbomachines. NASA CR 4496, 1993

23 刘高联，王甲升. 叶轮机械气体动力学基础. 北京：机械工业出版社，1980

24 王仲奇.透平机械三元流动计算及其数学和气动力学基础. 北京：机械工业出版社，1983

25 吴文权，刘翠娥. 使用非正交曲线坐标与速度分量 S_1 流面正问题流场矩阵解. 工程热物理学报，



1980，1（1）：17～27

26　吴仲华，王保国. Matrix solution of compressible flow on S_1surface through a turbomachine blade row with splitter vanes or tandem blades. Trans. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1984, 106: 449～454

27　柯朗，希尔伯特. 数学物理方法（第 2 卷）.北京：科学出版社，1977

28　卞荫贵. 理想气体动力学（中册）.北京：中国科学技术大学出版社，1965

29　苗瑞生，居贤铭. 火箭气体动力学. 北京：国防工业出版社，1985

30　徐华舫. 空气动力学基础. 北京：北京航空学院出版社，1987

31　张连玉，汪令羽，苗瑞生. 爆炸气体动力学基础. 北京：北京工业学院出版社，1987

32　林兆福. 气体动力学. 北京：北京航空航天大学出版社，1988

33　何洪庆，张振鹏. 固体火箭发动机气体动力学. 西安：西北工业大学出版社，1988

34　罗曼芦，王兆华. 气体动力学. 上海：上海交通大学出版社，1989

35　孔珑. 可压缩流体动力学. 北京：水利电力出版社.1991

36　陆家鹏. 自动武器气体动力学. 北京：兵器工业出版社，1991

37　赵肃铭，冯国泰，韩万今. 工程液体和气体动力学. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1992

38　赵承庆，姜毅.气体射流动力学. 北京：北京理工大学出版社，1998

39　Zucrow MJ, Hoffman J D. Gas dynamics. Vol.I. New York: John Wiley & Sons, 1976

40　York R E, Woodard H S. Flow in the entrance region of supersonic compressor cascade. DDA, EDR8224, 1974

41　吴仲华，华耀南，王保国.跨声速叶栅流的激波捕获—— 分区计算法.工程热物理学报，1986，7（2）：112～119

42　刘翠娥，吴文权. 任意回转面叶栅跨音速进口流场特征线法计算机程序和唯一进气角的确定. 工程热物理学报，1980，1（3）：255～264

43　王保国，黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法. 北京：国防工业出版社，2000

习　题

1. 超声速空气绕凸角流动，当 $M_1 = 2$ 膨胀到 $M_2 = 2.5$ 时，试求气流的折转角 θ。

2. 试从式（2.1.22）出发，推导微分式

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2}} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\sqrt{M^2 - 1}$$

或者

$$\mathrm{d}\lambda / \lambda = (\tan\mu)\mathrm{d}\theta$$

3. 在绝能等熵的空气流中，已知点 1 的马赫角 $\mu_1 = 27.7^\circ$，另一个点 2 的马赫角

$\mu_2 = 35.8°$。试求这两点的压强比 p_1 / p_2。

4. 具有速度 $V_1 = 498.34$ m/s、温度 $T_1 = 300\ K$ 和压强 $p_1 = 1.0133\times10^5$ Pa 的空气，绕外钝角壁面流动，气流转折角 $\theta = -15°$，试求膨胀波后气流的速度 V_2、温度 T_2 和压强 p_2 及膨胀波所占区域的扇形角 φ。

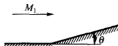


图 2.64　题 5 图

5. 有一均匀来流，压强为 0.685 大气压，$M_1 = 2$，绕凹角流动，$\theta = 10°$，试计算激波后的压强、马赫数以及熵的变化，如图 2.64 所示。

6. 从平面超声速喷管射出的超声速直匀空气流，设在出口截面上 $M_1 = 2$，$p_1 = 2\times10^5$ Pa，而喷管外部介质的压强 $p_a = 1\times10^5$ Pa。求射流边界相对于喷管轴线的偏斜角 θ 以及膨胀波后的马赫数 M_2。

7. 当超声速气流以 $\lambda_1 = 1.85$ 的速度流出管口时，外界压力为气流静压的 1.9 倍，如图 2.65 所示，试求III区的 λ_3 和 P_3 值。

8. 超声速气流绕凹壁流动，已知 $M_1 = 3.0, p_1 = 0.7$ 大气压，$\theta_1 = 6°$，$\theta_2 = 12°$，如图 2.66 所示，试求滑移线方向及 M_4 和 M_5 的值。

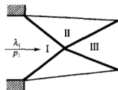


图 2.65　题 7 图

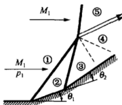


图 2.66　题 8 图

9. 对于 $\rho_1 = 1.6\ \text{kg/m}^3$、$p_1 = 6.895\times10^5$ Pa 的完全气体经正激波后，速度从 $V_1 = 456$ m/s 降低到 $V_2 = 152$ m/s。试求 ρ_2 / ρ_1、p_2 / p_1、T_2 / T_1 以及该气体的绝热指数 k，波前气流马赫数 M_1 及波后气流马赫数 M_2 的值。

10. 测得正激波后空气流的速度为 280 m/s，用热电偶测得的温度 $t = 77$ ℃，求激波前温度。（提示：热电偶测得的温度可以近似为气流总温）。

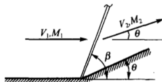


图 2.67　题 11 图

11. 试证明斜激波后的速度 V_2 为，如图 2.67 所示。

$$V_2 = \left(V_{2t}^2 + V_{2n}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\gamma+1}\frac{a_1}{M_1 \sin\beta}\left\{1 + (\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta + \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 - \gamma\sin^2\beta\right]M_1^4\sin^2\beta\right\}^{\frac{1}{2}}$$ 并给出相应



M_2 的关系式（即以 $M_2 = M_2(\gamma,\beta,\theta)$ 形式进行表达）的具体表达形式。

12. （1）利用斜激波关系（如图 2.16 所示）$\dfrac{V_{2n}}{V_{1n}} = \dfrac{\tan(\beta-\theta)}{\tan\beta}$，试证明：

$$\tan\beta = [(\varsigma-1) \pm \sqrt{(\varsigma-1)^2 - 4\varsigma\tan^2\theta}]/2\tan\theta$$

式中，$\varsigma = \rho_2/\rho_1$，表示激波两边的密度比值。

（2）利用上面的关系，试证明在 θ 很小时，对弱激波有

$$\tan\beta = \frac{\varsigma}{\varsigma-1}\theta$$

13. 有一道正激波，以等速 $N = \sqrt{2}a_1$ 的速度向右运动，假设波前空气静止，参数为 $p_1 = 10^5\ \text{N/m}^2$，$a_1 = 340\ \text{m/s}$，试问：当激波面刚好以 U 速度向右运动时，下列三种情况下壁面的压强以及激波运动的情况：① $U = N$；② $U = \dfrac{1}{2}N$，；③ $U = 0$

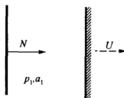


图 2.68　题 13 的附图

14. 有一道球形爆炸波在静止空气中传播。爆炸发生后 1/100 s 的时候，爆炸波波阵面的速度 $N = 2\,040\ \text{m/s}$，波前 $P_1 = 10^5\ \text{N/m}^2$，$a_1 = 340\ \text{m/s}$，试求这时的波后压强及速度。

15. 试用 FORTRAN 语言或者 C 语言编制轴对称超声速零攻角圆锥绕流的定常、无粘流场计算程序，并用所编程序完成 $M_\infty = 3.8$，$\delta_C = 20°$（如图 2.30 所示）时零攻角超声速无粘流的圆锥绕流解，这里空气的比热比 $\gamma = 1.4$。

16. 研究任意回转流面上的相对定常流动，其服从的基本方程组在二维 Riemann（黎曼）空间中为

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\tau\rho\boldsymbol{W}) = 0 \\ (\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{W} + \dfrac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\dfrac{(\boldsymbol{W})^2}{2} = \nabla\dfrac{(\omega r)^2}{2} \\ \boldsymbol{W}\cdot\nabla P - a^2\boldsymbol{W}\cdot\nabla\rho = 0 \end{cases}$$

式中，令任意回转面绕 OZ 轴以等角速度旋转，其旋转角速度为 ω；$\rho, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}$ 和 a 分别为密度，相对速度，绝对速度和声速；r 为所考察点到 OZ 轴的距离；令 l 为回转流面的子午母线；φ 为沿周向的圆周角坐标；τ 为流面的法向厚度，并假定 τ 是 l 与 φ 的函数，即 $\tau = \tau(l,\varphi)$。显然，由 l 与 φ 组成的高斯坐标张在任意回转的流面上。试在 (l,φ) 坐标系下，将上述基本方程组展开成式（2-7-35）的形式，并给出 b_1, b_2 与 b_3 项的具体表达式。

第3章　可压缩一维定常流动

所谓一维定常流动是指气流的物理量仅是某一个坐标的函数。例如，气体在变截面管道中的流动可以简化为准一维运动，只要管道截面积变化缓慢，而且管道的曲率半径比管道的水力半径大得多，这时气流的物理量沿管轴方向的变化要比在其他方向上的变化大得多，因此可以用物理量的平均值去描述这个截面上的流动参数。另外，研究气体一维定常流动的重要性还在于：在某些条件下，一维流动可以给出解析解或者是半解析半数值结果，这对于了解可压缩流体的流动规律极为重要。工程上常见的制约管道中气体流动变化的因素有：

① 管道截面积变化；

② 管壁的摩阻作用，特别是长管中的流动；

③ 对气流的加热作用，例如，冲压发动机或喷气发动机内气流经燃烧室而受到加热（集中加热）等等；

④ 对气流的添质作用，例如，固体火箭发动机中在药柱内腔的壁上燃烧释放的气体不断加入到主气流中去，从分支管道中流出的气体流入到主管道的主流中等等。

§3.1　广义一维流动的基本方程组

3.1.1　气体广义一维流动的基本方程组（绝对坐标系下）

一、连续方程

在静止坐标l下，我们考虑在$t=0$时长度为δl，体积为$\delta\Omega$，质量为δm的微小封闭体系（控制体）如图3.1所示，由质量守恒定律得

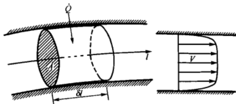


图3.1　曲线坐标l与微小封闭体系



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho A\mathrm{d}l)=0 \tag{3-1-1}$$

注意到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial A}{\partial l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=V\frac{\partial A}{\partial l}\\\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}l)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V}{\partial l}\mathrm{d}l\\\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial \rho}{\partial t}+V\frac{\partial \rho}{\partial l}\end{aligned}\right\} \tag{3-1-2}$$

于是（3－1－1）式变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial(\rho VA)}{\partial l}=0 \tag{3-1-3}$$

如果取一个大的开口体系，如图3.2所示，在任意瞬时将式（3－1－3）应用到这个大开口体系中的一个微元体上，然后对l积分得到

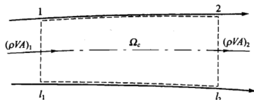


图3.2　大开口体系

$$\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial(\rho VA)}{\partial l}\mathrm{d}l+\int_{l_1}^{l_2}\left(A\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}l=0 \tag{3-1-4}$$

或者

$$(\rho VA)_2-(\rho VA)_1+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_c}\rho \mathrm{d}\Omega=0 \tag{3-1-5}$$

这里，Ω_c为大开口体系。

对于定常流，则式（3－1－3）变为

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial l}=0 \tag{3-1-6}$$

或

$$\rho VA=\text{const} \tag{3-1-7}$$

将上式取对数再求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0 \tag{3-1-8}$$

二、运动方程（动量方程）

取微元体如图 3.3 所示。首先分析作用在微元体上的外力。假定 I 截面面积为 A，压强为 P，气流流动的方向与 l 方向一致，作用在 I 截面的总压为 PA；令 II 截面的面积为 $A+\mathrm{d}A$，压强为 $P+\mathrm{d}P$，由于 P 与 A 都是 l 与 t 的函数，因而 II 截面的总压力为 $-\left[PA+\frac{\partial(PA)}{\partial l}\delta l\right]$，此处取负号是由于作用在 II 截面上总压力的方向与 l 的正方向相反。壁面作用在微元体上的力除了压力之外还有摩擦应力 τ_w，令 τ_w 所作用的壁面环形面积为 $\mathrm{d}A_w$（常称为湿周面积），流道扩张角为 α（在一维近似下可以认为 $\alpha\approx 0$），因此壁面摩擦力在 l 方向的分量为

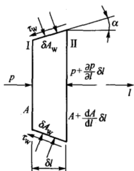


图 3.3　微小封闭体系的外力

$$-\tau_w(\delta A_w)\cos\alpha\approx-\tau_w\delta A_w \text{（对质量为 } \delta m \text{ 而言）}$$

由水力直径 D_e 的定义

$$D_e=4\times\frac{\text{流道截面积}}{\text{湿周}}$$

对于我们所讨论的问题，湿周$=\frac{\delta A_w}{\delta l}$，流道截面积为 A，于是 $D_e=(4A\delta l)/\delta A_w$。

利用上面结果，于是壁面摩擦力在 l 方向的分量可改写为（对于质量为 $\delta m=\rho A\delta l$ 的微小封闭体系而言）

$$-\tau_w(\delta A_w)\cos\alpha=-\frac{4\tau_w A\delta l}{D_e}$$

除此之外，沿 l 方向还有壁面 δA_w 作用在微元体上的力 $P(\delta A_w)\sin\alpha$，注意到 $(\delta A_w)\sin\alpha=\delta A$，故

$$P(\delta A_w)\sin\alpha=P\delta A=P\frac{\delta A}{\delta l}\mathrm{d}l$$

在这些外力的作用下，气体沿流向 l 产生了 $\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)_l$ 的加速度，这里

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)_l=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{V}{V}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

于是沿流向写牛顿第二定律便可得到沿流向的运动微分方程，即（对单位质量的气体而言）



$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial l}-\frac{4\tau_{\mathrm{W}}}{\rho D_{\mathrm{e}}} \tag{3-1-9}$$

注意到

$$\frac{\partial P}{\partial l}=\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)$$

则式（3－1－9）又可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)-V\left(\frac{4\tau_{\mathrm{W}}}{\rho D_{\mathrm{e}}}\right) \tag{3-1-10}$$

注意使用连续方程式（3－1－3），则上式可变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{\partial(PAV)}{\rho A\partial l}+P\frac{\mathrm{d}\rho^{-1}}{\mathrm{d}t}-V\frac{4\tau_{\mathrm{W}}}{\rho D_{\mathrm{e}}} \tag{3-1-11}$$

显然，式（3－1－9）与式（3－1－10）实质上是同一个方程，因为后者可由前者两边乘 V 后得到。

三、能量方程

由热力学第一定律

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=\dot{Q}-\dot{L} \tag{3-1-12}$$

式中，$\dot{Q}$ 和 $\dot{L}$ 分别代表每单位时间外界对于上述体系的传热率和该体系对外界的作功率，而 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 则是该体系的内能对时间的导数。

强调指出：在具体表达上式中的三项时，不同的观察者（例如观察者静止或者观察者随气体运动时）所推导出的气体作功率、内能变化率是不同的。但是无论观察者是静止还是随体系一同运动，$\dot{Q}$ 总是由于所取体系的温度和外界温度之间的差别而导致的传热率，而体系中内能的增加率和体系边界上力对外界的作功率却是随观察者位置的不同而不同。下面对此略作说明：

1. 观察者静止不动

在一般情况下，管道是静止的。对于一个静止的观察者来讲，他所看到的管壁施加于气体的摩擦力 $\tau_{\mathrm{W}}\delta A_{\mathrm{W}}$ 并没有对气体作功；而体系两头截面上的压力则推着外界气体移动，在一维流动下这个作功率是

$$\dot{L}=\frac{\partial(PAV)}{\partial l}\delta l \tag{3-1-13}$$

注意到，在一维沿流向的曲线 l 下有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial l} \tag{3-1-14}$$

利用连续方程式（3－1－3），则式（3－1－13）可写为

$$\frac{\dot{L}}{\delta m}=\frac{\mathrm{d}(P/\rho)}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{3-1-15}$$

式中，δm 代表所取微小封闭体系的质量。

对于静止的观察者来讲，气体内能的增加率是

$$\frac{1}{\delta m}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) \tag{3-1-16}$$

式中，e 是气体热力学狭义内能。

将式（3－1－15）与式（3－1－16）代入到式（3－1－12）并注意到总焓的定义，得

$$\frac{\mathrm{d}\left(e+\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \tag{3-1-17}$$

式中，H 为总焓，其定义式为

$$H=h+\frac{V^2}{2}=e+\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2} \tag{3-1-18}$$

式（3－1－17）是能量方程的一种表达形式。显然，如果流动是绝热与定常的，则滞止焓（又称总焓）H 在流动中保持不变。如果将式（3－1－11）代入式（3－1－13），再将它与式（3－1－16）一起代入到式（3－1－12）中，即得

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}-\left[P\frac{\mathrm{d}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{d}t}-\frac{4\tau_{\mathrm{w}}}{\rho D_{\mathrm{e}}}V\right] \tag{3-1-19}$$

这是能量方程的又一种形式。

2. 观察者随气体一起运动

取相对坐标 ξ 随气体以及观察者一起运动。在这个观点下，观察者除了看到气体作膨胀功之外，还看到外界摩擦力以 V 的速度推着壁面接触的气体向后移动，所以

$$\frac{\dot{L}_\xi}{\delta m}=P\frac{\mathrm{d}(1/\rho)}{\mathrm{d}t}-\left(\frac{4\tau_{\mathrm{w}}}{\rho D_{\mathrm{e}}}\right)V \tag{3-1-20}$$

这时内能的变化率却只是

$$\frac{1}{\delta m}\frac{\mathrm{d}E_\xi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \tag{3-1-21}$$

于是将式（3－1－20）与式（3－1－21）代入到式（3－1－12）便可得到式（3－1－19）。因此式（3－1－19）对于跟随气体一起运动的观察者来说其物理意义非常明确，即当一个观察者随着气体一起移动时，他能看到气体作膨胀功和管壁的摩擦力对气体作功，却看不到气体动能的变化。



四、热力学第二定律

热力学第二定律的基本形式是

$$T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\geqslant\frac{\dot{Q}}{\delta m} \tag{3-1-22}$$

注意到吉布斯（Gibbs）热力学恒等式

$$T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{d}t} \tag{3-1-23}$$

将式（3-1-23）代入到式（3-1-19）中便得

$$T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}+\left(\frac{4\tau_{\mathrm{w}}}{\rho D_{\mathrm{e}}}\right)V \tag{3-1-24}$$

3.1.2　在相对坐标系下气体的广义一维流动

设叶轮以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，叶片通道中心线 ξ 也随着旋转，如图 3.4 所示；假设观察者位于以另一个角速度 ω_0 绕 z 轴转动的参考系中。显然，当 $\omega_0=0$ 时的观察者为绝对观察者，$\omega_0=\omega$ 时的观察者为相对观察者，当观察者随同流体一起运动时则称为随动观察者。

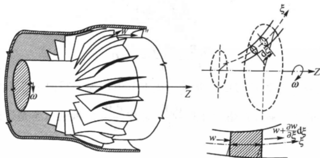


图 3.4　旋转的广义一维流道和微元封闭体系

一、连续方程

取以角速度 ω 转动的相对坐标 ξ，于是采用与绝对坐标系完全类似的推导方法可得到连续方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial(WA)}{A\partial\xi}=0 \tag{3-1-25}$$

或者

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial(\rho WA)}{\partial \xi}=0 \qquad (3-1-26)$$

二、运动方程（动量方程）

为了得到气体的绝对速度$\boldsymbol{V}$与相对速度$\boldsymbol{W}$以及绝对加速度与相对加速度之间的关系，今考虑绝对圆柱坐标系(r,θ,z)与相对圆柱坐标系(r,φ,z)存在如下关系[1]

$$\theta=\varphi+\omega t \qquad (3-1-27)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\omega \qquad (3-1-28)$$

$$V_r=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=W_r \qquad (3-1-29)$$

$$V_\theta=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=W_\varphi+\omega r \qquad (3-1-30)$$

$$V_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=W_z \qquad (3-1-31)$$

$$\frac{\mathrm{d_a}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d_R}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}-\omega^2\boldsymbol{r} \qquad (1-3-12)^{*}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \qquad (1-3-11)$$

以及

$$\frac{\mathrm{d_a}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d_R}f}{\mathrm{d}t} \qquad (1-3-2)$$

$$\frac{\mathrm{d_a}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d_R}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B} \qquad (1-3-3)$$

这里f与$\boldsymbol{B}$分别代表任意标量与任意矢量。在本节中，为书写简洁在不会产生误会的情况下采取了将$\frac{\mathrm{d_a}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$中的下注脚$a$省略，并将$\frac{\mathrm{d_R}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}$记作$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}$的做法，于是这时式（1－3－12）*才被简记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}-\omega^2\boldsymbol{r} \qquad (3-1-32)$$

于是绝对加速度在ξ切线方向的分量为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)_\xi=\frac{\boldsymbol{W}}{W}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{W}}{W}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}-\omega^2\boldsymbol{r}\right)=\frac{\mathrm{d}'W}{\mathrm{d}t}-(\omega^2 r)\frac{W_r}{W} \qquad (3-1-33)$$

使用式（3－1－33）便可得出沿ξ切线方向的牛顿第二定律是



$$\frac{\mathrm{d}'W}{\mathrm{d}t}-(\omega^2 r)\frac{\mathrm{d}'r}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \xi}-\frac{4\tau_W}{\rho D_e}=\frac{\mathrm{d}'W}{\mathrm{d}t}-(\omega^2 r)\frac{W_r}{W} \tag{3-1-34}$$

如果将上式两边乘W并使用连续方程便可得

$$-\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\left(\frac{W^2-\omega^2 r^2}{2}\right)-\left(\frac{4\tau_W}{\rho D_e}\right)W=\frac{W}{\rho}\frac{\partial' P}{\partial \xi}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}'P}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial' P}{\partial t}\right) \tag{3-1-35}$$

式中，$\partial'/\partial t$代表$\partial_R/\partial t$。

三、热力学第一定律（能量方程）

1. 观察者和坐标系ξ（也可以是叶片）一起以等ω的角速度转动

此时，观察者看到的气体的加速度只是$\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$，于是式（3-1-34）改写为

$$\frac{\mathrm{d}'W}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \xi}-\frac{4\tau_W}{\rho D_e}+(\omega^2 r)\frac{W_r}{W} \tag{3-1-36}$$

上式右边第三项为“惯性力”项。当这个观察者去写气体的作功率时，除了气体压力的作功率外还要加上“哥氏惯性力”的作功率，即

$$\frac{\dot{L}}{\delta m}=\frac{1}{\rho A}\frac{\partial(PAW)}{\partial \xi}-(\omega^2 r)W_r=\frac{\mathrm{d}'(\frac{P}{\rho})}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial' P}{\partial t}-\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}\right) \tag{3-1-37}$$

这时内能增加率为

$$\frac{1}{\delta m}\frac{\mathrm{d}'E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\left(e+\frac{W^2}{2}\right) \tag{3-1-38}$$

将上边两式代入到式（3-1-12）得[1]

$$\frac{\mathrm{d}'I}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}'\left(e+\frac{P}{\rho}+\frac{W^2-\omega^2 r^2}{2}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial' P}{\partial t} \tag{3-1-39}$$

式中，I为转子焓。

从上式可以看出：对于相对观察者而言，管壁是静止的，因此管壁摩擦力并不对气体作功[2]。

2. 对于随动观察者

这时观察者将看不到微元体的整体运动，只看到它的体积和形状的变化，于是气体所作的膨胀功率为$P\dfrac{\mathrm{d}'(1/\rho)}{\mathrm{d}t}$，壁面摩擦力对气体的作功率为$\left(\dfrac{4\tau_W}{\rho D_e}\right)W$；又由于观察者随微元体一起运动，所以它所看到的能量变化为$\mathrm{d}'e/\mathrm{d}t$；于是，将它们代到式（3-1-12）便得到

$$\frac{\mathrm{d}'e}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}-\left[P\frac{\mathrm{d}'1/\rho}{\mathrm{d}t}-\left(\frac{4\tau_{\mathrm{W}}}{\rho D_{\mathrm{e}}}\right)W\right] \tag{3-1-40}$$

四、热力学第二定律

借助于吉布斯（Gibbs）热力学关系式（3－1－23）以及式（1－3－2），则式（3－1－40）又可改写为[2]

$$T\frac{\mathrm{d}'s}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}+\left(\frac{4\tau_{\mathrm{W}}}{\rho D_{\mathrm{e}}}\right)W \tag{3-1-41}$$

或者

$$T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}+\left(\frac{4\tau_{\mathrm{W}}}{\rho D_{\mathrm{e}}}\right)W \tag{3-1-42}$$

§3.2　一维定常流动的基本关系

3.2.1　广义一维绝对与相对定常流动的主要方程

1. 广义一维绝对定常流动的基本方程

对于绝对运动是定常流动的一维流，这时连续方程式（3－1－3）、运动方程式（3－1－9）和能量方程式（3－1－17）可简化为

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial l}=0 \tag{3-1-6}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial l}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial l}-\frac{4\tau_{\mathrm{W}}}{\rho D_{\mathrm{e}}} \tag{3-2-1}$$

$$V\frac{\partial H}{\partial l}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}=\dot{q} \tag{3-2-2}$$

式中，H 为滞止焓（又称总焓）；$\dot{q}$ 代表外界对每单位质量气体的传热量；$\partial/\partial l$ 表示沿绝对流线求偏导数。

2. 广义一维相对定常流动的基本方程

所谓相对定常流动是指在相对坐标系中流动是定常的。在这个假定下，连续方程式（3－1－26）、运动方程式（3－1－34）与能量方程式（3－1－39）可简化为：

$$\frac{\partial(\rho WA)}{\partial\xi}=0 \tag{3-2-3}$$



$$W\frac{\partial W}{\partial \xi}-(\omega^2 r)\frac{W_r}{W}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \xi}-\frac{4\tau_W}{\rho D_e} \tag{3-2-4}$$

$$W\frac{\partial I}{\partial \xi}=\frac{\dot{Q}}{\delta m}=\dot{q} \tag{3-2-5}$$

式中，I 为转子焓；$\dot{q}$ 代表外界对单位质量气体的传热量；$\partial/\partial\xi$ 表示沿相对流线求偏导。

3.2.2　绝热流和等熵流的基本关系

一、能量方程及特征常数

下面以绝对运动为例，讨论一维定常绝热流动中的一些基本关系。在这种假定下，能量方程式（3-2-2）被进一步简化为

$$\frac{\partial H}{\partial l}=0 \tag{3-2-6}$$

或者

$$h_1+\frac{V_1^2}{2}=h_2+\frac{V_2^2}{2}=h+\frac{V^2}{2}=\text{const} \tag{3-2-7}$$

对于量热完全气体，上式又可写为下面几种形式

$$\left.\begin{aligned}&c_pT+\frac{V^2}{2}=\text{const}\\&\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\text{const}\\&\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\text{const}\\&\frac{\gamma}{\gamma-1}RT+\frac{V^2}{2}=\text{const}\end{aligned}\right\} \tag{3-2-8}$$

上式右端的常数可用某个参考状态的物理量来表示，并将这个物理量称作特征常数。常用的参考状态有三种：① 速度为零的滞止状态（参数的下标以“0”表示）；② 温度达到零度（开氏温度）时的最大速度 (V_{max}) 状态；③ 流速等于当地声速时的临界参数状态（参数的下标以“*”表示）。气体一维定常流动的任何一个状态都可以假想通过等熵过程转变为对应的参考状态，用这些特征常数来表示该状态下气流的能量，不管实际流动过程是否等熵。本书 § 1.8 节给出了静参数与这些特征常数间的关系。若用特征常数表达式（3-2-8）右端项时可写为：



$$h+\frac{V^2}{2}=h_0=c_pT_0=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2 \tag{3-2-9}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\frac{V_{\max}^2}{2}=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2 \tag{3-2-10a}$$

$$\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{a_*^2}{2}=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2 \tag{3-2-10b}$$

其中 h_0,T_0 和 p_0 分别称为总焓、总温和总压，以区别于静焓 h、静温 T 和静压 p；$V_{\max}$，a_0 与 a_* 分别代表最大速度、滞止声速与临界声速。另外，常引进两个量纲为 1 的数 M 与 λ 去衡量气流速度的特征，它们之间的关系是

$$\left.\begin{aligned} M^2&=\frac{\lambda^2}{1-\frac{\gamma-1}{2}(\lambda^2-1)}\\ \lambda^2&=\frac{M^2}{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)}\end{aligned}\right\} \tag{3-2-11}$$

二、等熵流的基本关系及气体动力学函数

对于热完全气体，熵增可表为

$$\mathrm{d}s=c_v\frac{\mathrm{d}T}{T}+R\frac{\mathrm{d}v}{v}=c_p\frac{\mathrm{d}T}{T}-R\frac{\mathrm{d}P}{P} \tag{3-2-12}$$

因此，对于量热完全气体，积分上式并注意使用克拉珀龙（Clapeyron）方程，则最后变为

$$\begin{aligned} s&=c_v\ln Tv^{(\gamma-1)}+\text{const}\\ &=c_p\ln\frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}}+\text{const}\\ &=c_v\ln\frac{p}{\rho^\gamma}+\text{const}\\ &=R\ln\frac{T^{\gamma/(\gamma-1)}}{p}+\text{const}\end{aligned} \tag{3-2-13}$$

所以对于量热完全气体的等熵过程则有

$$\left.\begin{aligned} Tv^{\gamma-1}&=\text{const}\\ T/p^{(\gamma-1)/\gamma}&=\text{const}\\ p/\rho^\gamma&=\text{const}\\ T^{\gamma/(\gamma-1)}/p&=\text{const}\end{aligned}\right\} \tag{3-2-14}$$

由此便可得到如下等熵关系，即



$$\frac{P}{P_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3-2-15}$$

由式（3－2－8）并注意到热完全气体的状态方程则可得到静温与总温间的关系，即

$$\frac{T}{T_0}=\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}=1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2 \tag{3-2-16}$$

因此便可采用本书 § 1.8 节所介绍的方法，引进 $\tau(\lambda),\pi(\lambda),\varepsilon(\lambda),q(\lambda),f(\lambda)$ 等气体动力学函数即

$$\begin{cases}\tau(\lambda)=\dfrac{T}{T_0},\pi(\lambda)=\dfrac{P}{P_0},\varepsilon(\lambda)=\dfrac{\rho}{\rho_0}\\ q(\lambda)=\pi(\lambda)y(\lambda)=\dfrac{\rho V}{\rho_* a_*}=\lambda\left(\dfrac{\gamma+1}{2}-\dfrac{\gamma-1}{2}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)}\\ f(\lambda)=q(\lambda)\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)\left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{cases} \tag{3-2-17}$$

这里 $q(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 分别称为密流函数与冲量函数。将这些气动函数列成数值表会给工程计算提供许多方便。有关的气动函数表可参见本书附录中的表 4（a）与表 4（b）。

§ 3.3　几个制约因素在一维定常流基本方程中的数学表达及其影响系数

本节主要讨论流道截面面积变化、管道存在摩擦、管路中有加热源并且流动时具有添质流的复杂一维流动，推导出这种流动的数学表达式。为此，首先分析每个制约因素单独在基本方程中出现时产生的影响，然后分析四种制约因素同时作用时对一维定常流基本方程产生的作用，并给出相应的影响系数。

3.3.1　面积变化在基本方程中的数学表达

截面面积的变化，主要体现在连续方程上，这里以变截面管流为例。由一维定常流的连续方程

$$\dot{m}=\rho VA=\text{const} \tag{3-3-1}$$

其微分形式为 $d\dot{m}=0$，即

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dV}{V}+\frac{dA}{A}=0 \tag{3-3-2}$$

3.3.2 管道摩擦在基本方程中的数学表达

管道摩擦主要体现在动量方程上，这里以图 3.5（a）所示的摩擦管为例。取该图所示的开口控制体，显然长度为 dx 的一段管壁对气流的摩擦力 δR_{f} 的大小为

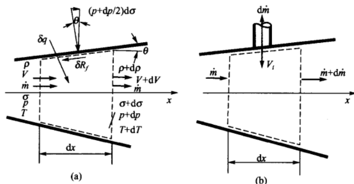


图 3.5 一维管流中的开口体系

$$\delta R_{\mathrm{f}}=\tau_{\mathrm{w}}C_{\mathrm{w}}\mathrm{d}x/\cos\theta$$

式中，C_{W} 为截面的周长，又称湿周。对于非圆截面来讲它与截面面积 A、水力学直径 D_{e} 间的关系为

$$D_{\mathrm{e}}=\frac{4A}{C_{\mathrm{W}}} \tag{3-3-3}$$

δR_{f} 在 x 轴上的投影为

$$\delta R_{\mathrm{fx}}=\delta R_{\mathrm{f}}\cos(\pi-\theta)=-\tau_{\mathrm{W}}C_{\mathrm{W}}\,\mathrm{d}x \tag{3-3-4}$$

其中 τ_{W} 是壁面剪切应力，它可以表示为

$$\tau_{\mathrm{W}}=\frac{1}{2}\rho V^{2}f \tag{3-3-5}$$

式中，f 称为摩阻系数（它是量纲为 1 的量）。利用式（3-3-3）和式（3-3-5），δR_{fx} 可表示为



$$\delta R_{fx}=-\frac{1}{2}\rho V^2\frac{4f}{D_e}\sigma\,dx \tag{3-3-6}$$

对图 3.5（a）所示的开口系统列动量方程，有

$$\begin{aligned}&\dot m(V+dV)(A+dA)-\dot m VA\\&=-(p+dp)(A+dA)+pA+\left(p+\frac{dp}{2}\right)dA+\delta R_{fx}\end{aligned}$$

略去高阶项，简化得

$$VdV=-\frac{dp}{\rho}-\frac{2fV^2}{D_e}dx \tag{3-3-7}$$

显然式（3－3－7）是式（3－2－1）的特例。

3.3.3　管路中有加热源时在基本方程中的数学表达

管路中有加热源主要体现在能量方程的表达上，下面以一维加热管流为例。设 δq 和 $\dot q$ 分别表示对开口系统内的单位质量气体的加热量和加热率，如图 3.5（a）所示，设 $\dot Q$ 为对开口系统内气体的总加热率，有

$$\delta q=\dot q dx/V=\dot q dt \tag{3-3-8}$$

$$\dot Q=\rho\dot q Adx=\rho VA\delta q \tag{3-3-9}$$

对图 3.5（a）所示的开口系统写出能量方程，有

$$\begin{aligned}&(\rho+d\rho)\left[\left(e+\frac{V^2}{2}\right)+d\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right](V+dV)(A+dA)-\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)VA\\&=-(p+dp)(V+dV)(A+dA)+pV\sigma+\dot Q\end{aligned}$$

略去高阶小量，代入式（3－3－9），上式简化为

$$d\left(e+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=\delta q$$

由焓的定义 $h=e+\dfrac{p}{\rho}$，于是一维定常加热流的能量方程为

$$d\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\delta q \tag{3-3-10}$$

显然它与式（3－2－2）是等价的。如果积分上式又可得到

$$h_2+\frac{V_2^2}{2}=h_1+\frac{V_1^2}{2}+\Delta q \tag{3-3-11}$$

3.3.4 具有添质流动时基本方程的数学表达

添质作用对连续方程、动量方程和能量方程都有影响，这里以简单添质流为例。假设添质流 $\mathrm{d}\dot{m}$ 垂直于主流方向 x，并且添质流和主流属同一气体，它们的热力学变量也彼此相等，例如 $p=p_i,\rho=\rho_i,T=T_i,c_p=c_{pi}$，此处下标“$i$”表示添质流的变量。由于添质作用，连续方程、动量方程和能量方程都要重新推导。

1. 连续方程

$$\dot{m}(x)=\rho VA\neq \mathrm{const} \tag{3-3-12}$$

其微分形式为

$$\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}A}{A} \tag{3-3-13}$$

2. 动量方程

对图 3.5（b）所示的开口系统列出动量方程

$$(\dot{m}+\mathrm{d}\dot{m})(V+\mathrm{d}V)-\dot{m}V=-(p+\mathrm{d}p)(A+\mathrm{d}A)+pA+\left(p+\frac{\mathrm{d}p}{2}\right)\mathrm{d}A$$

由此简化得

$$V\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}p}{\rho}-V^2\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-3-14}$$

3. 能量方程

对图 3.5（b）所示的开口系统列出能量方程

$$(\dot{m}+\mathrm{d}\dot{m})\left[\left(h+\frac{V^2}{2}\right)+\mathrm{d}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)\right]-\dot{m}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\left(h_i+\frac{V_i^2}{2}\right)\mathrm{d}\dot{m}$$

将上式简化可得

$$\mathrm{d}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=-(h_0-h_{0i})\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-3-15}$$

式中

$$h_0=h+\frac{V^2}{2},\quad h_{0i}=h_i+\frac{V_i^2}{2}$$

这里 h_0 与 h_{0i} 分别表示主流和添质流的总焓。显然如果主流和添质流具有相等的总焓值，则添质作用对能量方程没有影响。

3.3.5 几个因素同时作用时的基本方程（一维定常流）

上面推导了单个制约因素在有关基本方程中的数学表达。显然，将它们迭加在一起便可以得到这几个因素同时存在时的一维定常流动基本方程组。下面具体给出这时方程的



形式

1. 连续方程

由式（3-3-12）和式（3-3-13）给出

$$\dot{m}(x)=\rho VA \tag{3-3-16}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}A}{A} \tag{3-3-17}$$

2. 运动方程

由式（3-3-7）和式（3-3-14）可以得到

$$\mathrm{d}p+\rho V^2\frac{\mathrm{d}V}{V}+\rho V^2\frac{2f}{D_e}\mathrm{d}x+\rho V^2\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}=0 \tag{3-3-18}$$

对于完全气体，注意到声速及马赫数定义，则上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}+\gamma M^2\left[\frac{\mathrm{d}V}{V}+2f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}+\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}\right]=0 \tag{3-3-19}$$

3. 能量方程

由式（3-3-10）和式（3-3-15）给出

$$\mathrm{d}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\delta q-(h_0-h_{0i})\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-3-20}$$

或写成

$$\mathrm{d}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\mathrm{d}h_0 \tag{3-3-20a}$$

其中

$$\mathrm{d}h_0\equiv\delta q-(h_0-h_{0i})\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-3-21}$$

对于量热完全气体，能量方程可写成包含 M 数的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}+(\gamma-1)M^2\frac{\mathrm{d}V}{V}-\frac{\mathrm{d}T_0}{T}=0 \tag{3-3-22}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}T_0}{T}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{\mathrm{d}T_0}{T_0}$$

于是能量方程变为

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}+(\gamma-1)M^2\frac{\mathrm{d}V}{V}-\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{\mathrm{d}T_0}{T_0}=0 \tag{3-3-23}$$

4. 状态方程

对于热完全气体，有

$$\frac{dp}{p}-\frac{d\rho}{\rho}-\frac{dT}{T}=0 \tag{3-3-24}$$

因此式（3－3－24）、式（3－3－17）、式（3－3－19）与式（3－3－23）给出了四个因素同时作用下一维定常热完全气体流动的基本方程组，这个方程组含有四个物理量V,P,ρ,T，而且它有四个独立方程组成，因此只要给定各种制约因素的有关量（即$\frac{dA}{A},\frac{4f}{D_e},\delta q,(T_0-T_{0i})$以及$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$），并且给定边界条件，则方程组定解。

3.3.6 流动特性参数的微分关系及影响系数

由马赫数定义 $M^2=V^2/a^2=V^2/(\gamma RT)$

将其取对数后再微分得到

$$\frac{dV}{V}=\frac{dM}{M}+\frac{1}{2}\frac{dT}{T} \tag{3-3-25}$$

将上式代入到式（3－3－19）和式（3－3－23）中得

$$\frac{dp}{p}+\frac{\gamma M^2}{2}\frac{dT}{T}+\gamma M^2\frac{dM}{M}+\gamma M^2\frac{2f}{D_e}dx+\gamma M^2\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}=0 \tag{3-3-26}$$

$$\frac{dT}{T}=\frac{dT_0}{T_0}-\frac{(\gamma-1)M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M} \tag{3-3-27}$$

由式（3－2－15）得

$$\frac{dp_0}{p_0}=\frac{dp}{p}+\frac{\gamma M^2}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\frac{dM}{M} \tag{3-3-28}$$

在喷气推进问题中，常会用到冲量函数，对于任意截面，它的定义为

$$F=pA+\dot{m}V=pA\left[1+\frac{\rho V^2}{p}\right]=pA(1+\gamma M^2) \tag{3-3-29}$$

将式（3－3－29）取对数后再微分，得

$$\frac{dF}{F}=\frac{dp}{p}+\frac{dA}{A}+\frac{2\gamma M^2}{1+\gamma M^2}\frac{dM}{M} \tag{3-3-30}$$

由式（3－2－13）可以得到熵增的方程为



$$\frac{\mathrm{d}s}{c_p}=\mathrm{d}\left[\ln\left(\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right)\right]=\frac{\mathrm{d}T}{T}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{3-3-31}$$

至此得到了 8 个独立的微分方程式即式（3-3-24）～式（3-3-28）、式（3-3-30）、式（3-3-31）以及式（3-3-17），其中包含 8 个流动特性参数的微分变量，它们是 $\frac{\mathrm{d}P}{P},\frac{\mathrm{d}V}{V},\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho},\frac{\mathrm{d}T}{T},\ \frac{\mathrm{d}M}{M},\frac{\mathrm{d}P_0}{P_0},\frac{\mathrm{d}F}{F},\frac{\mathrm{d}s}{c_p}$，另外，还包含 $\frac{\mathrm{d}A}{A},4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e},\frac{\mathrm{d}T_0}{T_0},\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}$ 这 4 个制约因素的微分变量。为了便于书写，令

$$[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4]=\left[\frac{\mathrm{d}A}{A},4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e},\frac{\mathrm{d}T_0}{T_0},\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}\right] \tag{3-3-32}$$

$$[\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6,\zeta_7,\zeta_8]=\left[\frac{\mathrm{d}P}{P},\frac{\mathrm{d}V}{V},\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho},\frac{\mathrm{d}T}{T},\frac{\mathrm{d}M}{M},\frac{\mathrm{d}P_0}{P_0},\frac{\mathrm{d}F}{F},\frac{\mathrm{d}s}{c_p}\right] \tag{3-3-33}$$

可以把 $\xi_j(j=1\sim4)$ 取为自变量，而把 $\zeta_i(i=1\sim8)$ 取作因变量，于是这时上面 8 个独立的微分方程成了线性方程，因而可采用解线性代数方程组的办法（例如克莱姆法则）解出 ζ_i，得到

$$\zeta_i=\sum_{j=1}^{4}(a_{ij}\xi_j)\ (i=1\sim8) \tag{3-3-34}$$

式中，a_{ij} 叫影响系数。作为例子这里仅给出 a_{1j} 与 a_{2j}（$j=1\sim4$）的具体表达式；其他具体表达式作为课后作业，请读者自行补上。这里 a_{1j} 与 a_{2j} 的表达式为

$$\begin{cases}a_{11}=\dfrac{\gamma M^2}{1-M^2},\quad a_{12}=-\dfrac{\gamma M^2[1+(\gamma-1)M^2]}{2(1-M^2)}\\ a_{13}=-\dfrac{\gamma M^2\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1-M^2},\quad a_{14}=-\dfrac{2\gamma M^2\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1-M^2}\end{cases} \tag{3-3-35}$$

$$\begin{cases}a_{21}=-\dfrac{1}{1-M^2},\quad a_{22}=\dfrac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}\\ a_{23}=\dfrac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2}{1-M^2},\quad a_{24}=\dfrac{1+\gamma M^2}{1-M^2}\end{cases} \tag{3-3-36}$$

§3.4 变截面一维定常无粘、绝能流

3.4.1 流动参数随截面积变化的规律

本节主要讨论一维、定常、可压、无粘、绝能、定比热的完全气体在管道截面积沿轴线变化时管内的流动。喷气发动机的进气道，尾喷管以及试验风洞中的流动都可近似地看作这样的流动。它的数学提法是：给定管道截面面积的变化规律 $A(x)$，给定某个初始截面的气流参数 V_1,p_1,ρ_1,T_1 等，求任一个截面上的气流参数 V_2,P_2,ρ_2,T_2 等。该问题的基本方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dV}{V}+\frac{dA}{A}=0\\&\frac{dp}{p}+\gamma M^2\frac{dV}{V}=0\\&\frac{dT}{T}+(\gamma-1)M^2\frac{dV}{V}=0\\&\frac{dp}{p}-\frac{d\rho}{\rho}-\frac{dT}{T}=0\end{aligned}\right\}\tag{3-4-1}$$

在现在的条件下，便可借助于式（3-3-34）得到各流动参数与截面面积变化的微分关系，即

$$\frac{dp}{p}=\frac{\gamma M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A}\tag{3-4-2}$$

$$\frac{dV}{V}=\frac{-1}{1-M^2}\frac{dA}{A}\tag{3-4-3}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A}\tag{3-4-4}$$

$$\frac{dT}{T}=\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A}\tag{3-4-5}$$

$$\frac{dM}{M}=-\frac{2+(\gamma-1)M^2}{2(1-M^2)}\frac{dA}{A}\tag{3-4-6}$$

从上面的微分关系就可以得出流动参数随截面面积变化的规律：

（1）对于亚声速流动 $(M<1)$，如果增大截面积，则必然引起速度的减小，压强的增大，密度的增加，温度的增高。

（2）对于超声速流动 $(M>1)$，如果增大截面积，则必然引起速度的增大，压强的减小，



密度的减小，温度的降低。

（3）当 $M=1$ 时，如果该处速度有变化（例如见式（3-4-3））$dV \neq 0$，则 $dA=0$，该截面为临界截面。可以推断，临界截面一定是管道的最小截面。应当指出，不应将临界截面和最小截面相混淆。最小截面是对管道的几何形状而言的，在最小截面处气流是否达到当地声速取决于管道进出口处的压强比值。

（4）通常，使气流加速的管道叫喷管，使气流减速的管道叫做扩压器。在管道的最大或最小截面处 ($dA=0$)，如果不出现声速 ($M \neq 1$)，则 $dV=0$，即在该处的速度将是极值。要想产生超声速气流，管道的截面形状在亚声速段应是收缩的，在超声速段应是扩张的，而以声速处截面积为最小。当然要产生超声速气流，上下游还必须有足够的压力差，但管道先收缩后扩张这一点是必要的几何条件。这种收缩-扩张形喷管是 1889 年瑞典工程师拉伐尔（de Laval）发明的，故称之为拉伐尔喷管。

3.4.2　喷管的流速与流量的计算

为方便以后的讨论，这里规定几个记号。

（1）背压 P_b，它是指喷管出口截面以外（不包括出口截面）周围环境的压力，有时亦称环境压力。若周围是大气环境，则背压就等于大气压力 $P_b=P_a$；若喷管出口之后接一个体积很大的容器或者接真空的气罐，则背压 P_b 就等于此容器压力或者真空罐的压力。

（2）P_E 或 P_e，它表示出口截面压力即喷管出口截面上（不包括出口截面以外）的压力。另外，凡带有下标 E 或 e 的参数都叫出口截面参数，例如 M_E, V_e, ρ_e 等。值得注意的是，一般说出口截面参数并不一定等于环境参数。

通常，使用喷管不外乎两个目的：一个是获得一定的速度，例如风洞试验段要有一个确定的均匀流场；另一个目的是需要得到一定的质量流量，例如喷气发动机要达到预定的推力，需要有进气道。设喷管上游的贮气罐参数为 p_0, ρ_0, T_0，喷管出口处的压力为 p_e，出口截面积为 A_e，由能量方程式（3-2-9）和等熵关系式（3-2-15），可推出喷管等熵流的出口速度 V_e 和马赫数 M_e 分别为

$$V_e=\sqrt{2\frac{\gamma R}{\gamma-1}T_0\left[1-\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \tag{3-4-7}$$

$$M_e=\frac{V_e}{a_e}=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]} \tag{3-4-8}$$

等熵流的质量流量为

$$\dot{m}=\rho_e V_e A_e = A_e\rho_0\left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left\{\frac{2a_0^2}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}^{1/2}$$
$$=A_e\rho_0 a_0\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\left[\left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]^{1/2} \tag{3-4-9}$$

引进临界参数并注意使用式（1-8-33）、式（1-8-20）与式（1-8-21）后，则对于任意一个截面来说都可写为

$$\dot{m}=\rho VA=\frac{\rho V}{\rho_* V_*}(\rho_* V_*)A=q(M)(\rho_* a_*)A=K\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}Aq(M)=K\frac{PA}{\sqrt{T_0}}y(\lambda) \tag{3-4-10}$$

式中

$$K\equiv\left(\frac{\gamma}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{3-4-11}$$

这里 $y(\lambda)$ 为气动函数，其定义见式（3-2-17）。显然，在一定的总温、总压条件下，喷管流量的增加是有限度的，一旦在喷管内出现了临界截面 A_*，那么这时流量便达到了最大值，其表达式为

$$\dot{m}_{\max}=\rho_* V_* A_* = K\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}A_* \tag{3-4-12}$$

也就是说，管道的喉部（通常把最小截面叫喉部）一旦成为临界截面时，其最大的质量流量就由管道中给定的 P_0, T_0 以及喉部面积大小所限定，这时无论怎么降低背压（或提高压比）都无法增大流量。也就是说，在一定条件下变截面管道中通过的流量有一定的限制，再多就被“堵”住了，这时就发生了所谓的壅塞现象。

3.4.3 收缩喷管及三种流动状态

一、三种流动状态

收缩喷管是指截面积逐渐缩小的管道，在喷气发动机中是常用的重要部件之一，其功能是使亚声速气流不断加速。为了了解喷管出口外界背压对收缩喷管中气体流动的影响，可进行如下的试验，其试验装置如图 3.6 所示。喷管进口的气流来自大气，喷管出口通过稳压箱与真空箱相连，真空箱内的空气由真空泵抽走而造成低压，稳压箱内的气体压强由阀门控制，也就是说，喷管出口外界气体的压强 P_b 在试验中可以改变，而喷管中的总压和总温在试验中不变，显然，它们的值就是大气的压强和大气的温度。

喷管内气流的流动分三种状态：



1. 亚临界流动状态

当阀门（如图 3.6 所示）逐渐开大时，稳压箱内气体的 P_b 逐渐降低，喷管出口气流速度不断增大，通过的流量也相应增大，这时整个喷管内的流动是亚声速的，因此背压 P_b 的变化所引起的扰动可以传遍整个喷管，也就是说 P_b 的变化可以影响整个喷管内的流动。由于 $M_e<1$，因此 $P_b/P_0>(P_*/P_0)_e=\beta_{cr}$，这里 β_{cr} 叫临界压强比

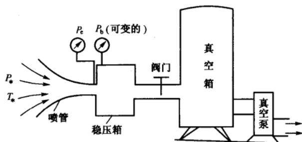


图 3.6　进行喷管三种状态试验的装置

$$\beta_{cr}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3-4-13}$$

对于空气 $\gamma=1.4$，则 $\beta_{cr}=0.528$，因此我们称 $P_b/P_0>\beta_{cr}$ 的流动状态为亚临界流动状态，在这种流动状态下，出口处气流压强 P_e 等于外界压强 P_b，这时气体在喷管中得到了完全膨胀。

2. 临界流动状态

当背压 P_b 降到 $P_b/P_0=\beta_{cr}$ 时，这时喷口 $M_e=1.0$，出口气流的压强 P_e 等于背压 P_b，气体在喷管中仍然得到完全膨胀，这种流动状态叫临界流动状态。

3. 超临界流动状态

当 $P_b/P_0<\beta_{cr}$ 时，由于这时出口截面处已是声速流，所以背压引起的扰动不能越过声速面，扰动不能影响喷管内的流动，出口截面上气流压强 P_e 不随背压降低而降低，而是维持着 $P_e=\beta_{cr}P_0$ 这个值，出口截面上气流仍是声速流即 $M_e=1$，相对流量 $\dot{m}/\dot{m}_{max}$ 仍保持着等于 1，这种流动称超临界流动。此时喷管出口处的气流压强 $P_e>P_b$，也就是说气流压强没有完全膨胀到外界背压 P_b 的值，所以这种流动状态又称为未完全膨胀状态，气流在出口截面之后将继续膨胀。

二、壅塞状态及提高 V_e 的措施

在一定的气流总温 T_0 与总压 P_0 下，对于给定出口截面面积 A_e 的收缩喷管当气体处于亚临界流动时，则随着外界背压 P_b 的降低，出口截面上气流速度 V_e 不断增大，喷管的流量也不断增加；但是当气体处于临界和超临界状态时，这时出口截面上 $M_e=1$，出口截面变成临界截面，通过喷管的流量达到最大值，这时背压 P_b 再进一步的降低并不能使气流的马赫数继续增大，即这时呈现了壅塞状态。在壅塞状态下，如果仅采取增大进口的总压 P_0，这时由于出口截面的 M_e 仍然等于 1，出口截面的压强 P_e 等于 $\beta_{cr}P_0$，这时 P_e 虽随 P_0 增大，但

P_e/P_0的比值仍然不变（这里β_{cr}值由式（3-4-13）定出），因此由式（3-4-7）知这时出口速度V_e并不增大。然而，当仅增加进口总温T_0值，而M_e，P_e/P_0和P_0值保持不变时，由式（3-4-7）可知这时V_e值也会变大。因此在航空喷气发动机中常采用在加力燃烧室中对燃气再一次喷油燃烧的方法去提高燃气的总温，以便达到增加喷气速度的目的。

例 1 某涡轮喷气发动机在地面试验时，测得发动机尾喷管（收缩喷管）进口处燃气总压$P_0=2.3\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$，总温$T_0=928.5\ \mathrm{K}$，燃气的比热比$\gamma=1.33$，喷管出口面积$A_e=0.167\ 5$米^2，试验时的大气压强$P_a=0.987\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$，试求喷管出口截面上的气流速度$V_e$和压强$P_e$以及通过喷管的燃气流量$\dot{m}$。

解 首先判断喷管中气体的流动状态：$\dfrac{P_b}{P_0}=\dfrac{0.987\times10^5}{2.3\times10^5}=0.429$；对于$\gamma=1.33$，由（3-4-13）式算出$\beta_{cr}=0.5404$，因此$\dfrac{P_b}{P_0}<\beta_{cr}$，流动处于超临界工作状态。根据超临界工作的特点，这时出口截面上

$$M_e=1,\quad P_e=\beta_{cr}P_0=0.540\ 4\times2.3\times10^5=1.242\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

$$V_e=a_*=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}\gamma RT_0}=\sqrt{\frac{2}{1.33+1}\times1.33\times287.4\times928.5}=552\ \mathrm{m/s}$$

$$\dot{m}=K\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}A_e=0.039\ 7\times\frac{2.3\times10^5}{\sqrt{928.5}}\times0.167\ 5=50.3\ \mathrm{kg/s}$$

例 2 在喷管试验设备中，真空箱内的气体压强为$8.0\times10^3\ \mathrm{Pa}$，真空泵所抽走的流量$\dot{m}=0.18\ \mathrm{kg/s}$，假设试验时大气的压强$P_a=1.013\times10^5\ \mathrm{Pa}$，大气温度$T_a=293\ \mathrm{K}$，试问：

（a）在收缩喷管中能否形成超临界流动状态？

（b）为了保证喷管能通过最大流量，收缩喷管的出口截面直径应为多少？

解 （a）真空箱内的气体压强作为喷管的出口背压P_b，喷管中的气流总压就是大气压强P_a，因此压强比为$P_b/P_0=0.0789<\beta_{cr}$，所以试验时在喷管中形成超临界流动状态。

（b）试验时的P_0和T_0就是大气的压强和温度，通过喷管的最大流量为$\dot{m}_{max}=K\dfrac{P_0}{\sqrt{T_0}}A_e$，这个值也是真空泵所能抽走的最大流量，因此

$$A_e=\frac{\dot{m}_{max}\sqrt{T_0}}{KP_0}=\frac{0.18\times\sqrt{293}}{0.040\ 4\times1.013\times10^5}=7.53\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}$$

所以，出口截面直径$d_e=\sqrt{\dfrac{4A_e}{\pi}}=3.1\ \mathrm{cm}$。



3.4.4 拉伐尔（Laval）喷管的几种流动状态

一、几种状态的介绍及喷管正问题计算

采用 Laval 喷管的主要目的是在其出口处获得所需要的气流参数（例如 M 数）。喷管出口处的气流参数不仅依赖于喷管截面积的变化，而且更取决于喷管上下游的压力比。这里所谓喷管正问题是：给定 Laval 喷管的几何形状以及上游的总压 P_0，讨论当改变其下游的背压 P_B 时，喷管工作情况的变化规律。围绕这个问题，讨论如下三种状态。

1. 状态Ⅲ——喉部马赫数刚好为 1，其余截面全部为亚速度等熵流动

在等熵流动中，由连续方程及等熵关系对于任意两个截面例如 1 截面与 2 截面有

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{M_1}{M_2}\frac{a_1}{a_2}=\frac{M_1}{M_2}\left(\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{3-4-14}$$

将上式用于任一截面与临界截面上，有

$$\frac{A}{A_*}=\frac{\rho_* V_*}{\rho V}=\frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{3-4-15}$$

如果将上式作成曲线，如图 3.7 所示，显然对于任意一个给定的 A/A_*，则有两个对应的马赫数 M：一个是亚声速的，另一个是超声速的。

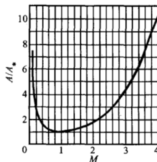


图 3.7 等熵流动时喷管的 $\dfrac{A}{A_*}$ 与 M 间的关系

在该状态下，由于喷管出口截面为亚声速，因此必有 $P_e=P_b$；令此时喷管出口处亚声速马赫数为 $M_{e_{Ⅲ}}$，于是将式（3-4-15）用于出口与喷管喉部临界截面上便有

$$\frac{A_e}{A_*}=\frac{1}{M_{e_{Ⅲ}}}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{e_{Ⅲ}}^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{3-4-16}$$

由 $M_{eⅢ}$ 及等熵关系可求得 $(P_b/P_0)_{Ⅲ}$ 值即

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{Ⅲ}=\left(\frac{P_e}{P_0}\right)_{Ⅲ}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{e_{Ⅲ}}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3-4-17}$$

也就是说，对于给定的喷管截面面积比 A_e/A_*，如果 P_b/P_0 等于 $\left(\dfrac{P_b}{P_0}\right)_{\text{III}}$，则这时喷管内的流动状态称为状态III。

2. 状态II——正激波刚好位于出口截面

此时出口截面压力 P_e 为激波前压力，而激波后压力为外界压力 P_b，因此 $P_e \neq P_b$；对于任一给定的 A_e/A_* 值，借助于式（3-4-15）并取其超声速的解便得到了出口截面激波前的马赫数，并记为 $M_{e\text{II}}$，然后由 $M_{e\text{II}}$ 的值及等熵关系去算出 $(P_e/P_0)_{\text{II}}$ 值，即

$$\left(\frac{P_e}{P_0}\right)_{\text{II}} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{e\text{II}}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3-4-18}$$

而激波前压力 $P_{e\text{II}}$ 与波后压力 P_b 间的正激波关系为

$$\frac{P_b}{P_{e\text{II}}} = \left(\frac{P_b}{P_e}\right)_{\text{II}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_{e\text{II}}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{3-4-19}$$

故

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{II}} = \left(\frac{P_b}{P_e}\right)_{\text{II}}\left(\frac{P_e}{P_0}\right)_{\text{II}} \tag{3-4-20}$$

也就是说，对于给定的喷管截面面积 A_e/A_*，如果 P_b/P_0 刚好等于 $(P_b/P_0)_{\text{II}}$ 值，则正激波刚好位于喷管出口截面，这时的流动状态称为状态II。

3. 状态I——出口截面既无激波，又无膨胀波

此状态 $P_e = P_b$，这就是通常说的设计工况，这时出口马赫数 $M_{e\text{I}}$ 应为超声速的，它可由式（3-4-15）得到。显然这时 $M_{e\text{I}}$ 应等于 $M_{e\text{II}}$；同样的可借助于 $M_{e\text{I}}$ 值及等熵关系得到 $(P_b/P_0)_{\text{I}}$ 为

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{I}} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{e\text{I}}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3-4-21}$$

也就是说，对于给定的喷管截面面积 A_e/A_*，如果 P_b/P_0 刚好等于 $(P_b/P_0)_{\text{I}}$ 时，则喷管出口截面既无激波，也无膨胀波，管内整个流动以及出口截面之外全都是等熵流动，这时喷管所处的流动状态称为状态I。

至此，介绍了 Laval 喷管的三种典型状态，对于任一给定的 A_e/A_* 值，借助于式（3-4-17）、式（3-4-20）与式（3-4-21）可以计算出三个特征压比，即 $(P_b/P_0)_{\text{III}}$，$(P_b/P_0)_{\text{II}}$ 与 $(P_b/P_0)_{\text{I}}$ 值，显然



$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{III} > \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{II} > \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{I} \qquad (3-4-22)$$

对于给定的 P_b/P_0 值，以下分七种情况讨论：

（1）如果 $P_b/P_0 = (P_b/P_0)_{III}$，则这时喉部截面马赫数刚好为 1，其余截面全为亚声速流动，因此喷管的流动处于状态Ⅲ。

（2）如果 $\frac{P_b}{P_0} > \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{III}$ 时，则整个喷管内为亚声速流动，而且喉部截面也未达到声速。

（3）如果 $\frac{P_b}{P_0} < \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{III}$ 并且 $\frac{P_b}{P_0} > \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{II}$ 时，则喉部达到声速，并且在喉部与出口截面之间产生正激波，这时 $M_e < 1$ 所以 $P_e = P_b$。

（4）如果 P_b/P_0 刚好等于 $\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{II}$ 时，则正激波位于喷管出口截面，这时 $P_e < P_b$，流动处于状态Ⅱ。

（5）如果 $\frac{P_b}{P_0} < \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{II}$ 并且 $\frac{P_b}{P_0} > \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{I}$ 时，则正激波蜕化为出口斜激波，如图 3.8 所示，此时 $P_e < P_b$。

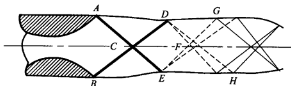


图 3.8　管外出现斜激波

（6）如果 $\frac{P_b}{P_0}$ 刚好等于 $\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{I}$ 时，则喷管喉部以下直到出口以外全部为等熵连续的超声速流动，这时 $P_e = P_b$，流动处于状态Ⅰ。

（7）如果 $\frac{P_b}{P_0} < \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{I}$ 时，则喷管出口产生膨胀波，如图 3.9 所示，气流穿过膨胀波进一步加速，这时 $P_e > P_b$。

作为课后作业，请读者试用 FORTRAN 语言或 C 语言编制 Laval 喷管一维定常流动正问题求解的计算机程序。

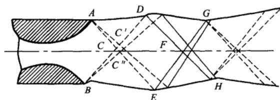


图 3.9　管外出现膨胀波

二、Laval 喷管反问题的求解

这里所谓反问题是指给定出口截面马赫数 M_e，去确定 A_e/A_* 以及 P_b/P_0 的值。因篇幅所限，这里不作深入讨论，请读者课后思考。

例 3　设空气流过一拉伐尔喷管，喉部截面积 $A_t=0.1\ \text{m}^2$，出口截面积 $A_e=0.117\ \text{m}^2$，背压 $P_b=1$ 大气压。如喷管前的总温 $T_0=300$ K，总压 P_0 分别为 1.25 大气压和 1.15 大气压（绝对），比热比 $\gamma=1.4$。试求两种情况下出口气流的速度 V_e、M_e 和流量 $\dot{m}$，并比较喉部的静压 P_t 值。

解　先判断所给的两种情况是否属于等熵流的工况。为此，要找出 A_t 已经出现临界截面而在扩散段内是亚声速等熵流所需的总压，与给定的总压值进行比较，便可判定。按已知的 $A_e/A_*=1.17$，从等熵气流函数表查出

$$M_{e_\text{I}}=1.495\ （超声速情况）$$

$$M_{e_\text{III}}=0.615\ （亚声速情况）$$

再分别代入式（3-4-21）与式（3-4-17）得到对应的压力比为

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_\text{I}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{e\text{I}}^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times1.495^2\right)^{\frac{-1.4}{1.4-1}}=0.274$$

和

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_\text{III}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times0.615^2\right)^{\frac{-1.4}{1.4-1}}=0.775$$

计算给定的压比

$$P_b/P_0=1/1.25=0.8$$

或者

$$P_b/P_0=1/1.15=0.92$$



显然这时给定的两个压比 P_b/P_0 均大于 $(P_b/P_0)_m$ 值，因此给定的条件属于整个喷管内是亚声速等熵流（喉部未出现声速）的工况。

（1）求出口截面的 M_e 和 V_e

情况Ⅰ：

按 $P_0/P_e=1.25$，由式（3-2-15）有

$$T_e/T_0=\left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=0.938\text{，于是 }T_e=282$$

而
$$a_e=20.04\sqrt{T_e}=336$$

由式（3-4-8）
$$M_e=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_0}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]}=0.574$$

而　$V_e=M_e a_e=193$ m/s

情况Ⅱ：

按 $P_0/P_e=1.15$，由上述同样的计算步骤，得

$$M_e=0.451\text{，}\quad V_e=153\ \text{m/s}$$

（2）求喉部的静压 P_t

为便于计算，可先求出两种情况下所对应的临界截面积，然后再算出 P_t 值。

情况Ⅰ：

按 $M_e=0.574$，代入式（3-4-15），得 $A_e/A_*=1.220\,9$，又 $A_e=0.117$，则 $A_*=0.095\,8$，而 $A_t/A_*=1.043\,8$，再从等熵流函数表查得 $M_t=0.79$，代入式（3-2-15），得 $P_t/P_0=0.662\,5$，又 $P_0=1.25$，于是得

$$P_t=0.83\text{大气压（绝对）}$$

情况Ⅱ：

按 $M_e=0.45$，同理有

$$A_e/A_*=1.449, A_*=0.081, A_t/A_*=1.239$$

$$M_t=0.56, P_t/P_0=0.808, P_t=0.93\text{ 大气压（绝对）}$$

（3）求流量 $\dot{m}$

由上面已算出的对应临界截面积，可利用式（3-4-12）计算流量。

情况Ⅰ：

$$\dot{m} = 0.040\ 42\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}A_* = 0.040\ 42\times\frac{1.25\times1.013\ 25\times10^5}{\sqrt{300}}\times0.095\ 8$$
$$= 28.32\ \text{kg/s}$$

情况Ⅱ：

$$\dot{m} = 0.040\ 42\times\frac{1.15\times1.013\ 25\times10^5}{\sqrt{300}}\times0.081 = 21.94\ \text{kg/s}$$

例 4 空气流过一拉伐尔喷管，在扩张段某截面 A_s 处产生一道正激波，如图 3.10 所示。已知喉部截面积 $A_t = 0.10\ \text{m}^2$，激波所在处的截面积 $A_s = 0.20\ \text{m}^2$，出口截面积 $A_e = 0.25\ \text{m}^2$，喷管上游总压 $P_{01} = 10$ 大气压（绝对），总温 $T_0 = 500\ \text{K}$。求激波后以及出口截面的马赫数，静压和总温，并求流量 $\dot{m}$ 值。

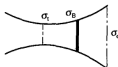


图 3.10 扩张段激波的确定

解 依题意，气流在喷管收缩段膨胀到喉部，达到临界状态。此后在扩张段内继续等熵膨胀为超声速流，在截面 A_s 处遇激波后产生突跃压缩，变为亚声速，以后又在从截面 A_s 到出口截面 A_e 的扩散段内进行等熵压缩。

为了求得出口截面参数，先要应用等熵流关系算出激波的参数，其后利用激波关系算出激波后参数，最后再利用等熵流关系获得出口气流参数。

利用等熵流函数表，按照已知 $\frac{A_s}{A_*} = \frac{A_s}{A_t} = 2$，查出激波前的超声速气流参数（用下标 1 表示）

$$M_1 = 2.20,\quad \frac{P_1}{P_{01}} = 0.093\ 5$$

算出 $P_1 = 0.935$ 大气压。

再利用正激波函数表，按照 $M_1 = 2.20$ 可查出激波后的参数（用下标 2 表示）

$$M_2 = 0.55,\qquad \frac{P_2}{P_1} = 5.48,\qquad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 0.628$$

算出 $P_2 = 5.12$ 大气压，$P_{02} = 6.28$ 大气压。

利用等熵流函数表，按照 $M_2 = 0.55$ 查出

$$\frac{A_s}{(A_*)_2} = 1.26$$

要注意，这里的 $(A_*)_2$ 是激波后想像的临界面积，而不是喉部面积。因此



$$\frac{A_e}{(A_*)_2}=\frac{A_e}{A_s}\cdot\frac{A_s}{(A_*)_2}=\frac{0.25}{0.20}\times1.26=1.57$$

查表得

$$M_e=0.41,\qquad P_e/P_{0e}=0.89$$

由于激波后的气流作等熵变化，总压不变，$P_{0e}=P_{02}=6.28$ 大气压。故算得 $P_e=5.60$ 大气压。由于喉部出现临界状态，因此流量已达最大值，即

$$\dot m_{max}=0.040\,42\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}A_t=0.040\,42\times\frac{10\times1.013\,25\times10^5}{\sqrt{500}}\times0.1$$
$$=183.2\ \text{kg/s}$$

例 5　空气自储气罐流过一拉伐尔喷管，$P_0=10$ 大气压，$T_0=300$ K，$A_t=0.1$ m^2，$A_e=0.24$ m^2。如果背压分别为 $P_b=8$ 大气压和 $P_b=0.5$ 大气压，求出口截面气流的 M 数，静压和静温。如果喷管内出现激波，求激波的位置。

解　先由 $A_e/A_*=2.4$ 查等熵流函数表，得 $M_{eIII}=0.25$（亚声速流），$M_{eI}=M_{eII}=2.4$（超声速流）；然后借助于式（3－4－21）、式（3－4－17）与式（3－4－20）得到三个特征压力比

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{I}=0.068\,4,\ \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{III}=0.957\,5,\ \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{II}=6.553\,3\times0.068\,4=0.448$$

显然
$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{III}>\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{II}>\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{I}$$

本题给出两种压比

$$(P_b/P_0)=8/10=0.8,\quad P_b/P_0=0.5/10=0.05$$

对于 $P_b/P_0=0.8$ 的情况，属于 $\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{II}<\frac{P_b}{P_0}<\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{III}$ 的流动，所以在扩张段内将出现正激波。

对于 $P_b/P_0=0.05$ 的情况，属于 $\frac{P_b}{P_0}<\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{I}$ 的流动，所以在喷管出口产生超声速流，并且在管外继续膨胀加速。

（1）$P_b/P_0=0.8$（这时出口为亚声速流动）

$P_e=P_b=8$ 大气压，借助于

$$\frac{P_e}{P_0}\frac{A_e}{A_*}=\frac{8}{10}\times\frac{0.24}{0.1}=1.92$$

查等熵表得 $M_e=0.3$，$P_e/P_{02}=0.94$，$T_e/T_{02}=0.982$；因 $T_{01}=T_{02}=T_0=300\text{ K}$，因此 $T_e=295\text{ K}$，$P_e=8$ 大气压。

再来确定激波的位置。由于

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}=\frac{P_e/P_{01}}{P_e/P_{02}}=\frac{8/10}{0.94}=0.851$$

查正激波表，得激波前的马赫数 $(M_s)_1=1.71$；由 $(M_s)_1$ 查等熵流函数表得 $A_s/A_*=1.347$，代入 $A_*=A_t=0.1\text{ m}^2$ 算出激波所在截面的面积为 $A_s=0.14\text{ m}^2$。

（2）$P_b/P_0=0.05$（这里出口截面为超声速流动）

这时 $M_e=2.4$，因 $P_0=10$ 故 $P_e=0.684$；查等熵流函数表得 $T_e/T_0=0.465$，得 $T_e=140\text{ K}$。

例 6 今有一个 Laval 喷管，$A_e/A_*=1.59$，如果背压比 P_b/P_0 分别为 0.94，0.64，0.25 和 0.12 时，试求上述四种压比下喷管出口马赫数 M_e 以及出口压比 P_e/P_0 值（令 $\gamma=1.4$）。

解 由 $A_e/A_*=1.59$，查等熵表或者直接计算可得两个解：$M_{eIII}=0.4$，$M_{eI}=M_{eII}=1.93$；然后仿照例题 5 可算出三个特征压力比。

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{I}}=0.142\,5,\ \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{III}}=0.895\,6,\ \left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{II}}=0.142\,5\times4.089=0.582\,7$$

显然

$$\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{III}}>\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{II}}>\left(\frac{P_b}{P_0}\right)_{\text{I}}$$

（1）$P_b/P_0=0.94$

显然 $\dfrac{P_b}{P_0}>\left(\dfrac{P_b}{P_0}\right)_{\text{III}}$，因此这时最小截面未达声速，全流管为亚声速流动且 $P_e=P_b$；由等熵关系并注意到 $P_b/P_0=P_e/P_0=0.94$，得 $M_e=0.30$。

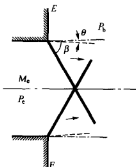


图 3.11　喷口处的斜激波

（2）$P_b/P_0=0.64$

$\left(\dfrac{P_b}{P_0}\right)_{\text{III}}>\dfrac{P_b}{P_0}>\left(\dfrac{P_b}{P_0}\right)_{\text{II}}$，所以在喉部与出口之间有正激波，这时虽然有 $P_e/P_0=P_b/P_0=0.64$，但要算出 M_e 的值还需要求出管内正激波的强度（可仿照例 5 的做法去求）。

（3）$P_b/P_0=0.25$

此时 $\left(\dfrac{P_b}{P_0}\right)_{\text{II}}>\dfrac{P_b}{P_0}>\left(\dfrac{P_b}{P_0}\right)_{\text{I}}$，所以喉部以后为等熵连续的超声速流动，出口以后有斜激波，如图 3.11 所示，这时 $M_e=M_{eI}=M_{eII}=1.93$；按 $M_e=1.93$ 的等熵流动去计算



得 $P_e / P_0 = 0.1425$。

计算斜激波强度

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{P_b}{P_e}=\frac{P_b}{P_0}\frac{P_0}{P_e}=\frac{0.25}{0.1425}=1.754;$$

由 $M_e = 1.93$ 及斜激波关系式

$$\sin\beta=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma M_e^2}\left(\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}=0.6648$$

得激波角 $\beta = 41.7°$，于是由式（2－3－44）算出偏转角 $\theta = 10.7°$。

（4） $P_b / P_0 = 0.12$

此时 $P_b / P_0 < (P_b / P_0)_{\rm I}$，因此 $M_e = (M_e)_{\rm I} = (M_e)_{\rm II} = 1.93$，于是按 $M_e = 1.93$ 的值作等熵计算得到这时 $P_e / P_0 = 0.1425$，气流通过膨胀波进一步加速。

3.4.5　等熵管流实现连续过渡的几何要求

这里从理论上讨论一下一般流体从亚声速连续地过渡到超声速流动的问题。为此先从一般流体定常一维流动的连续方程和动量方程出发，它们是

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}+\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}=0 \tag{3-4-23}$$

$$\rho V\frac{dV}{dx}+\frac{dP}{dx}=0 \tag{3-4-24}$$

式中，A 为流道的截面积，它是 x 的函数。注意到

$$\frac{dP}{dx}=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S\frac{d\rho}{dx}=a^2\frac{d\rho}{dx} \tag{3-4-25}$$

将式（3－4－23）与式（3－4－24）组合并注意应用式（3－4－25），得

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}=\frac{1}{M^2-1}\frac{dA}{Adx} \tag{3-4-26}$$

从式（3－4－26）可以看出：dV 为正的加速流动应该与 $dA/(M^2-1)$ 的正值相对应，而 dV 为负的减速流动应该对应于 $dA/(M^2-1)$ 的负值。在 $M=1$ 的地方，仅当 $dA/dx=0$ 时，加速度才能够保持有限值，这时式（3－4－26）具有高等数学上所讲的“0/0”型。为便于讨论，将式（1－9－98）代入到式（3－4－26）中便得到一个显含马赫数的方程，即

$$\frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=\frac{1+(\Gamma-1)M^2}{M^2-1}\frac{\mathrm{d}A}{A\mathrm{d}x} \tag{3-4-27}$$

式中，Γ 为基本气动导数，其定义由（1－9－95）式给出。

作为一般流体的特例，对于完全气体则 $\Gamma=\frac{\gamma+1}{2}$；对于式（3－4－27），当 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}x=0$，$M=1$ 的情况，可以使用高等数学中的洛比达（Hospital）法则，于是得到这时应该满足的一个重要关系式，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{\Gamma}{2A}\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}x^2} \tag{3-4-28}$$

为了使式（3－4－28）存在有物理意义的解，其右端项必须为正值，也就是说 Γ 必须与 $\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}x^2$ 同号。正如 § 1.9 节所述的，几乎对所有的流体，尤其是对完全气体来说，基本气动导数 Γ 都是正的，所以也要求 $\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}x^2$ 为正值。而 A 的二阶导数大于零，并且 A 的一阶导数等于零，在高等数学上表明这时的曲线上凹，也就是说流道的曲线应具有图 3.12（a）所示的形式，即 Laval 喷管的样式。因此，对于正常流体而言，仅在最小截面上或者说仅在喉部，马赫数才能通过 1；另外，还需要指出的是：虽然从亚声速到超声速的过渡只能发生在喉部，但并不是在喉部一定会出现这种过渡。由式（3－4－26）可知，如果在喉部的 $M\neq1$，则加速度必为零，这就意味着在收敛段中的亚声速流动在扩张段内将继续保持亚声速流动状态。

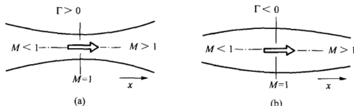


图 3.12　从亚声速到超声速流的过渡

上面的讨论仅针对一般流体，它适用于完全气体。另外，上面的讨论也适用于三维管流流动。

§3.5　等截面一维定常绝热摩擦管流

对于一维定常、绝热、等截面、摩擦管流，§ 3.3 节所给出的基本方程组可简化为



$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V}=0\\&\frac{\mathrm{d}p}{p}+\gamma M^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}+2f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right)=0\\&\frac{\mathrm{d}T}{T}+(\gamma-1)M^2\frac{\mathrm{d}V}{V}=0\\&\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}-\frac{\mathrm{d}T}{T}=0\end{aligned}\right\} \tag{3-5-1}$$

而式（3－3－34）此时简化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\gamma M^2[1+(\gamma-1)M^2]}{2(1-M^2)}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=-\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-5}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{\gamma M^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{2(1-M^2)}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0}=\frac{-\gamma M^2}{2}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-7}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{F}=-\frac{\gamma M^2}{2(1+\gamma M^2)}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-8}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{c_p}=\frac{(\gamma-1)M^2}{2}\left(4f\frac{\mathrm{d}x}{D_e}\right) \tag{3-5-9}$$

由于 $\mathrm{d}x$ 沿着流动方向为正，摩阻系数 f 也是正的，因此 $\mathrm{d}p/p$，$\mathrm{d}V/V$ 等量的正负，便取决于等式右边的正、负号。下面着重说明几点：

（1）不论是亚声速流还是超声速流，在绝热摩擦管流中，总压和冲量函数总是不断减小的。也就是说，壁面摩阻作用引起机械能损失，减小了可利用的功；在喷气推进装置中，则要减小推力。

（2）无论是亚声速流或超声速流，摩阻作用总是使气流的速度趋向于声速，即马赫数 M 趋向于 1；然而，单靠摩阻作用，不可能使亚声速流增速至超声速流，也不可能使超声速流减速至亚声速流。

（3）无论亚声速或超声速流，摩擦沿流向都引起熵的增加。

3.5.1　等截面绝热摩擦管任意两个截面上气流参数间的关系式

首先将式（3－5－6）适当整理并作如下积分

$$\int_{x=0}^{x=L_{max}} 4f\frac{dx}{D_e}=\int_{M=M_i}^{M=1}\frac{2(1-M^2)}{\gamma M^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\frac{dM}{M} \tag{3-5-10}$$

式中，L_{max} 称为最大管长。上式积分限是这样定义的：取 $x=0$ 的截面上马赫数为 M_i，而 $x=L_{max}$ 截面上的马赫数恰为 1，于是上式可积分得到

$$4\bar{f}\frac{L_{max}}{D_e}=\left[\frac{1-M^2}{\gamma M^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\frac{(\gamma+1)M^2}{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\right]_i \tag{3-5-11}$$

式中，$\bar{f}$ 是按长度平均的摩擦系数，其定义为

$$\bar{f}\equiv\frac{1}{L_{max}}\int_0^{L_{max}} f dx \tag{3-5-12}$$

显然，$4\bar{f}\frac{L_{max}}{D_e}$ 仅是 M_i 的函数，今令式（3－5－11）右端项的函数为 $G(M_i)$，于是式（3－5－11）可写为

$$4\bar{f}\frac{L_{max}}{D_e}=G(M_i) \tag{3-5-13}$$

这里 $G(M_i)$ 的定义为

$$G(M_i)=\left[\frac{1-M^2}{\gamma M^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\frac{(\gamma+1)M^2}{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\right]_i \tag{3-5-14}$$

令流动从给定的某个起始马赫数 M_1 变到终了的某个马赫数 M_2 时所需的管长为 L，则 L 应满足下式



$$4\bar{f}\frac{L}{D_e}=\left(4\bar{f}\frac{L_{\max}}{D_e}\right)_{M_1}-\left(4\bar{f}\frac{L_{\max}}{D_e}\right)_{M_2}=G(M_1)-G(M_2) \tag{3-5-15}$$

另外，由式（3-5-2）与式（3-5-6）中消去$\left(4f\frac{dx}{D_e}\right)$项后并作如下积分

$$\int_{P=P_i}^{P=P_*}\frac{dP}{P}=-\int_{M=M_i}^{M=1}\frac{1+(\gamma-1)M^2}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\frac{dM}{M}$$

便得到任意截面与临界截面上气流压强间的关系式

$$\frac{p}{p_*}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}} \tag{3-5-16}$$

用类似的方法，可以得到任意截面与临界截面上气流速度、温度、密度与熵的关系

$$\frac{V}{V_*}=M\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}} \tag{3-5-17}$$

$$\frac{T}{T_*}=\frac{a^2}{a_*^2}=\frac{\gamma+1}{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} \tag{3-5-18}$$

$$\frac{\rho}{\rho_*}=\frac{V_*}{V}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{\gamma+1}} \tag{3-5-19}$$

$$\frac{s-s_*}{c_p}=\ln M^2\sqrt{\left[\frac{\gamma+1}{2M^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} \tag{3-5-20}$$

式中，带下标*的参数均表示临界截面上的参数。

应该指出，上述函数可以制成表格，书后附录表 5 中给出了 $\gamma=1.4$ 时一维定常等截面绝热摩擦管流数值表以备查用。

3.5.2 最大折合管长及摩擦壅塞现象

利用式（1－8－25），则式（3－5－13）可改写为

$$4\bar{f}\frac{L_{max}}{D_e}=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{1}{\lambda^2}-1-\ln\frac{1}{\lambda^2}\right)_i \tag{3-5-21}$$

同样式（3－5－15）可改写为

$$\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_2^2}\right)-\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(4\bar{f}\frac{L}{D_e}\right) \tag{3-5-22}$$

式中，λ_1为进口截面$(x=x_1)$处的速度系数；λ_2为离进口截面距离为L处的那个截面$(x=x_2=x_1+L)$上的速度系数。

令

$$\xi\equiv\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(4\bar{f}\frac{L}{D_e}\right) \tag{3-5-23}$$

称为折合管长，于是式（3－5－22）变为

$$\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)-\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2=\xi \tag{3-5-24}$$

这里考虑到λ_2的任意性，故去掉了λ_2的下标并以λ代之；特别是当$L=L_{max}$时，这时$\lambda=1$，于是式（3－5－24）变为

$$\xi_{max}\equiv\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(4\bar{f}\frac{L_{max}}{D_e}\right)=\frac{1}{\lambda_1^2}-1-\ln\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 \tag{3-5-25}$$

对于给定的进口速度系数λ_1，由式（3－5－25）便得到相应的最大折合管长ξ_{max}，如果实际折合管长ξ大于ξ_{max}时则即使出口背压再低，在出口处也无法排出以λ_1所对应的进口处流入的流量，于是流动将发生壅塞现象。下面简单讨论一下有关壅塞问题的计算（如图3.13所示）：

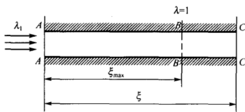


图3.13 摩擦壅塞示意图

（1）当进口$\lambda_1<1$时，由于壅塞引起的管内压力增高的扰动将一直传到进口处，迫使气流在进口之前就发生溢流，以减小进口速度。换句话说，也就是使对应的最大折合



管长ξ_{max}加长，临界截面后移到管子的出口处，使得恰好有$\xi_{max}=\xi$（这里ξ为管子的实际折合长度）。

（2）当进口$\lambda_1>1$时，由于壅塞引起的扰动会在超声速气流中产生一道激波。激波后变为亚声速流动，而在同样长的管道中亚声速气流造成的总压损失比超声速气流小得多，从而提高了出口气流的总压，使得原来进入管内的流量能够从出口流出，在出口截面上气流达到了临界状态。通常，在管长超过最大管长不多时，只要管内产生激波，就能够使进口的速度系数λ_1及相关的流量都不改变的情况下解决壅塞问题。

综上所述，可以得到如下三点结论：

（1）对于每一个进口速度系数λ_1，存在着一个相应的最大折合管长ξ_{max}，如果实际管道的折合长度超过这个值，流动就会壅塞。

（2）对于某个给定的折合管长ξ，当流动为亚声速流动时在管道进口处必然要存在一个最大的进口速度系数，如果进口的实际进口速度系数大于这个值，则流动就会壅塞。

（3）对于某个给定的折合管长ξ，当流动为超声速流动时在管道进口处必然存在一个最小的进口速度系数，如果进口的实际进口速度系数小于这个值，则流动也会壅塞。

例 7　为了测量超声速气流的摩擦系数，常使用一个拉伐尔喷管后接一个光滑的圆管组成了一个实验装置。今测得拉伐尔喷管进口气流总压$P_0=6.890\times10^5$ Pa，总温$T_0=316$ K 测得距光滑圆管进口 1.75 倍圆管直径的 1–1 截面的气流压强$P_1=2.432\times10^4$ Pa，测得距光滑圆管 29.6 倍圆管直径的 2–2 截面的气流压强$P_2=4.945\times10^4$ Pa；已知拉伐尔喷管出口与光滑圆管的直径$D=12.72$ mm，喷管喉部直径为 6.14 mm，试求 1–1 与 2–2 截面之间这段直圆管的平均摩擦系数$\bar{f}$。这里假设喷管喉部之前的流动是等熵流动，整个流动是绝能流，（这里$\gamma=1.4$）。

解　由（3－4－10）式得到

$$P_1 y(\lambda_1)A_1=P_0A_t$$

故

$$y(\lambda_1)=\frac{P_0A_t}{P_1A_1}=\frac{6.890\times10^5}{0.243\ 2\times10^5}\left(\frac{6.14}{12.72}\right)^2=6.601$$

查书后附表 4（a），可得$\lambda_1=1.835$，$M_1=2.530$；按同样的方法可得

$y(\lambda_2)=\dfrac{P_0A_t}{P_2A_1}=3.246$, 查表得$\lambda_2=1.393, M_2=1.546$。

在两个截面之间的管长$L=(29.6-1.75)\times12.72=27.85D=354.25$ mm，将λ_1,λ_2与L值代入式（3－5－22）便得到平均摩擦系数$\bar{f}$值，即$\bar{f}=0.002\ 56$。

例 8　设有一折合长度为ξ的直管道，管子进口的速度系数λ_1已知并且大于 1，另外还知道这时ξ大于$\xi_{max}(\lambda_1)$，这里$\xi_{max}(\lambda_1)$为与λ_1相对应的最大折合长度；显然该情况下发生摩擦壅塞现象，在管内将有激波产生，试建立关于未知量ξ_s与λ_s的方程组（这里ξ_s为激波发

生的位置，λ_s为激波前的速度系数）。

解 激波的位置应根据$\lambda_{出口}=\lambda_2=1$的条件算出。假设激波前的速度系数为λ_s，由正激波关系式，则波后的速度系数应为$1/\lambda_s$；又设激波发生在ξ_s处，于是按式（3－5－24）分别对从进口处到激波前以及从激波后到出口处的两段气流列如下两个式子（如图 3.14 所示），得

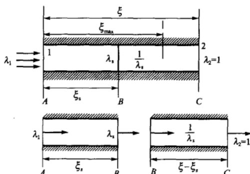


图 3.14 确定管内激波位置

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_s^2}\right)-\ln\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_1}\right)^2=\xi_s\\ \left(\lambda_s^2-1\right)-\ln\lambda_s^2=\xi-\xi_s\end{aligned}\right\}\qquad(3-5-26)$$

由此便可解出未知量ξ_s与λ_s值。

例 9 已知进入直圆管的空气流$\lambda_1=1.75$，摩擦系数$\bar{f}=0.001\,2$，$L/D=107$，试问管内空气流动会不会发生壅塞？如发生问产生激波的位置？

解 由$\lambda_1=1.75$，于是得$4\bar{f}\dfrac{L_{max}}{D}\approx0.382$，又因$4\bar{f}\dfrac{L}{D}=4\times0.001\,2\times107=0.513>0.382$因此该摩擦管流发生壅塞现象。

由式（3－5－26）得

$$\left(\frac{1}{1.75^2}-\frac{1}{\lambda_s^2}\right)-\ln\left(\frac{\lambda_s}{1.75}\right)^2=\frac{8\gamma}{\gamma+1}\times0.001\,2\frac{L_s}{D}$$

$$\left(\lambda_s^2-1\right)-\ln\lambda_s^2=\frac{8\gamma}{\gamma+1}\times0.001\,2\times\left(107-\frac{L_s}{D}\right)$$

解得
$$\lambda_s=1.468,\quad\frac{L_s}{D}=37.9,\quad\frac{1}{\lambda_s}=0.682$$



例 10　如图 3.15 所示有一等截面直管，$d=0.025\ \text{m}$，$L=0.25\ \text{m}$，$f=0.008$，直管上游通过收缩喷管与高压气罐相接。气罐内固定的参数为 $P_0=7\times10^5\ \text{N/m}^2$，$T_0=333\ \text{K}$，$\gamma=1.4$，试确定：

（1）通过等截面直管的最大质量流量以及实现该质量流量的背压范围。

（2）若去掉等截面直管，气体直接从收缩喷管喷出，重复上述（1）的计算。

（3）若背压 $P_b=5\times10^5\ \text{N/m}^2$，求等截面直圆管的 M_1 和 M_e 的值。

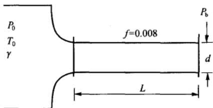


图 3.15　等截面直圆管与高压罐相连结

解　（1）当出口马赫数 $M_e=1$ 时，亦即 L 变为 L_{max} 时管内质量流量最大。因此由

$$G(M_1)\equiv\frac{4f(L_{max})_{M_1}}{d}=\frac{4fL}{d}=0.32$$

查表 5 得 $M_1=0.65$，再由 M_1 及表 5 得 $\dfrac{P_1}{P_e}=\left(\dfrac{P_1}{P_*}\right)_{M_1}=1.619$；由 M_1 及等熵流表 4（a）查得 $(P_1/P_0)_{M_1}=0.752\,8$，于是 $P_e=(P_*/P_1)_{M_1}(P_1/P_0)_{M_1}P_0=3.25\times10^5\ \text{N/m}^2$，也就是说当背压 P_b 在 $0<P_b\leqslant3.25\times10^5\ \text{N/m}^2$ 这个范围时，直圆管达临界状态，质量流量最大。

（2）如果只有收缩喷管时，当喷管出口 $M_e=1$ 时流量最大。这时

$$P_e=P_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0.528P_0=3.7\times10^5\ \text{N/m}^2$$

即当背压 P_b 在 $0<P_b\leqslant3.7\times10^5\ \text{N/m}^2$ 这个范围时，质量流量最大。

（3）因 $P_b=5\times10^5>3.25\times10^5$，所以 $M_e<1$，$P_e=P_b$；这时需由下面三个式子联立去决定未知的 M_e,M_1,P_1 值，即

$$\begin{cases}\dfrac{4fL}{d}=G(M_1)-G(M_e)\\[2mm]\dfrac{P_1}{P_e}=\left(\dfrac{P_1}{P_*}\right)_{M_1}\left(\dfrac{P_*}{P_e}\right)_{M_e}\\[2mm]\dfrac{P_{01}}{P_1}=\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\end{cases}\tag{3-5-27}$$

式中，(P_1/P_*) 与 $(P_e/P_*)_{M_e}$ 由式（3-5-16）决定。

联立求解式（3-5-27）是很繁琐的，故可采用试凑的方法，即先假定一个 M_e'，由此

算出一个相应的M_1'、P_1'及P_{01}'值；比较P_{01}'是否等于已知的P_{01}，若相等则前面假定的值为真；若不相等则另给一个新的M_e'值重复上面的计算，直到式（3-5-27）中三个方程同时满足为止。在本题中，若假定流动等熵，则由$\frac{P_b}{P_0}=\frac{5}{7}=0.714$可算出这时的$M_e=0.71$，因此考虑摩擦后可由小于0.71的$M_e$试算。试算结果如表3-5-1所示。

表3-5-1

	①	②	③
M_e	0.60	0.62	0.64
M_1	0.536	0.548	0.56
P_1	5.73	5.69	5.76
P_{01}	6.966	6.97	7.12

由上表可知$M_1\approx0.548$，$M_e\approx0.62$为本问题的解。

3.5.3 等截面绝热摩擦管的计算步骤及三种特征压比

一、收缩喷管或者高压气罐（如图3.15所示）之后接一个等截面绝热摩擦管

若把喷管或者气罐与等截面直管放在一起考虑，则这时需要给定和待定的流动参数有$P_{01},P_1,M_1,P_e,P_b,M_e$以及$L,d,f$等。以下分三种情况讨论：

1. 给定P_b,L,f,d值，并按设计的需要给定出口马赫数M_e，求P_{01},P_1以及M_1值

在这种情况下，可分两种工况讨论：

工况1：若给定的$M_e<1$，则$P_e=P_b$；又由于$M_e<1$，因此必然有$L<(L_{\max})_{M1}$；

（1）由M_e得$G(M_e)$；再由L及$G(M_e)$值，由式（3-5-15）求出M_1。

（2）由（3-5-16）式并注意到$P_e=P_b$以及下式

$$\left(\frac{P_1}{P_e}\right)_{M_1}=\left(\frac{P_1}{P_*}\right)_{M_1}\left(\frac{P_*}{P_e}\right)_{M_e}$$

可求得P_1值。

（3）假设收缩喷管内流动等熵，则由下式求出P_{01}，即

$$\frac{P_{01}}{P_1}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

工况2：若给定的$M_e=1$，令$P_e=P_b=P_*$，$L=(L_{\max})_{M_1}$，由下式



$$\frac{4f(L_{\max})_{M_1}}{d}=\frac{4fL}{d}$$

求出 M_1 值；由
$$\frac{P_1}{P_e}=\frac{P_1}{P_b}=\left(\frac{P_1}{P_*}\right)_{M_1}$$

求出 P_1 值；再利用等熵关系求得 P_{01} 值；

假如实际的 P_{01} 大于由以上条件算出的 P_{01} 时，则出口截面仍然有 $M_e=1$，但这时 $P_e>P_b$，于是气流在出口后将进一步加速；若实际的 P_{01} 值等于按以上条件算出的 P_{01} 值，而实际的背压 P_{b1} 变小，则这时出口截面仍为临界截面，气流流出直管出口之后进一步加速，$P_e>P_{b1}$。

2. 给定 P_b,L,d,f 值，并按设计要求给定出口马赫数 M_1（这里 $M_1<1$），求 P_{01},P_1,M_e 及 P_e 值

对给定的 M_1，首先要判断 L 是否大于 $(L_{\max})_{M_1}$ 值。

（1）如果 $L<(L_{\max})_{M_1}$，则出口的 $M_e<1$，并且 $P_e=P_b$；按式（3-5-15）求 M_e，按式（3-5-16）求 P_1，再按等熵关系求 P_{01} 值。

（2）如果 $L=(L_{\max})_{M_1}$，则出口截面刚好达到临界状态，这时 $M_e=1$，$P_e=P_b$，$P_1=\left(\frac{P_1}{P_*}\right)_{M_1}P_*=\left(\frac{P_1}{P_*}\right)_{M_1}P_b$；再由等熵关系得到 P_{01}；

（3）若 $L>(L_{\max})_{M_1}$，则计算不能进行。这是由于壅塞发生，实际的进口马赫数必定要小于已给的 M_1 值，因此要么减小设计要求的 M_1 值，要么减小直管的长度 L 值。

3. 给定 P_b,P_{01} 以及 L,d,f 值，试确定 M_1,P_1,M_e,P_e 值。

在这种情况下，首先要根据已给的条件判断直管出口是否达到临界状态。为此令 $M_e=1$，$P_e=P_b$，按照第一种情况中工况 2 的步骤去计算 P_{01}' 值。

（1）如果 $P_{01}>P_{01}'$，则出口为临界状态，气流从直管的出口流出后继续加速，$P_e>P_b$；这时 $L=(L_{\max})_{M_1}$，故可得到 M_1 值；由 P_{01},P_1 与 M_1 间的等熵关系求出 P_1 值；由 $\frac{P_1}{P_e}=\left(\frac{P_1}{P_*}\right)_{M_1}$ 计算出 P_e 值；当然这里算出的 P_e 一定大于 P_b 值。

（2）如果 $P_{01}=P_{01}'$，则出口刚好达到临界状态，这时 $P_e=P_b$；由 $L=(L_{\max})_{M_1}$ 的关系可分别计算出 M_1，P_1 值，所得 M_1 与 P_1 值应与①相同。

（3）如果 $P_{01}<P_{01}'$，则出口未达到临界状态，这时 $M_e<1$，并且有 $P_e=P_b$；另外，三个待定的参数 M_1,M_e 与 P_1 满足式（3-5-27）这个方程组；该方程组的求解可采用例题 10 中所述的试凑法进行。

二、超声速 Laval 喷管的出口之后接一个等截面直管（如图 3.16 所示）

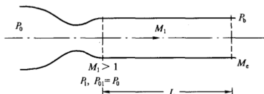


图 3.16　Laval 喷管与等截面摩擦直管相连接

假定 Laval 喷管内的流动为等熵。等截面绝热直管内的超声速流动的计算步骤与 Laval 喷管超声速段的计算步骤类似。今分两种情况讨论：

1. 给定 M_1, P_1（或者 P_0）以及 L, d, f，求等截面摩擦绝热直管内的流动状态（这里 P_b 的值暂时不定）

首先判断 L 是否大于 $(L_{\max})_{M_1}$ 值。下面分三个分支讨论：

第一分支——若 $L < (L_{\max})_{M_1}$，则由 $G(M_e) = G(M_1) - \dfrac{4fL}{d}$ 计算 M_e（这时 $M_e > 1$），再由

$$\frac{P_e}{P_1} = \left(\frac{P_e}{P_*}\right)_{M_e} \left(\frac{P_*}{P_1}\right)_{M_1}$$

计算出 P_e 值。

（1）如果由上面计算出的 P_e 等于给定的 P_b，则上面所求的 M_e 成立，并且在等截面直管内由进口至出口流动连续（无激波）；

（2）如果由上面计算的 P_e 大于 P_b，则出口马赫数仍为 M_e，管内流动与前面相同，但由于这时 $P_e > P_b$，因此气流流出直管出口后将产生膨胀加速；

（3）如果 P_e 小于 P_b，这时等截面直管出口的流动状态与 Laval 喷管出口的流动状态相似，随 P_b 的增加，出口先产生斜激波，然后在出口截面形成正激波；随着 P_b 值进一步增加，正激波将向管内移动；如果 P_b 进一步增高，正激波甚至会移到 Laval 喷管内部，使整个等截面直管内的超声速流变为亚声速。

第二分支——若 $L = (L_{\max})_{M_1}$，则 $M_e = 1$，另外由 P_1, M_1 算出 $P_e = P_*$。

（1）如果 $P_e > P_b$，则管内流动不变，出口截面仍为声速，但气流从直管出口流出后会进一步膨胀加速；

（2）如果 $P_e < P_b$，则管内将产生激波，并且随着 P_b 的增加，激波向上游移动。

第三分支——若 $L > (L_{\max})_{M_1}$，这时将产生壅塞现象。

无论以上哪个分支情况，只要激波位于喷管喉部下游，则整个流动的无量纲质量流量密度将不再改变。因此，这时质量流量的壅塞将发生在喉部而不是在下游；一旦在任何位置上



出现正激波，波后流动应按 $M<1$ 的步骤计算。在管内出现激波时，必须考虑激波关系，这时常用试凑法求解。

2. 对于一般给定 M_1, P_1（或者 P_0），P_b 以及 L, f, d 时的情况

如果经判断 $L<(L_{max})_{M_1}$ 时，则最好先算出下面三个特征压比即 $(P_b/P_{01})_{\text{I}}$，$(P_b/P_{01})_{\text{II}}$，$(P_b/P_{01})_{\text{III}}$ 并且有

$$\left(\frac{P_b}{P_{01}}\right)_{\text{III}} > \left(\frac{P_b}{P_{01}}\right)_{\text{II}} > \left(\frac{P_b}{P_{01}}\right)_{\text{I}} \tag{3-5-28}$$

它们可分别由下面所述的①，②，③三个步骤得到，即

（1）正激波位于等截面直管进口时，由此可算出 $(P_b/P_{01})_{\text{III}}$ 值；

（2）正激波位于等截面管直管出口时，由此可算出 $(P_b/P_{01})_{\text{II}}$ 值；

（3）等截面直管出口既无激波，也无膨胀波，这时 $M_1>M_e>1$，由此可算出 $(P_b/P_{01})_{\text{I}}$ 值；

下面从四个分支去讨论不同背压时等截面摩擦直管中气流的流动特点：

第一分支——当 $P_b/P_{01}>(P_b/P_{01})_{\text{III}}$ 时，正激波移至 Laval 喷管内，这时整个等截面直管为亚声速流动。

第二分支——当 $(P_b/P_{01})_{\text{III}}>P_b/P_{01}>(P_b/P_{01})_{\text{II}}$ 时，正激波位于等截面摩擦直管的进口与出口之间；

第三分支——当 $(P_b/P_{01})_{\text{II}}>P_b/P_{01}>(P_b/P_{01})_{\text{I}}$ 时，等截面摩擦直管的出口产生斜激波。

第四分支——当 $P_b/P_{01}<(P_b/P_{01})_{\text{I}}$ 时，等截面摩擦直管的出口产生膨胀波。

3.5.4　等截面摩擦管流的 Fanno 曲线及焓熵图

所谓 Fanno（范诺）线就是给定总焓 h_0 和密流 $j=\rho V$ 时等截面管流的焓–熵曲线。范诺曲线满足能量方程、连续方程和状态方程。在定常的等截面管流中，连续方程可写为

$$j=\frac{\dot{m}}{A}=\rho V=\text{const} \tag{3-5-29}$$

一维定常流的能量方程为

$$h+\frac{V^2}{2}=h_0 \tag{3-5-30}$$

由上面两方程中消去 V^2 后得

$$h=h_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{\rho A}\right)^2 \tag{3-5-31}$$

这就是范诺线方程。下面推导该方程的微分关系：由等截面一维定常绝热流的连续方程和能

量方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V}=0$$

$$\mathrm{d}h+V\mathrm{d}V=0$$

以及完全气体的焓与熵微分关系

$$\mathrm{d}h=c_p\mathrm{d}T$$

$$\mathrm{d}s=c_v\frac{\mathrm{d}T}{T}-R\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

于是由上面的四个式子可推得：

$$\mathrm{d}s=c_v\frac{\mathrm{d}T}{T}+R\frac{\mathrm{d}V}{V}=c_v\frac{\mathrm{d}T}{T}-R\frac{\mathrm{d}h}{V^2}=c_v\frac{\mathrm{d}T}{T}-c_v\frac{\gamma RT}{V^2}\frac{\mathrm{d}h}{h}=\frac{R}{\gamma-1}\left(1-\frac{1}{M^2}\right)\frac{\mathrm{d}h}{h}\quad(3-5-32)$$

把此关系画在 $h-s$ 图上就是范诺线。根据范诺线的定义，图 3.17 中同一条范诺线上的总焓 h_0 和密流 $j=\rho V$ 是相同的。图中的三条范诺线具有相同的总焓 h_0 但密流 j 不同，左面范诺线的密流较大。由式（3-5-32）可以看出：

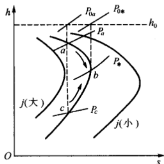


图 3.17　范诺线

（1）当 $M<1$ 时，$\mathrm{d}h$ 与 $\mathrm{d}s$ 异号，在 $h-s$ 图上的斜率为负值，因此范诺线的上半支对应于亚声速流。当 $M>1$ 时，$\mathrm{d}h$ 与 $\mathrm{d}s$ 同号，在 $h-s$ 图上的斜率为正值，因此范诺线的下半支对应于超声速流。在当 $M=1$ 时，$\mathrm{d}s=0$，图中 b 点熵最大。

（2）由热力学第二定律，对于绝热的粘性流动，其熵不能减小，而总是增大，即 $\mathrm{d}s>0$，因此气流沿任一条范诺线的变化方向必定是趋向右方。因此若管道中某一截面处的流动是亚声速的（如图 3.17 中的 a 点），则摩擦的作用是使马赫数增大，焓值减小，熵值增加，从 $h-s$ 图上看从 a 点向 b 点变化。由热力学第二定律可以推知：单独的摩擦作用不能使亚声速气流变为超声速气流。另外，对于管道中某一截面处的流动为超声速流动（如图中的 c 点）则粘性摩擦的作用是使马赫数减小，焓值增加，熵值增加，即从 c 点向 b 点移动，同样由热力学第二定律可以推知：单纯的摩擦作用也不可能使超声速气流不经过激波而变为亚声速气流。

（3）在摩擦管流中，超声速流可以通过激波间断跃变到范诺线的亚声速分支上。

最后，我们仍从一般流体出发讨论等截面摩擦管流中压强 P 与比容 v 间的普遍变化关系。为此，从适用于一般流体的连续方程式（3-5-29）、能量方程式（3-5-30）出发，合并这两式便得到



$$h+\frac{1}{2}j^2v^2=h_0=\text{const} \tag{3-5-33}$$

式中，v 代表比容。

将上式微分便得到

$$\mathrm{d}h+j^2v\mathrm{d}v=0$$

利用吉布斯方程式（1.5.8），则上式变为

$$T\mathrm{d}S+v\mathrm{d}P+j^2v\mathrm{d}v=0 \tag{3-5-34}$$

由于 $v=v(P,s)$，因此 $\mathrm{d}v=\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_S\mathrm{d}P+\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_P\mathrm{d}s$

而
$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_S=-(\rho a)^2=-\frac{j^2}{M^2}$$

故有
$$\mathrm{d}s=\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P\mathrm{d}v+\frac{M^2}{j^2}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P\mathrm{d}P$$

将上式代入到式（3-5-34）中得

$$\left[T\frac{M^2}{j^2}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P+v\right]\mathrm{d}P+\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P+j^2v\right]\mathrm{d}v=0 \tag{3-5-35}$$

这里
$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P=\frac{c_P}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \tag{3-5-36}$$

在通常情况下，$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P$ 总是正的，因此式（3-5-35）中 $\mathrm{d}P$ 和 $\mathrm{d}v$ 的系数通常为正值，也就是说 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 具有相反的正负号。应该指出：式（3-5-35）是针对一般流体而言的，对完全气体当然也适用。作为课后作业，从式（3-5-35）出发针对完全气体试推出 $\mathrm{d}P$ 与 $\mathrm{d}v$ 的关系式，这里 v 代表气体的比容。

§ 3.6　等截面无摩擦一维定常加热（或冷却）管流

在一些实际问题中常会遇到有热量交换的管流，例如发动机中气体通过燃烧获得新的热量；又如在超声速风洞中有时会存在水气凝结突跃面，放出潜热，加入到气流中去等等。为了便于抓住加热流的主要因素，特将问题作如下简化：

（1）假定管道为等截面直管，流动是一维的定常运动，没有功的交换及摩擦作用，只有传热交换。

（2）假定加热前后气体成分不变，比热比不变，而且质量不变。因此，加热过程被看作简单的 T_0 变化过程，即

$$\delta q = c_p \mathrm{d}T_0 \tag{3-6-1}$$

或

$$\Delta q = h_{02} - h_{01} = c_p (T_{02} - T_{01}) \tag{3-6-2}$$

3.6.1 等截面换热管流的 Rayleigh 曲线及焓熵图

采用等截面和无摩擦的一维流动假设，则动量方程和连续方程分别为

$$P + \rho V^2 = \frac{J}{A} = \text{const} \tag{3-6-3}$$

$$\rho V = j = \frac{\dot{m}}{A} = \text{const} \tag{3-5-29}$$

式中，J 与 j 分别代表冲量与密流；A 为截面面积。合并上面两个方程便得到

$$P + \frac{j^2}{\rho} = \frac{J}{A} = \text{const} \tag{3-6-4}$$

当单位面积的流量 j 和单位面积的冲量 J/A 给定时，则式（3-6-4）规定了压强与密度间的惟一关系，我们称此关系为 Rayleigh（瑞利）方程[3]；对于完全气体，则熵、压力与温度间的关系为

$$\mathrm{d}s = c_p \frac{\mathrm{d}T}{T} - R\frac{\mathrm{d}P}{P} \tag{1-5-44a}$$

如果取 $M=1$ 的参考状态，则对上式积分便得到

$$s - s_* = c_p \ln\frac{T}{T_*} - R\ln\frac{P}{P_*} \tag{3-6-5}$$

如果将式（3-6-3）用马赫数与压力表示并且用于任意两个截面（例如 1 和 2 截面），则有

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2} \tag{3-6-6}$$

将上式用于临界截面与任一截面便有

$$\frac{P}{P_*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \tag{3-6-7}$$

另外，仿照式（3-6-6）的推导方法用于式（3-5-29）得到

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1 a_1}{M_2 a_2} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{P_1}{P_2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{1/2} \tag{3-6-8}$$



注意使用式（3−6−6），于是便有

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(M_1/M_2)^2}{P_2/P_1}=\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2\frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2} \tag{3-6-9}$$

注意使用式（3−6−9）与式（3−6−6），又可得到

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{P_2/P_1}{\rho_2/\rho_1}=\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2\left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^2 \tag{3-6-10}$$

将式（3−6−10）用于临界截面与任一截面，有

$$\frac{T}{T_*}=M^2\left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2}\right)^2 \tag{3-6-11}$$

合并式（3−6−7）与式（3−6−11），得

$$\left(\frac{P}{P_*}\right)^2=\frac{1}{M^2}\frac{T}{T_*} \tag{3-6-12}$$

从式（3−6−7）与式（3−6−12）中消去 M^2 项便得到压比与温度比之间的关系式，即

$$\left(\frac{P}{P_*}\right)^2-(1+\gamma)\left(\frac{P}{P_*}\right)+\gamma\frac{T}{T_*}=0 \tag{3-6-13}$$

由上式解出 P/P_* 后代入熵方程式（3−6−5），得

$$S-S_*=c_p\ln\frac{T}{T_*}-R\ln\left[\frac{1+\gamma}{2}\pm\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2-4\gamma(T/T_*)}}{2}\right] \tag{3-6-14}$$

于是在 $T-S$ 或 $h-S$ 坐标上，用方程（3−6−14）式画出的曲线示于图 3.18 上，这条曲线称为瑞利线。

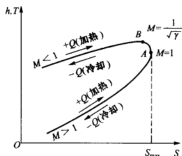


图 3.18　$h-S$ 图上的瑞利线

下面我们讨论瑞利线的形状特点，为此先写出等截面一维定常换热管流的连续方程、动量方程与完全气体状态方程的微分形式为[4,5,6]

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dV}{V}=0 \tag{3-6-15}$$

$$dP+2\rho VdV+V^2d\rho=0 \tag{3-6-16}$$

$$\frac{dP}{P}-\frac{d\rho}{\rho}-\frac{dT}{T}=0 \tag{3-6-17}$$

显然由前面两个式子消去 dV 项后便得到

$$dP - V^2 d\rho = 0 \tag{3-6-18}$$

由上面三式中消去 dV 项与 $d\rho$ 项后得到

$$\left(1-\frac{P}{\rho V^2}\right)\frac{dP}{P}=\frac{dT}{T}=\left(1-\frac{1}{\gamma M^2}\right)\frac{dP}{P} \tag{3-6-19}$$

由式（1-5-44a）并注意应用式（3-6-17）得到

$$\frac{ds}{R}=\frac{c_v}{R}\frac{dT}{T}-\frac{d\rho}{\rho}=\left(\frac{c_v}{R}+1\right)\frac{dT}{T}-\frac{dP}{P} \tag{3-6-20}$$

由式（3-6-20）与式（3-6-19）中消去 dP 项后得

$$\frac{ds}{R}=\frac{\gamma(M^2-1)}{(\gamma-1)(\gamma M^2-1)}\frac{dT}{T}=\frac{\gamma(M^2-1)}{(\gamma-1)(\gamma M^2-1)}\frac{dh}{h} \tag{3-6-21}$$

由式（3-6-21）可以看出：

（1）当 $M^2<1$ 并且 $\gamma M^2<1$ 时，ds 与 dh 同号，即瑞利曲线的斜率为正。

（2）当 $M^2<1$ 并且 $\gamma M^2<1$ 时，ds 与 dh 异号，即瑞利曲线的斜率为负。

（3）如图 3.18 所示，B 点为瑞利线的最高点，该点处 $dh=0$，也即是说 B 点是 T/T_* 为最大值的点，因此常称为最大温度点；显然，要确定该点的马赫数 M，只要把 T/T_* 对 M 求导数并令其导数值为零，于是借助于式（3-6-11）便得到 B 点的 $M=1/\sqrt{\gamma}$；另外，B 点上 T/T_* 的值（也就是 $(T/T_*)_{max}$ 值）可以由式（3-6-11）算出，此时为

$$\left(\frac{T}{T_*}\right)_{B点}=\left(\frac{T}{T_*}\right)_{max}=\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma} \tag{3-6-21a}$$

（4）当 $M^2>1$ 并且 $\gamma M^2>1$ 时，则 ds 与 dh 同号，瑞利曲线的斜率为正。

（5）如图 3.18 所示，点 A 为最大熵值点，即该点处 $ds=0$；当然 A 点应该满足式（3-6-18），又 A 点处 $ds=0$，并注意到 $(\partial P/\partial\rho)_S=a^2$，于是推出 A 点的速度等于当地的声速，也就是说 A 点的马赫数 $M=1$。

（6）在 A 点上面的瑞利线分支对应于亚声速流动，而在 A 点下面的分支则对应于超声速流动。

3.6.2 加热对气流参数的影响

作为 §3.3 节的特殊情况，可直接得到等截面、无摩擦、一维、定常、加热管流的微分型基本方程组为



$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dV}{V}=0\\
&\frac{dP}{P}+\gamma M^2\frac{dV}{V}=0\\
&\frac{dT}{T}+(\gamma-1)M^2\frac{dV}{V}-\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{dT_0}{T_0}=0\\
&\frac{dP}{P}-\frac{d\rho}{\rho}-\frac{dT}{T}=0
\end{aligned}\right\}\tag{3-6-22}
$$

另外，从基本方程组又可导出各流动参数与加热过程的微分关系。由式（3−3−34）可以得到该情况下的表达式为

$$\frac{dP}{P}=-\frac{\gamma M^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{(1-M^2)}\frac{dT_0}{T_0}\tag{3-6-23}$$

$$\frac{dV}{V}=\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{(1-M^2)}\frac{dT_0}{T_0}\tag{3-6-24}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{(1-M^2)}\frac{dT_0}{T_0}\tag{3-6-25}$$

$$\frac{dT}{T}=\frac{(1-\gamma M^2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{(1-M^2)}\frac{dT_0}{T_0}\tag{3-6-26}$$

$$\frac{dM}{M}=\frac{(1+\gamma M^2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{2(1-M^2)}\frac{dT_0}{T_0}\tag{3-6-27}$$

$$\frac{dP_0}{P_0}=-\frac{\gamma M^2}{2}\frac{dT_0}{T_0}\tag{3-6-28}$$

$$\frac{dF}{F}=0\tag{3-6-29}$$

$$\frac{dS}{c_p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{dT_0}{T_0}\tag{3-6-30}$$

以上式中，$dT_0>0$ 表示加热；$dT_0<0$ 表示冷却。

对每个参数来说，加热或冷却时对该参数的影响是相反的。另外，从上述八个式子可以

发现以下几点变化规律：

（1）亚声速加热 ($M<1, \mathrm{d}T_0>0$) 使速度增加，超声速加热 ($M>1, \mathrm{d}T_0>0$) 使速度减小；冷却的影响 ($\mathrm{d}T_0<0$) 与此相反。由此可知：不管是加热或是冷却，亚声速流和超声速流的速度变化趋势是相反的。因此要使亚声速流加速到超声速流，单纯的加热是不可能实现的。

（2）不论是亚声速加热或超声速加热，气流的总压 P_0 总是下降的。

（3）静温 T 的变化趋势不仅与亚声速加热或超声速加热的情况有关，而且在亚声速加热时还与 M 数的大小有关。从式（3－6－26）很容易看到，当 $M=1/\sqrt{\gamma}(<1)$ 时，温度达到最大值。也就是说，在亚声速流加热过程中，静温会出现最大值；当 $M<1/\sqrt{\gamma}$ 时，加热使静温 T 上升；而当 $M>1/\sqrt{\gamma}$ 时，加热则使静温 T 下降。这种现象从物理本质上来解释是这样的，在 $M>1/\sqrt{\gamma}$ 时，尽管气体受到加热，但是气体的动能增加很快，此时气体的静焓增加已抵不上气体的动能的增加，因此虽然加热，但是气流的静温 T 反而下降。

3.6.3 任意两个截面上气流参数间的关系式

假设在等截面的管道 Ⅰ－Ⅱ 段中进行着均匀的热交换，如图 3.19 所示。在这个管子上取任意两个截面 1 和 2，于是有式（3－6－6），式（3－6－9）与式（3－6－10）成立。如果引进气动函数，则前面三式又可分别写为

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{r(\lambda_2)}{r(\lambda_1)} \tag{3-6-31}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{z(\lambda_2)}{z(\lambda_1)} \tag{3-6-32}$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)}\right]^2\frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)} \tag{3-6-33}$$

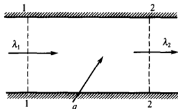


图 3.19 等截面加热管流

式中，$\tau(\lambda), z(\lambda), r(\lambda)$ 均是气动函数，其中 $\tau(\lambda)$ 为温度函数，由式（1－8－26）定义；$z(\lambda)$ 由式（1－8－36）定义；$r(\lambda)=\dfrac{\pi(\lambda)}{f(\lambda)}$，这里 $\pi(\lambda)$ 为压强函数，由式（1－8－27）定义；$f(\lambda)$ 为冲量函数，由式（1－8－37）定义；$r(\lambda)$ 也称为冲量函数。

另外，



$$\frac{P_{02}}{P_{01}}=\frac{P_{02}}{P_2}\frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_0}=\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3-6-34}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}}=\frac{T_{02}}{T_2}\frac{T_2}{T_1}\frac{T_1}{T_{01}}=\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2\left[\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right]^2\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \tag{3-6-35}$$

$$S_2-S_1=c_p\left[\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)-\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]=\frac{\gamma R}{\gamma-1}\ln\left[\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2\left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right] \tag{3-6-36}$$

假设在 1–2 段中加入的热量为 Δq

$$\Delta q=\left(h_2+\frac{V_2^2}{2}\right)-\left(h_1+\frac{V_1^2}{2}\right)=c_p(T_{02}-T_{01})=c_pT_{01}\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}-1\right) \tag{3-6-37}$$

于是有

$$\frac{\Delta q}{c_pT_{01}}=\frac{M_2^2}{M_1^2}\left[\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right]^2\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right]-1 \tag{3-6-38}$$

同样的，引进气动函数后则式（3−6−24）与式（3−6−25）分别变为：

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}=\frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} \tag{3-6-39}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}}=\left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)}\right]^2 \tag{3-6-40}$$

作为特例，如果第 2 个截面为临界截面，而第 1 个截面任意，则利用上面给出的两个截面上气流参数间的关系式便可以得到任意截面与临界截面上气流参数间的关系，例如

$$\frac{P}{P_*}=\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \tag{3-6-41}$$

$$\frac{\rho}{\rho_*}=\frac{1+\gamma M^2}{(1+\gamma)M^2} \tag{3-6-42}$$

作为课后作业，请读者自行推导出 $\frac{V}{V_*},\frac{T}{T_*},\frac{P_0}{P_{0*}},\frac{T_0}{T_{0*}}$ 的具体表达式。另外，上述算式都已制成详细的数值表并附于书后（见附表 6）。

最后，我们来推导等截面加热一维定常无摩擦管流的 $R-H$ 关系式。考虑到一维定常流，因此从基本方程出发，将连续方程、动量方程和能量方程用于图 3.19 的截面 1 和 2 便得到

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \equiv b \tag{3-6-43}$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \tag{3-6-44}$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \Delta q = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{3-6-45}$$

由式（3-6-41）与式（3-6-42），得

$$P_2 - P_1 = \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = b^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

由式（3-6-41）和式（3-6-43）得

$$h_2 - h_1 = \Delta q + \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) = \Delta q + \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}\right)$$

于是合并两式得到

$$h_2 - h_1 = \Delta q + \frac{1}{2}(P_2 - P_1)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

又对于量热完全气体，有

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{2}\left[(P_2 - P_1)(\rho_1 + \rho_2) - (P_2 + P_1)(\rho_2 - \rho_1)\right] \end{aligned}$$

把上式代入前式，整理后得到

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1} - \dfrac{\rho_1}{\rho_2} + \dfrac{2\gamma}{\gamma-1}\dfrac{\Delta q}{c_p T_1}}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{\rho_1}{\rho_2} - 1} \tag{3-6-46}$$

这就是等截面加热一维定常无摩擦管流的 $R-H$ 关系。当 $\Delta q = 0$ 时，就是激波的 $R-H$ 关系式。

3.6.4 最大加热量及热壅塞现象

如果令 Δq 为给定的 1 截面与 2 截面之间气体与外界的传热量。式（3-6-38）给出了



两个截面间马赫数与 Δq 间的关系。显然将式（3−6−38）对 M_2 求导数并令其为 0，即令

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\Delta q}{c_p T_{01}}\right)}{\mathrm{d}M_2}=0 \tag{3-6-47}$$

可得到

$$M_2=1$$

因此把 $M_2=1$ 代入到式（3−6−38），便得到 $(\Delta q)_{\max}$ 为

$$\frac{(\Delta q)_{\max}}{c_p T_{01}}=\left[\frac{1+\gamma M_1^2}{(1+\gamma)M_1}\right]^2\left[\frac{1+\gamma}{2+(\gamma-1)M_1^2}\right]-1 \tag{3-6-48}$$

如果实际加热量 Δq 大于最大加热量 $(\Delta q)_{\max}$ 时，则管道中的流动将会发生热壅塞现象。对于亚声速加热管流，如果实际的加热量比 $(\Delta q)_{\max}$ 大时，则必然引起流动状态的重新调整使加热前的 M_1 降低成 M_1'，与此同时进入管中的流量也减小了。也就是说在这种情况下，进口马赫数一直减小到足以使所加的热量能够实现为止，并且这时气流出口的马赫数为 1；对于超声速气流，壅塞所引起压强升高的扰动将在气流中形成激波，激波使总压损失更大，如果这时进口流量不减小则这时管内壅塞更严重，所以激波必然会被推往进口，使进口气流的马赫数改变以适应于流量的要求。因此超声速加热管流发生壅塞时激波不可能停留在管内，必然位于进口之前产生激波并发生溢流（见图 3.20），在这一点上它与摩擦管流不同。综上所述，对于给定的进口马赫数，存在着一个最大加热量（即临界加热量）。换句话说，对于给定的总温和加热量，如果气流在进口为亚声速时则存在着一个进口马赫数的最大值；如果气流在进口为超声速时则存在着一个进口马赫数的最小值；这是由于在等截面管流中，加热使亚声速气流加速，但这时气流的速度最大只能达到声速；另外，加热使超声速气流减速，但这时气流的速度最小也只能达到声速的结果。

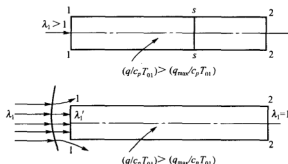


图 3.20　进口之前产生激波并发生溢流

例 11 如图 3.19 所示，给定M_1,P_1,T_1,c_p,γ以及Δq，试给出计算M_2,T_2,P_2及T_{02},P_{02}的步骤与方法。

解 （1）由（3－6－48）式计算$(\Delta q)_{\max}$，判断$\Delta q>(\Delta q)_{\max}$或$\Delta q<(\Delta q)_{\max}$

（a）如果$\Delta q>(\Delta q)_{\max}$，则发生加热壅塞，这时可降低$M_1$使进口流量下降。

（b）如果$\Delta q=(\Delta q)_{\max}$，则$M_2=1,P_2=P_*,T_2=T_*$等，其参数可由式（3－6－41）、式（3－6－42）等得到。

（c）如果$\Delta q<(\Delta q)_{\max}$，则$M_2<1$；由$\Delta q$，$T_{01}$及式（3－6－37）去计算$T_{02}$；再由式（3－6－35）并注意将$M_1$取为 1，$T_{01}$变为$T_{0*}$，计算出$M_2$值；然后由式（3－6－41）计算出$P_2$。

（2）关于压力的匹配条件

（a）如果$\Delta q=(\Delta q)_{\max}$，则这时$M_2=1$，并且应有$P_2\geqslant P_b$，这里$P_b$是管口外背压。如果$P_2<P_b$值，则可能有两种情况：要么是给定的$M_1$值不合理，要么是所给定的$P_1$值不匹配。

（b）如果$\Delta q<(\Delta q)_{\max}$时，则必定有$P_2=P_b$；如果这时$P_2<P_b$或者这时$P_2>P_b$都应该调整$M_1$或者$P_1$值。

应该指出，如果给定P_1（或者P_{01}），P_b与Δq时，则加热前后气流的马赫数是不能事先给定的。M_1与M_2应该根据加热量Δq及压力匹配条件去作计算。另外，也可不用式（3－6－41）、式（3－6－42）作计算，可以直接去查书后附录表 6，也能得到相应的数据。

例 12 由亚声速扩压器流入冲压发动机燃烧室里的空气，其$P_1=0.551\ 6\times10^5\ \text{N/m}^2$，$V_1=73.15\ \text{m/s}$，$T_1=333.3\ \text{K}$；在燃烧室进口均匀地向空气中喷入燃料，其燃烧值$\Delta H_c=41\ 867\ \text{kJ/kg}$，燃料与空气的质量流量比为 1/29；如果不计摩擦，假定燃烧室截面不变，并且令$\gamma=1.4$，$R=287.04\ \text{J/kg}\cdot\text{K}$以及$c_p=1\ 004.8\ \text{J/kg}\cdot\text{K}$，试计算：

（a）燃烧后气流的滞止温度T_{02}；（b）M_2,T_2,P_2以及V_2值；（c）总压降ΔP_0与增加的熵值ΔS。

解 先计算声速a_1，马赫数M_1，即

$$a_1=\sqrt{\gamma RT_1}=366\ \text{m/s},\quad M_1=V_1/a_1=73.15/366=0.2$$

查附表 6 得

$$T_1/T_*=0.206\ 61,\quad P_1/P_*=2.272\ 2,\quad V_1/V_*=0.090\ 91,\quad T_{01}/T_{0*}=0.173\ 55$$

并由计算得

$$T_{01}/T_1=1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2=1.008,\quad T_{01}=1.008\times333.3=336\ \text{K},$$

$$P_{01}/P_1=(T_{01}/T_1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=1.028,\quad P_{01}=(P_{01}/P_1)P_1=0.567\times10^5\ \text{N/m}^2$$

计算出单位质量流体的加热量，即 $\Delta q=\dfrac{41\ 867}{1+29}=1\ 395.5\ \text{kJ/kg}$。



最大加热量 $(\Delta q)_{max}=c_pT_{01}\left(\dfrac{T_{0*}}{T_{01}}-1\right)=1\ 607.7\ \text{kJ/kg}$ 。

显然 $\Delta q<(\Delta q)_{max}$

（a）

$$T_{02}=T_{01}+\Delta q/c_p=336+1\ 395.5/1.004\ 8=1\ 724.8\ \text{K}$$

（b）

$$\frac{T_{02}}{T_{0*}}=\frac{T_{02}}{T_{01}}\frac{T_{01}}{T_{0*}}=\frac{1\ 724.8}{336}\times0.173\ 55=0.890\ 9$$

查表得 $M_2=0.68$，另外

$$T_2=\frac{T_2}{T_*}\frac{T_*}{T_1}T_1=\frac{0.981\ 4}{0.206\ 6}\times333.3=1\ 583.2\ \text{K}$$

$$P_2=\frac{P_2}{P_*}\frac{P_*}{P_1}P_1=0.353\ 7\times10^5\ \ \text{N/m}^2$$

$$V_2=\frac{V_2}{V_*}\frac{V_*}{V_1}V_1=542.1\ \text{m/s}$$

（c）

$$P_{02}=P_2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0.482\times10^5\ \ \text{N/m}^2$$

$$\Delta P_0=P_{01}-P_{02}=0.085\times10^5\ \ \text{N/m}^2$$

$$\Delta S=c_p\ln\frac{T_2}{T_1}-R\ln\frac{P_2}{P_1}=1\ 685.1\ \text{J/kg}\cdot\text{K}$$

例 13　有一个等截面直管通过一个收缩喷管与高压容器相连。容器内空气的压力与温度分别为 $7\times10^5\ \ \text{N/m}^2$ 与 277 K；通过等截面直管，空气被加热，$\Delta q=2.32\times10^5\ \text{J/kg}$，直管出口背压 $P_b=2.8\times10^5\ \ \text{N/m}^2$；假定收缩喷管的流动为等熵，等截面直管直径 $d=0.05\ \text{m}$，试确定此时直管出口是否发生热壅塞？

解　在加热量 Δq 已知的情况下，直管进口与出口的马赫数都需要通过计算确定。先分析一下背压 P_b 对管内流动的影响：

① 当背压较高时，管内包括出口都为亚声速流动；② 当背压 P_b 逐渐减小，则出口速度逐渐增大；当出口截面达到临界状态时，将这时的背压记作 $(P_b)_c$，此时 $T_{02}=T_{0*}$，$M_2=1$；③ 当背压继续降低（即低于 $(P_b)_c$）时，虽然出口截面仍为临界状态，但出口之外气流仍会继续膨胀。

下面计算 $(P_b)_c$ 值，此时 $T_{02}=T_{0*}$，$M_2=1$，由式（3－6－37）得

$$\frac{T_{01}}{T_{0*}}=\frac{c_pT_{01}}{\Delta q+c_pT_{01}}=\frac{1.004\times2.77\times10^5}{2.32\times10^5+1.004\times2.77\times10^5}=0.545\ 2$$

查表得 $M_1 = 0.41$，同时查表可以得到

$$\frac{P_1}{P_*} = \frac{P_1}{(P_b)_c} = 1.942\ 8$$

又由等熵关系

$$P_1 = P_{01}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 6.235\times10^5\ \text{N/m}^2$$

故
$$(P_b)_c = \frac{P_1}{1.942\ 8} = 3.21\times10^5\ \text{N/m}^2$$

显然这时 $(P_b)_c > P_b$，表明直管出口已发生热壅塞。

3.6.5 凝结突跃现象

凝结突跃属于换热管流的一种类型，是由于气流所含的水汽凝结时要放出潜热，加热气体。气体沿着超声速风洞的拉伐尔喷管流动时，随着气流马赫数的增大，气流静温迅速下降。例如，风洞中气体直接来自大气，若气流总温为 300 K 时，那么在 $M = 2$ 的喷管截面上，气流温度只有 167 K，即零下 106 ℃。若空气中含有水分，那么这个温度可能低于水蒸气的凝结温度。根据实验观察，刚低于凝结温度不多时，无明显的凝结现象，即可以允许有一定的过冷度。过冷度在 50 ℃左右会出现显著的凝结现象，一旦过冷到出现凝结时，凝结过程便进行得十分迅速，过程所占的距离很小，几乎是集中在一个截面上完成的。水蒸气凝结时放出潜热，这部分热量突然加入超声速气流中，使超声速气流速度突然下降，密度、压强、总温突然上升，总压突然下降，这种现象称之为凝结突跃，它可以用光学仪器观察或摄影[5,7]。从照片上看，凝结突跃的形状很像普通的正激波，然而二者有本质的不同。气流通过正激波时总温没有变化，激波强度由波前 M 数决定，激波之后的气流是亚声速的。但是，凝结突跃，使气流总温升高，突跃的强度取决于加热量，突跃变化后的气流，可能仍是超声速流。从一些实验照片来看，虽然凝结突跃的波面与气流方向接近于垂直，但是，其后的气流仍是超声速的，因为在凝结突跃的下游还可以发现有正激波。

超声速风洞中的凝结突跃现象是影响风洞正常工作的一个严重问题，因为空气中所含的过饱和水蒸气突然凝结时，不但改变了预计的气流马赫数和压强，而且引起喷管出口处气流速度场的不均匀。为了避免在风洞中出现凝结突跃的现象，通常采用特殊的干燥设备，把进入风洞空气中的水分减少到万分之五以下，这样即使发生凝结，放出的热量也不多，气流不致受到很大的影响。



§3.7　变流量管流

在实际工程中，有许多问题是各截面上流量不同的流动。例如，在蒸发式冷却中，冷却气体通过多孔壁不断加入到主流中；在跨声速风洞中通过改变喷管中的流量来获得超声速气流；在火箭发动机上[8,9]，固体空心药柱燃烧时，燃气不断增多等等，都是变流量的情况，本节仅讨论简单添质管流。所谓简单添质管流是基于如下的简化：

（1）在流动中只考虑一个制约因素——添质作用，即只研究等截面、无摩擦、无加热、无化学反应的一维定常添质管流。

（2）添质流和主流同属一种气体，而且它们的热力学特性彼此相等。例如 $R_i=R$，$c_{pi}=c_p$，$h_i=h$，等。另外，还假定彼此总焓相等，即 $h_{0i}=h_0, T_{0i}=T_0$。上述各个量中，有下脚标"i"的是指添质流，不写"i"的是指主流。此外，还假定添质流进入主流后，这个热力学系统是一个处于平衡态的均匀系统。

（3）我们这里只研究添质流与主流垂直时的特殊情况。

3.7.1　流量变化对主流参数的影响

作为 § 3.3 节的特殊情况，可直接得到简单添质管流微分形式的基本方程组，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}-\frac{\mathrm{d}V}{V}=0\\&\frac{\mathrm{d}P}{P}+\gamma M^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}\right)=0\\&\frac{\mathrm{d}T}{T}+(\gamma-1)M^2\frac{\mathrm{d}V}{V}=0\\&\frac{\mathrm{d}P}{P}-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}-\frac{\mathrm{d}T}{T}=0\end{aligned}\right\}\tag{3-7-1}$$

借助于（3－3－34）式可以得到该情况下的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=-\frac{2\gamma M^2\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{(1-M^2)}\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}\tag{3-7-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{1+\gamma M^2}{(1-M^2)}\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}\tag{3-7-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{(\gamma+1)M^2}{(1-M^2)}\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}\tag{3-7-4}$$

$$\frac{dT}{T}=-\frac{(\gamma-1)M^2(1+\gamma M^2)}{(1-M^2)}\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-7-5}$$

$$\frac{dM}{M}=\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)(1+\gamma M^2)}{(1-M^2)}\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-7-6}$$

$$\frac{dP_0}{P_0}=-\gamma M^2\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-7-7}$$

$$\frac{dF}{F}=0 \tag{3-7-8}$$

$$\frac{dS}{c_p}=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dP_0}{P_0}=(\gamma-1)M^2\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3-7-9}$$

由上面的 8 个微分关系式，读者可以自行分析各个参数沿流向的变化，这里不再详述。下面仅说明两点：

（1）对亚声速流，添质使速度增加；对超声速流，添质使速度减小。因此依靠单纯的添质，不可能使亚声速流加速到超声速流。这个规律也是引起添质壅塞的原因。

（2）添质使气流的总压下降。

3.7.2 任意截面上的气流参数与临界截面间的关系式

直接积分式（3-7-6）得

$$\int_{\dot{m}}^{\dot{m}_*}\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}=\int_{M}^{1}\frac{(1-M^2)}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)(1+\gamma M^2)}\frac{dM}{M}$$

式中，取 $M=1$ 的临界截面作为参考状态，由任一个截面的 M 数积分到临界截面，由此积分出

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_*}=\frac{\rho V}{\rho_* V_*}=\frac{M\left[2(\gamma+1)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{1/2}}{1+\gamma M^2} \tag{3-7-10}$$

另外，由于

$$\frac{T}{T_*}=\frac{T/T_0}{T_*/T_0}=\frac{\gamma+1}{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} \tag{3-7-11}$$



$$\frac{V}{V_*}=M\left(\frac{T}{T_*}\right)^{1/2}=M\left[\frac{\gamma+1}{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\right]^{1/2} \tag{3-7-12}$$

并注意到 $\dot{m}=\rho VA=(PVA)/(RT)$，于是有

$$\frac{P}{P_*}=\frac{\dot{m}}{\dot{m}_*}\frac{T}{T_*}\frac{V_*}{V}=\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \tag{3-7-13}$$

$$\frac{\rho}{\rho_*}=\frac{P}{P_*}\frac{T_*}{T}=\frac{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1+\gamma M^2} \tag{3-7-14}$$

$$\frac{P_0}{P_{0*}}=\frac{P_0}{P}\frac{P_*}{P_{0*}}\frac{P}{P_*}=\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3-7-15}$$

直接积分式（3−7−9）得

$$S-S_*=-R\ln\frac{P_0}{P_{0*}} \tag{3-7-16}$$

上面的几个关系式已制成数值表（见书后附表 7（a）与（b）），可供计算时查用。

3.7.3　应用实例（固体推进剂火箭发动机）

图 3.21（a）是固体推进剂火箭发动机的示意图。火药柱内孔的截面积为 A 并令孔道直径为 d，它是燃气流向推力喷管所经过的面积，这个面积沿轴向做成等截面。但在火药柱燃烧时，由于燃烧是垂直于孔壁进行的，所以面积 A 并不保持不变。不过，火药柱燃烧的速度一般很小（大约 0.001～0.5m/s），而燃气速度一般为每秒几百米。因此，计算中可以不考虑由于面积变化所引起的非定常影响而认为流动是准定常的。实验指出，燃烧速度 V_b 取决于推进剂的成份、推进剂温度、作用于燃烧区上的压强 P 以及主核心流的速度 V，其经验公式为

$$V_b=(1+\alpha V)cP^n \tag{3-7-17}$$

式中，α为烧蚀系数，n为压强指数，c为反应推进剂温度效应的系数，对于每种推进剂 α,c,n 均由实验确定。

图 3.21（b）是固体推进剂燃烧表面的微元段 dx，燃烧在靠近表面非常薄的燃烧区内进行，燃气放出时没有轴向速度。气流的总焓是由燃烧过程中释放出来的化学能所决定。如果推进剂的组成是均匀的，那么所有的燃气便有相同的化学能，所以流路中总焓处处都为常数。由图 3.21 可知，添加的流量为 $d\dot{m}=\rho_p V_b dS$，式中 ρ_p 为固体推进剂的密度，dS 为燃烧表面的微元面积，$dS=c_w dx$，式中 c_w 为流路湿润周长。于是添加的流量为

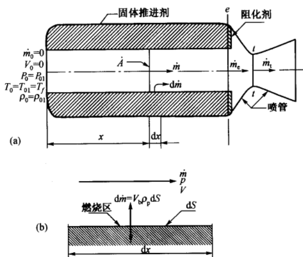


图 3.21　固体推进剂火箭发动机示意图及燃烧表面的微元段

（a）发动机示意图；（b）燃烧表面的微元段

$$d\dot{m} = (1+\alpha V)cP^n \rho_P c_W dx \tag{3-7-18}$$

显然，$d\dot{m}$ 与燃气速度 V 以及压强 P 有关，而 V、P 又与添加的流量有关，这里不妨给出一个例题加以说明。

例 14　已知孔道直径 $d=0.025$ m，燃烧速度 $V_b=0.025$ m/s，推进剂密度 $\rho_P=2\ 500$ kg/m^3，燃气比热比 $\gamma=1.2$，气态常数 $R=320$ J/kg·K，火焰温度 $T_f=3\ 000$ K，药柱长 $L=0.30$ m，推力喷管喉部面积 $A_t=0.000\ 3$ m^2，假定气流流动是准定常的，且在喷管内的流动是等熵的，并假设药柱进口截面与药柱出口截面的下注脚分别用“1”与“e”表示，试计算：（1）推进剂的燃气流量 $\dot{m}_e$；（2）喷管进口气流马赫数 M_e 和总压 P_{0e}；（3）药柱进口截面的总压 P_{01}；（4）药柱进口截面的密度 ρ_1；（5）最大流量 $\dot{m}_*$；（6）药柱进口与出口截面的静压差 ΔP。

解　首先分析一般情况下药柱燃烧产生 $\dot{m}$ 的计算过程。根据前面分析时给出的流道中总焓处处都为常数的假设，因此燃气的总温则等于燃气的火焰温度，即 $T_0=T_f$；因药柱进口端 $M_1=0$，因此进口端静压强与静温度值也就是相应的进口总压与进口总温值；下面我们首先确定临界截面上的参数，在临界截面上马赫数 $M_*=1$；为此将“1”截面与临界截面上的总压值用于式（3-7-15），可得到

$$\frac{P_{0*}}{P_{01}} = \left(\frac{1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



首先假定药柱进口端的压强为 P_1，于是由上式便得到相应的临界总压值；而临界截面上的静温 T_* 为

$$\frac{T_*}{T_{01}}=\frac{2}{\gamma+1}$$

临界速度 $V_*=a_*=\left(\gamma RT_*\right)^{1/2}$；另外，将"1"截面与临界截面上的静密度用于式（3－7－14），得 $\rho_1/\rho_*=2$。于是在假定 P_1 值后，借用于 $T_{01}=T_f$ 以及状态方程 $\rho_1=P_1/RT_1$，则临界截面上的 V_* 与 ρ_* 均可以相应地确定下来，因此临界截面上的流量 $\dot{m}_*=\rho_*V_*A$ 也就相应地得到了。在假定的 P_1 下得到了相应的临界截面参数；如果再给定一个 $\dot{m}$ 值，则由式（3－7－10）便可得到相对应于 $\dot{m}$ 下的马赫数（不妨记为 M'），于是由 M' 以及式（3－7－12）与式（3－7－13）便可得到对应于 M' 下的速度 V 与压强 P 值；有了 M' 下的 V 与 P 便可积分式（3－7－18），即

$$\dot{m}=\int_0^{\dot{m}}\mathrm{d}\dot{m}=c_{\mathrm{W}}\rho_{\mathrm{P}}c\int_0^x(1+\alpha V)P^n\mathrm{d}x \tag{3-7-19}$$

显然式（3－7－19）的积分要借助于数值积分方法才能完成，因为 $V=V(x)$，$P=P(x)$，而且 $M'=M'(x)$ 即它们都是 x 的函数。如果这时由式（3－7－19）新求出的 $\dot{m}$ 与上面给定的 $\dot{m}$ 之差不在允许的误差范围内，则可再重新假定 P_1 值重复上述计算，直到满足要求为止。这里需要指出的是：如果式（3－7－19）的积分是从药柱进口 $x=0$ 截面积分到药柱出口 $x=L$ 截面时，则药柱燃烧所产生的燃气总流量 $\dot{m}_e$ 就可以知道了，M_e 也就确定了；另一方面，借助于式（3－7－15）药柱出口截面上的总压 P_{0e} 也就知道了。对于定常流动，燃气流量 $\dot{m}_e$ 必须等于喷管喉部流过的流量 $\dot{m}_t$，假设喷管内为等熵流动并假定喉部为临界截面时则由式（3－4－10）$\dot{m}_t$ 才可以表示为

$$\dot{m}_t=K\frac{P_{0e}}{\sqrt{T_0}}A_t$$

因此我们需要比较 $\dot{m}_e$ 与 $\dot{m}_t$ 的差别。如果两者的差别不在允许的误差范围内，则需要再次假设 P_1 值重复上述计算直到满足允许误差为止。只有在特殊情况下，烧蚀系数 α 才等于零。如果燃烧速度与压强无关（即 $n=0$），那么由式（3－7－17）则 $V_b=c$，于是式（3－7－19）被简化为

$$\dot{m}=c_{\mathrm{W}}\rho_{\mathrm{P}}V_b x \tag{3-7-20}$$

下面开始进行本例题的各步计算：

（1）由式（3－7－20），于是

$$\dot{m}_e=V_b\rho_{\mathrm{P}}c_{\mathrm{W}}x_e=V_b\rho_{\mathrm{P}}\left(\pi d\right)L=1.473\ \mathrm{kg/s}$$

（2）$q(\lambda_e)=\dfrac{A_t}{A_e}=\dfrac{1}{1.636\ 2}$，查气动函数表得 $M_e=0.393\ 8$

$$P_{0e} = \frac{\dot{m}_e \sqrt{T_0}}{KA_t} = \frac{1.473 \times \sqrt{3\ 000}}{0.036\ 2 \times 0.000\ 3} = 74.29 \times 10^5 \text{ Pa}$$

（3）将 $M_e = 0.393\ 8$，$\gamma = 1.2$ 代入到式（3－7－15）得到

$$\frac{P_{0e}}{P_{0*}} = 1.148\ 3$$

于是
$$P_{0*} = \frac{74.29 \times 10^5}{1.148\ 3} = 64.69 \times 10^5 \text{ Pa}$$

（4）将 $M_1 = 0$ 以及 $\gamma = 1.2$ 代入到式（3－7－15）得

$$\frac{P_{01}}{P_{0*}} = 1.241\ 8$$

因此
$$P_{01} = 1.241\ 8 \times 64.69 \times 10^5 = 80.33 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho_1 = \rho_{01} = \frac{P_{01}}{RT_{01}} = \frac{P_{01}}{RT_f} = \frac{80.33 \times 10^5}{320 \times 3\ 000} = 8.36 \text{ kg/m}^3$$

（5）将 $M_e = 0.3938$ 代入到式（3－7－10）得到

$$\frac{\dot{m}_e}{\dot{m}_*} = 0.701\ 8$$

于是
$$\dot{m}_* = \frac{1.473}{0.701\ 8} = 2.1 \text{ kg/s}$$

（6）由 $M_e = 0.3938$ 查等熵表得到 $\frac{P_e}{P_{0e}} = 0.911\ 8$，于是

$$P_e = P_{0e} \times 0.911\ 8 = 67.74 \times 10^5 \text{ Pa}$$

因此
$$\Delta P = P_1 - P_e = P_{01} - P_e = (80.33 - 67.74) \times 10^5 = 12.59 \times 10^5 \text{ Pa}。$$

§ 3.8* 变比热容气动函数及其应用

前面所讨论的都是定比热容问题。随着喷气发动机工质温度的提高和计算机的广泛使用，考虑变比热容不但是必要的，而且是可能的[10～12]。首先引进气动系数 β_i 与 α_i 的概念。对于任意一个气流参数 y，如果它可以用 β_i 与 M 或者 α_i 与 λ 来表示时，则称 β_i 与 α_i 为气动系数。通常，气动系数的选择遵循下面两大原则：一是形式尽可能简单，而且它本身的确定也尽可能的简单；二是气动系数随气流温度的变化应尽可能缓慢。在目前变比热计算中，常选用了两种最基本的气动系数：一个是 β 系数，它常用于以马赫数 M 为自变量的气动函数；



另一个是 α 系数，它常用于以速度系数 λ 为自变量的气动函数。以下简介这两类变比热气动函数的表示法以及工程应用。

3.8.1　用 M 数表示的变比热气动函数

一、三个基本系数 β_a, β_h 与 β_S 的定义

这三个系数的定义是

$$\beta_a \equiv \frac{a}{\sqrt{T}} \tag{3-8-1}$$

$$\beta_h \equiv \frac{\gamma R}{2}\frac{T_0 - T}{h_0 - h} \tag{3-8-2}$$

$$\beta_S \equiv \frac{R\ln\dfrac{T_0}{T}}{\xi_0 - \xi} \tag{3-8-3}$$

式中

$$\xi = \int_0^T \frac{c_p \mathrm{d}T}{T} \tag{3-8-4}$$

其实，气动系数 β_a 来源于声速方程 $a = \beta_a\sqrt{T}$； β_h 来源于焓的方程 $\frac{T_0}{T} = 1 + \beta_h M^2$； β_S 来源于熵的方程 $\frac{T_0}{T} = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\beta_S}$ 。因此

$$\beta_S = \left[\ln\left(\frac{T_0}{T}\right)\right] \Big/ \left[\ln\left(\frac{P_0}{P}\right)\right] \tag{3-8-5}$$

注意到 $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}h - \frac{\mathrm{d}P}{\rho}$ 以及式（3-8-4）于是有 $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\xi - R\frac{\mathrm{d}P}{P}$，由等熵条件 $\mathrm{d}S = 0$ 得，$\mathrm{d}\xi = R\frac{\mathrm{d}P}{P}$，将该式积分便得到

$$\xi_0 - \xi = R\ln\frac{P_0}{P} \tag{3-8-6}$$

显然将式（3-8-6）代入到式（3-8-5）中便得到式（3-8-3），也就是说式（3-8-5）与式（3-8-3）是等价的。

二、用 M 数表示的变比热气动函数

1. $\tau(M)$ 函数

对于定比热问题，$\tau(M)$ 函数已由式（1-8-6）给出。对于变比热问题，由绝能流的能量方程

$$h_0 - h = V^2/2$$

令
$$h_0 - h = c_{pm}(T_0 - T)$$

这里 c_{pm} 为温度由 T 变化到 T_0 时的平均定压比热，即

$$c_{pm} = \frac{h_0 - h}{T_0 - T} = \frac{\int_T^{T_0} c_p \mathrm{d}T}{T_0 - T} \tag{3-8-7}$$

因此有
$$c_{pm}(T_0 - T) = \frac{V^2}{2}$$

于是有
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{2c_{pm}}\frac{V^2}{T} = 1 + \frac{\gamma R}{2c_{pm}}\frac{V^2}{\gamma RT} = 1 + \beta_h M^2 \tag{3-8-8}$$

这里
$$\beta_h = \frac{\gamma R}{2c_{pm}} = \frac{\gamma R}{2}\frac{T_0 - T}{h_0 - h} \tag{3-8-9}$$

注意式中的 γ 是对应于静温 T 时的比热比。因此

$$\tau(M) \equiv \frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \beta_h M^2} \tag{3-8-10}$$

2. $\pi(M)$ 函数

对于定比热问题，$\pi(M)$ 函数已由式（1-8-7）给出。对于变比热容问题，由等熵方程的平均比热比 γ_S 定义，即

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma_S}$$

于是有
$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma_S}{\gamma_S - 1}} = [\tau(M)]^{-\frac{\gamma_S}{\gamma_S - 1}} = [\tau(M)]^{-\frac{1}{\beta_S}} = [\pi(M)]^{-1} \tag{3-8-11}$$

式中
$$\beta_S = \frac{\gamma_S - 1}{\gamma_S} \tag{3-8-12}$$

即
$$\pi(M) = \left(\frac{1}{1 + \beta_h M^2}\right)^{\frac{1}{\beta_S}} = \frac{P}{P_0} = [\tau(M)]^{\frac{1}{\beta_S}} \tag{3-8-13}$$

3. 流量函数 $q(M)$, $y(M)$

对于定比热问题，$q(M)$ 的定义已由式（1-8-33）给出；然而对于变比热容问题，这



时所谓的 $q(M)$ 函数虽然也是个量纲为 1 的量，却不再具有与原定比热时相同的定义，它是通过下面的办法直接给予规定的：通过 A 截面的流量 $\dot{m}=\rho VA=\rho aMA$

注意到 $\rho=P/(RT)$，$a=\beta_a\sqrt{T}$，$T=T_0\tau(M),P=P_0\pi(M)$，并注意到 $\beta_a=\sqrt{\gamma R}$ 以及 $\beta_\gamma=\sqrt{\gamma}$，于是上式变为

$$\dot{m}=\frac{P_0A}{\sqrt{RT_0}}\left\{M\beta_\gamma\left[\tau(M)\right]^{\frac{1}{\beta_S}-\frac{1}{2}}\right\}\tag{3-8-14}$$

定义上式等号右边大括号中的项为变比热时的 $q(M)$ 函数，显然这时它也是一个量纲为 1 的量，于是变比热容时

$$\dot{m}=\frac{P_0A}{\sqrt{RT_0}}q(M)\tag{3-8-15}$$

而定比热容时，$\dot{m}$ 为

$$\dot{m}=\frac{P_0A}{\sqrt{RT_0}}K'q(M)\tag{3-8-16}$$

这里

$$K'=\left[\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]^{\frac{1}{2}}=K\sqrt{R}\tag{3-8-17}$$

式中，K 由式（3－4－11）定义。

因此，式（3－8－15）中的 $q(M)$ 与定比热容时式（3－8－16）中的 $q(M)$ 并不相等，但两者都是量纲为 1 量。在变比热容时 $y(M)$ 与 $q(M)$ 的关系为

$$y(M)=\frac{q(M)}{\pi(M)}=\frac{\beta_\gamma M}{\sqrt{\tau(M)}}\tag{3-8-18}$$

$$\beta_\gamma=\sqrt{\gamma}\tag{3-8-19}$$

4. 冲量函数 $z(M)$ 与 $f(M)$

冲量的定义为　　$(P+\rho V^2)A=PA+\dot{m}V=\dot{m}a\left(M+\frac{1}{\gamma M}\right)$

考虑到 $a=\sqrt{\gamma RT}$ 以及式（3－8－10），则上式可写为

$$(P+\rho V^2)A=\dot{m}\sqrt{RT_0}\left(\beta_\gamma M+\frac{1}{\beta_\gamma M}\right)\sqrt{\tau(M)}=\dot{m}\sqrt{RT_0}\,z(M)\tag{3-8-20}$$

式中
$$z(M)=\sqrt{\tau(M)}\left(\beta_\gamma M+\frac{1}{\beta_\gamma M}\right) \tag{3-8-21}$$

另外，冲量还可用 P_0 的形式即

$$(P+\rho V^2)A=\dot{m}a\left(M+\frac{1}{\gamma M}\right)=P_0Aq(M)z(M) \tag{3-8-22}$$

令
$$f(M)=q(M)z(M) \tag{3-8-23}$$

于是式（3－8－22）变为

$$(P+\rho V^2)A=P_0Af(M) \tag{3-8-24}$$

5. 声速方程 $a=\beta_a\sqrt{T}$

式中
$$\beta_a=\sqrt{\gamma R} \tag{3-8-25}$$

综上所述，β_a,β_S 与 β_h 仅是平均定压比热 c_{pm} 与平均比热比 γ_S 的函数，它们已分别由式（3－8－25）、式（3－8－12）与式（3－8－9）确定。另外，由于篇幅所限，用速度系数 λ 表示的变比热气动函数这里从略不作介绍。

3.8.2 变比热气动函数的应用

例 15 已知空气 $T_0=1\,400$ K，$\pi=0.528\,5$，试用变比热气动函数求静温 T 值。

解 假设 $T=1\,300$ K，则查空气热力性质表（例如文献[12，13]）有 $\xi_0=8.364\,36$，$\xi=8.275\,87$，代入到式（3－8－3）中得

$$\beta_S=\frac{0.287\,06\times\ln\dfrac{1\,400}{1\,300}}{8.364\,36-8.275\,87}=0.240\,4$$

借助于式（3－8－13）有

$$T=T_0\pi^{\beta_S}=1\,400\times0.528\,5^{0.240\,4}=1\,201.0\ \text{K}$$

然后再以新求出的 T 求计算 β_S

$$\beta_S=\frac{0.287\,06\times\ln\dfrac{1\,400}{1\,201}}{8.364\,36-8.275\,87}=0.241\,7$$

计算 T 值

$$T=1\,400\times0.528\,5^{0.241\,7}=1\,200\ \text{K}$$

比较新、旧算出的 T 值，在允许误差内，故 $T=1\,200$ K。



本题如果按 $\gamma=1.33$ 的定比热容计算，则计算出的静温 $T=1\,194$ K，它与变比热计算相比两者相差 6 K。应当指出：在航空涡轮喷气发动机性能计算时，变比热计算往往是不可忽略的。

利用变比热气动函数求解气体力学参数的一般步骤为：① 先选取 T_0 或 T 的初值；② 用热力学方法（或者查阅气动系数图线）确定有关的气动系数；③ 根据所得的气动系数以及其它已知条件，利用变比热气动函数解出待求的 T_0 或者 T 值；④ 利用新的 T_0 或 T 值重新计算，直到迭代过程满足所给定的允差精度。

参 考 文 献

1 吴仲华. 静止与运动坐标下的气动热力学基本方程——粘性力的作用与粘性项的物理意义. 机械工程学报，1965，13（4）：43～67

2 刘高联，王甲升. 叶轮机械气体动力学基础. 北京：机械工业出版社，1980

3 Shapiro A H. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. New York：The Ronald Press，1953

4 童秉纲，孔祥言，邓国华. 气体动力学. 北京：高等教育出版社，1990

5 潘锦珊. 气体动力学基础（修订版）. 西安：西北工业大学出版社，1995

6 时爱民，苏铭德，刘季稔. 气体动力学基础. 北京：科学出版社，1988

7 Thompson P A. Compressible fluid dynamics. New York：McGraw-Hill，1972

8 苗瑞生，居贤铭. 火箭气体动力学. 北京：国防工业出版社，1985

9 何洪庆，张振鹏. 固体火箭发动机气体动力学. 西安：西北工业大学出版社，1988

10 吴仲华. 燃气和空气的变比热超声速膨胀与压缩过程. 机械工程学报，1962，10（4）：1～44

11 崔济亚. 变比热气动函数式及计算的准确解和近似解. 工程热物理学报，1986，7（3）：201～205

12 吴仲华. 燃气的热力性质表（增订版）. 北京：科学出版社，1959

13 范作民，傅异权. 热力过程计算与燃气表. 北京：国防工业出版社，1987

习　题

1. 在叶轮机械气体动力学中，由于牵连运动是旋转运动，气体相对于转动的叶轮作相对运动，如图 3.4 所示，因此不可避免地要产生哥氏加速度。如果取旋转轴为 z 轴，转动角速度为等角速 ω，气流的相对速度为 $\boldsymbol{W}$，如果取固连在旋转叶轮上的相对圆柱坐标系 (r,φ,z)，试证明：

$$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}=2\left(W_r\boldsymbol{i}_\varphi-W_\varphi\boldsymbol{i}_r\right)\omega$$

这里 $\boldsymbol{W}=W_r\boldsymbol{i}_r+W_\varphi\boldsymbol{i}_\varphi+W_z\boldsymbol{i}_z$；$\boldsymbol{i}_r,\boldsymbol{i}_\varphi$ 与 $\boldsymbol{i}_z$ 分别为沿 r,φ,z 的单位切矢量；$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{i}_z$；

2. 设叶轮以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，叶片通道的中心线 ξ 也随着旋转，如图 3.4 所示，



这是一个典型的相对坐标系下沿流向的广义一维流动问题。如果假定这时相对流动是绝热的，试问：转子焓 I（即 $I=e+\dfrac{P}{\rho}+\dfrac{W^2}{2}-\dfrac{(\omega r)^2}{2}$，这里 e 为内能）沿流向坐标 ξ 守恒吗？为什么？

3. 某风洞的收缩喷管，进口空气流的总压为 1.724×10^5 Pa，总温为 324 K，喷管出口通大气，出口面积为 0.03 m²。试验时大气压强 $P_a=1.013\ 3\times10^5$ Pa，若不考虑喷管内的流动损失，试计算喷管出口气流的速度、压强以及通过喷管的空气流量。

4. 空气由容积为 1 m³ 的气瓶通过收缩喷管流入大气（大气压强 $P_a=1.033\times10^5$ Pa），喷管的出口截面积为 0.5×10^{-4} m²，气瓶内的初始压强为 1.0×10^7 Pa，求在容积流量不变条件下的流出时间（近似认为气瓶中温度保持 288 K 不变）。

5. 从四个因素同时作用的一维定常流动基本方程组出发，完成关于影响系数 a_{ij}（$i=1\sim8$，$j=1\sim4$）的具体表达式（见（3－3－34）式）。

6. 已知拉伐尔喷管出口马赫数 $M_e=3$，$A_t=0.14$ m²，$P_0=15$ 大气压，试详细分析拉伐尔喷管在各种背压 P_b 下的工况。

7. 有一个先收缩后扩张的进气道，在飞行马赫数 $M=1.5$ 时，进口截面上恰好有一道正激波，问喉道截面与进口截面面积之比应等于多少？如果喉道截面面积为 0.1 m²，飞机在 10 000 m 高空以 $M=1.5$ 的速度飞行，问在激波未吞入前以及在飞行速度略高一点激波被吞入后，经过进气道的流量各多少？

8. 用 FORTRAN 语言或 C 语言编制 Laval 喷管一维流动正问题求解的计算机程序（可参阅§3.4 节所述的方法进行）。

9. 有一个高压气罐通过收缩喷管与一个等截面绝热直管相连接，如图 3.22 所示。已知罐内的参数为 $P_0=7\times10^5$ N/m²，$T_0=60$ ℃；直管长度与直径比 $L/D=10$，横截面积为 4.9×10^{-4} m²，平均摩擦系数 $f=0.008$，试确定：（1）通过等截面直管的最大质量流量以及实现该流量的背压范围；（2）若让气流直接从收缩喷管排出，则此时的最大质量流量和对应的背压范围将发生什么变化？

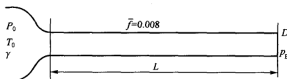


图 3.22　气罐与等截面绝热直管相接

10. 从（3－5－35）式出发，对于完全气体试推导 dP 与 dv 的关系式，这里 v 为气体的比容。



11. 空气在截面积为 0.093 m^2 的等截面绝热管内流动，截面 1 处压强为 7.03×10^4 Pa，温度为 5 ℃，密度为 145 kg/（s·m^2），设管道已处于壅塞状态。（1）试计算截面 1 处的马赫数；（2）试计算管道出口处的马赫数、温度、压强；（3）为了固定从截面 1 到出口的这段管道，试计算需要施加的轴向力。

12. 空气在等截面圆管中作无摩擦流动，进口总温 $T_{01}=300$ K，由于对气流加热，空气的 λ 数由 0.5 提高到 0.9，试求对单位质量空气的加热量。

13. 有一个冲压式燃烧室，进口处可燃气体的速度为 $V_1=100$ m/s，温度 T_1=50 ℃，压强 $P_1=5$ 个大气压，燃烧反应热 $q=3\ 347.2$ kJ/kg；假设燃烧室是等截面的，可燃气体的分子量及比热比可以近似采用空气的相应值。试求出口处的 V_2，T_2，P_2，P_{02} 以及熵增 ΔS。

14. 试证明：等截面无摩擦的加热管流（$\delta q>0$），沿流动方向总有 $\mathrm{d}P_0/P_0>0$，这里 P_0 为当地滞止压强。写出加热前后 P_{02}/P_{01} 的表达式。

15. 在等截面直管内空气流动的马赫数 $M_1=2$，压强 $P_1=0.7\times10^5$ N/m^2，温度 $T_1=-107$ ℃，若在某截面喷入燃料并点火加热空气，试问加热后的气体滞止温度 T_{02} 最高可达多少度？如果此空气加热前先经过一道正激波，然后再对波后气流加热，问这时 T_{02} 最高可达多少度？（这里不计摩擦）

16. 什么叫凝结突跃？它对气体的流动将产生怎么样的影响？它与压缩突跃例如正激波有什么不同？

17. 气体在一个具有变截面、有摩擦和有垂直添质流量联合作用下的一维管道中作定常流动，如果不计气体的质量力，试给出该流动的微分型连续方程以及微分形式的动量方程（用马赫数 M 表示），图 3.23 中 $\delta R_{fx}=-\dfrac{\rho V^2}{2}\dfrac{4f}{D_e}A\mathrm{d}x$。

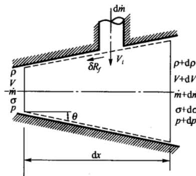


图 3.23　多种因素作用下的一维管流

18. 有一固体火箭发动机，药柱密度 $\rho_P=2\ 400$ kg/m^3，药柱长 $L=1.0$ m，火焰温度 $T_f=2\ 800$ K，喷管临界截面 $A_*=0.000\ 7$ m^2，在某一瞬间药柱内孔径 $D=0.034\ 47$ m，试就下列两种燃烧速度：① V_b = 常数 =0.065 m/s；② $V_b=cP_{01}^n$（这里 $c=0.000\ 01$，$n=0.5$）的情况下计算该瞬间气流流出截面 2 时，如图 3.21 所示的 M_2 和 P_{02} = 以及左端截面 1 处的 ρ_1 与 P_1 值。这里约定药柱进口截面与药柱出口截面的下注脚分别用 1 与 2 表示；燃气的 $\gamma=1.2$，$R=320$ J/kg·K。

第 4 章　可压缩一维非定常流动

一维非定常气体动力学是气体力学的重要组成部分，也是理论研究与工程应用领域最为关注的内容之一，尤其是现代计算流体力学的飞速发展，使一维非定常流动分析方法更为重要。

§4.1　可压缩、无粘、非定常基本方程组的数学结构及一维流动

4.1.1　可压缩、无粘、完全气体非定常流动基本组的数学结构

首先将可压缩无粘气体基本方程组写成一阶拟线性对称双曲型方程组的形式。之所以写成这种形式，是因为对称双曲组在数学上具有非常好的性质，而且这类方程组可借用的数学成果较多。为此，先讨论无粘流体的动量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{V})+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{VV}+P\boldsymbol{I})=\rho \boldsymbol{f} \tag{4-1-1}$$

式中，$\boldsymbol{VV}$ 是并矢张量（又称速度矢量的张量积）；$\rho \boldsymbol{f}$ 表示单位体积上的质量力（又称彻体力）；$\boldsymbol{I}$ 为度量张量，可参见式（1－4－9）的定义。在笛卡儿直角坐标系（x_1,x_2,x_3）中上式可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho v_k v_i+P\delta_{ki}\right)=\rho f_i \qquad (i,k=1\sim 3) \tag{4-1-2}$$

这里采用了爱因斯坦求和规约。式中 δ_{ki} 为 Kronecker 记号。由连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=0 \tag{4-1-3}$$

则式（4－1－2）可变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\nabla P=\boldsymbol{f} \tag{4-1-4}$$

或者写为

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial P}{\partial x_i}=\rho f_i \qquad (i=1\sim 3) \tag{4-1-5}$$

方程式（4－1－4）或式（4－1－5）又常称为 Euler 方程。能量方程



$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e+\frac{1}{2}\rho V^2\right)+\nabla\cdot\left[\left(\rho e+\frac{1}{2}\rho V^2+P\right)\boldsymbol{V}\right]=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V} \tag{4-1-6}$$

式中，e 为单位质量的流体所具有的热力学狭义内能，因此 $(\rho e+\frac{1}{2}\rho V^2)$ 表示单位体积中流体所具有的广义内能。借助于连续方程则上式可变为

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)+\rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla\left(e+\frac{V^2}{2}\right)+\nabla\cdot(P\boldsymbol{V})=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V} \tag{4-1-7}$$

或者

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)+\nabla\cdot(P\boldsymbol{V})=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V} \tag{4-1-8}$$

注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$，并使用式（4－1－4），则式（4－1－8）可改写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+P\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{4-1-9}$$

又利用连续方程消去上式的 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 项便得到

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4-1-10}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4-1-11}$$

再利用 Gibbs 方程，即

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}\left(\mathrm{d}e+P\mathrm{d}\frac{1}{\rho}\right) \tag{4-1-12}$$

则式（4－1－11）变为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4-1-13}$$

这里 S 是单位质量流体所具有的熵。上式又可写为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla S=0 \tag{4-1-14}$$

或者



$$\frac{\partial S}{\partial t}+v_k\frac{\partial S}{\partial x_k}=0 \quad (k=1\sim3) \tag{4-1-15}$$

特别是对于多方气体（polytropic gas）[1,2,3]其状态方程具有如下形式

$$P=f(\rho,S)=B(S)\rho^{\gamma} \tag{4-1-16}$$

式中

$$B(S)=(\gamma-1)\exp\left(\frac{S-S_0}{C_V}\right) \tag{4-1-17}$$

这里 S_0 是一个适当的常数[4, 5]，γ 为比热比（又称绝热指数），B（S）只是熵 S 的函数。另外对于多方气体，还有下列简单关系式成立，即

$$\left.\begin{aligned}&a^2=B\gamma\rho^{\gamma-1}=\gamma P/\rho=\gamma RT\\&e=\frac{B}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=C_VT\\&RT=B\rho^{\gamma-1}\end{aligned}\right\} \tag{4-1-18}$$

对于多方气体，式（4-1-14）可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)=0 \tag{4-1-19}$$

对于正压气体，这时密度仅仅是压强的函数而与其它的热力学变数无关[6~9]，这时的状态方程可以变得十分简单。在通常情况下，压强是密度与熵的函数，即 $P=P(\rho,S)$，于是借助于它以及式（4-1-13）与式（4-1-15）可得到

$$\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}+v_k\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)=0$$

即

$$\frac{\partial P}{\partial t}+v_k\frac{\partial P}{\partial x_k}+\rho a^2\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0$$

或者

$$\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\frac{v_k}{\rho a^2}\frac{\partial P}{\partial x_k}=0 \tag{4-1-20}$$

将上述方程按照运动方程式（4-1-5）、连续方程式（4-1-20）及能量方程式（4-1-15）的次序排列，便得到如下矩阵形式

$$\boldsymbol{A}_0\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}_i\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial x_i}=\boldsymbol{C} \qquad (i=1\sim3) \tag{4-1-21}$$



式中

$$U = [v_1, v_2, v_3, P, S]^{\mathrm{T}}$$

$$C = [\rho f_1, \rho f_2, \rho f_3, 0, 0]^{\mathrm{T}} \tag{4-1-22}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作为读者的课后作业，请完成 A_1, A_2, A_3 矩阵的具体表达。显然 A_0 为对称正定矩阵，而且 A_1, A_2, A_3 均为对称阵，因此该方程组式（4－1－21）是一个一阶拟线性对称双曲型偏微分方程组。对于一维可压缩无粘流动，则由式（4－1－3）、式（4－1－2）与式（4－1－6）组成的方程组被简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = \rho f \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \dfrac{1}{2}\rho u^2\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(\rho e + \dfrac{1}{2}\rho u^2 + P\right)u\right] = u\rho f \end{cases} \tag{4-1-23}$$

或者由式（4－1－3）、式（4－1－5）、式（4－1－14）组成的方程组在一维可压缩无粘流动时被简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = f \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + u\dfrac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{4-1-24}$$

由于上面两个方程组都不是一阶对称双曲型方程组，因此为了说明它们的双曲性，在这里有必要介绍一下一个空间变量的一阶拟线性双曲型方程组的定义。

4.1.2　一维非定常无粘流基本方程组特征值与特征方程

一、一个空间变量的一阶拟线性双曲型方程组

考察如下的一阶拟线性偏微分方程组

$$A(t,x,U)\frac{\partial U}{\partial t}+B(t,x,U)\frac{\partial U}{\partial x}=\phi(t,x,U) \tag{4-1-25}$$

式中，A,B 均为 $n\times n$ 的矩阵，$U=[u_1,u_2\cdots,u_n]^T$ 为未知函数组成的列向量；$\phi=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_n]^T$ 也为列向量。如果在所考察的区域内

$$\det A\neq 0 \tag{4-1-26}$$

并且特征方程

$$\det(B-\lambda A)=0 \tag{4-1-27}$$

有 n 个实根即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；设 l_i 为对应于 λ_i 的左特征行向量：

$$l_iB=\lambda_i l_i A \quad （这里不对 i 作和） \tag{4-1-28}$$

如果 $l_i(i=1\sim n)$ 构成完全组，即这些特征向量是完备的线性无关的，并且

$$\det\left([l_1,l_1,\cdots,l_n]^T\right)\neq 0 \tag{4-1-29}$$

此时称方程组式（4－1－25）为双曲型方程组。若特征方程式（4－1－27）具有 n 个相异的实根，不妨令

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n \tag{4-1-30}$$

则称方程组式（4－1－25）为严格双曲型方程组。

二、方程组式（4－1－24）的特征

这时 $U=[\rho,u,S]^T$ 为未知函数的列向量，此时 $P=P(\rho,S)$；如果将式（4－1－24）整理为式（4－1－25）的形式，则此时

$$A=I \tag{4-1-31}$$

$$B=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ a^2/\rho & u & \frac{1}{\rho}(\partial P/\partial S)_\rho \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \tag{4-1-32}$$

式中，I 为单位阵，$a^2=(\partial P/\partial\rho)_S$。于是

$$\det(B-\lambda A)=(u-\lambda)\left[(u-\lambda)^2-a^2\right]$$

所以方程组式（4－1－24）的特征方程为

$$(u-\lambda)\left[(u-\lambda)^2-a^2\right]=0 \tag{4-1-33}$$



其根为

$$\lambda_1 = u-a,\quad \lambda_2 = u,\quad \lambda_3 = u+a \tag{4-1-34}$$

因此一维方程组式（4－1－24）是严格双曲型的，它的三族特征曲线分别为

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u-a\,,\qquad \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u\,,\qquad \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u+a \tag{4-1-35}$$

作为读者的课后作业，试求出方程组式（4－1－23）的特征方程、特征值和特征曲线。

§4.2　守恒变量与原始变量基本方程组间的相互转换及特征分析

4.2.1　双曲型方程组的左右特征向量矩阵及特征标准型方程

考察守恒律组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})}{\partial x}=0 \tag{4-2-1}$$

这里 $\boldsymbol{U}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})=[f_1(\boldsymbol{U}),f_2(\boldsymbol{U}),\cdots,f_n(\boldsymbol{U})]^{\mathrm{T}}$；通量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\equiv\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{U}}\equiv \boldsymbol{f}_U=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_n}\end{bmatrix} \tag{4-2-2}$$

于是守恒形式的方程组式（4－2－1）变为非守恒形式即

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}=0 \tag{4-2-3}$$

于是特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})=0 \tag{4-2-4}$$

的根为矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ 的特征值，因为式（4－2－4）是 λ 的 n 次多项式，故有 n 个根，并记为

$$\lambda_1(\boldsymbol{U}),\lambda_2(\boldsymbol{U}),\cdots,\lambda_n(\boldsymbol{U})$$

令 $\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{U})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的与特征值 λ_k 相对应的右特征列向量，即

$$\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{U})=[r_{k1}(\boldsymbol{U}),r_{k2}(\boldsymbol{U}),\cdots r_{kn}(\boldsymbol{U})]^{\mathrm{T}} \tag{4-2-5}$$

并且满足下式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{U})=\lambda_k\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{U})\qquad（这里不对\ k\ 作和） \tag{4-2-6}$$

于是这些右特征向量依次排列组成右特征向量矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})$，即

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})=\left[\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{U}),\cdots\boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{U})\right] \tag{4-2-7}$$

因此可将方程组式（4-2-6）（这里 $k=1\sim n$）写成等价的矩阵等式形式，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{U}) \tag{4-2-8}$$

这里 $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{U})$ 为对角矩阵，其对角线上的元素为特征值 λ_k（这里 $k=1\sim n$）；$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{U})$ 的表达式为

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{U})\equiv \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{4-2-9}$$

同样的 $\boldsymbol{l}_j(\boldsymbol{U})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ 的与特征值 $\lambda_j(\boldsymbol{U})$ 相对应的左特征行向量，即

$$\boldsymbol{l}_j(\boldsymbol{U})=[l_{j1}(\boldsymbol{U}),l_{j2}(\boldsymbol{U}),\cdots,l_{jn}(\boldsymbol{U})] \tag{4-2-10}$$

并且满足方程组

$$\boldsymbol{l}_j(\boldsymbol{U})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})=\lambda_j(\boldsymbol{U})\boldsymbol{l}_j(\boldsymbol{U}) \qquad \text{（这里不对 } j \text{ 作和）} \tag{4-2-11}$$

于是这些左特征行向量组成了左特征向量矩阵 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})$ 即

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})=\left[\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{l}_2(\boldsymbol{U}),\cdots,\boldsymbol{l}_n(\boldsymbol{U})\right]^{\mathrm{T}} \tag{4-2-12}$$

同样的可以将方程组式（4-2-11）（这里 $j=1\sim n$）写成等价的矩阵等式，即

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}) \tag{4-2-13}$$

可以证明，不同脚标的左特征行向量与右特征列向量总是正交的，用矩阵形式写出时便为

$$\boldsymbol{l}_j(\boldsymbol{U})\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{U})=0 \qquad \text{（当 } j\neq k \text{ 时）} \tag{4-2-14}$$

而且可以选择使

$$\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{U})\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{U})\equiv 1 \tag{4-2-15}$$

因此便有

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{I} \tag{4-2-16}$$

也就是说 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 互为逆矩阵

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})&=\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{U})\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})&=\boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{U})\end{aligned}\right\} \tag{4-2-17}$$

并且有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}) \tag{4-2-18}$$

用 $\boldsymbol{L}$ 矩阵左乘式（4-2-3）得

$$\boldsymbol{L}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}=0 \tag{4-2-19}$$

则式（4-2-19）称作双曲型方程组式（4-2-3）的特征方程组。设 $\beta_i(\boldsymbol{U})$ 是某个正（或者负）定函数，如果 $J_i(\boldsymbol{U})$ 满足

$$\mathrm{d}J_i(\boldsymbol{U})=\beta_i(\boldsymbol{U})\boldsymbol{l}_i(\boldsymbol{U})\mathrm{d}\boldsymbol{U} \qquad \text{（这里不对 } i \text{ 作和）} \tag{4-2-20}$$



则称 $J_i(\boldsymbol{U})$ 为第 i 个黎曼（Riemann）不变量。在数学上，$\beta_1,\beta_2,\cdots$ 叫积分因子。应该指出：在通常情况下，积分因子并不是容易找到的。令

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{U})=[J_1(\boldsymbol{U}),J_2(\boldsymbol{U}),\cdots,J_n(\boldsymbol{U})]^{\mathrm{T}} \tag{4-2-21}$$

表示由 n 个黎曼不变量组成的列向量。如果用 $\beta_1(\boldsymbol{U}),\beta_2(\boldsymbol{U}),\cdots,\beta_n(\boldsymbol{U})$ 分别乘以式（4－2－19）的第 1 个，第 2 个，…，第 n 个，并注意到式（4－2－20），于是便得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial x}=0 \tag{4-2-22}$$

上式被称为特征标准型方程，它是由 n 个如下所示的标量方程所组成，即

$$\frac{\partial J_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial J_i}{\partial x}=0 \quad (i=1\sim n)\text{（这里不对 }i\text{ 作和）} \tag{4-2-23}$$

如果曲线 C_i 上的任意一点（$x_i(t),t$）满足

$$\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t=\lambda_i \qquad (i=1\sim n) \tag{4-2-24}$$

则曲线 C_i 被称作第 i 族特征线。由式（4－2－23）得出，沿第 i 族特征线有

$$\mathrm{d}J_i=0 \tag{4-2-25}$$

因此沿特征线有下面两大性质：

① 沿第 i 族特征线，则第 i 个黎曼不变量 J_i 是常数。

② 沿第 i 族特征线，J_i 的总变差 TV（Total Variation）具有不变性。这一不变性是双曲型方程组的一个非常重要的特性。关于总变差的概念可参阅文献[10]。

例 1　考虑常系数线性双曲型方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}=0 \tag{*1}$$

的初值问题

$$\boldsymbol{U}(x,0)=\boldsymbol{U}_0(x) \tag{*2}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是常数矩阵，相当于通量 $\boldsymbol{f}(U)=\boldsymbol{AU}$ 为线性函数。试将（*1）式化成特征标准型方程，并求出该原始方程组初值问题的解。

解　这时 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及左、右特征向量矩阵都与 $\boldsymbol{U}$ 无关，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R\Lambda L} \tag{*3}$$

用左特征向量矩阵 L 左乘到（*1）式的两边，并引进新的未知函数 W

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{LU}=[\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{U},\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{U},\cdots,\boldsymbol{l}_n\boldsymbol{U}]^{\mathrm{T}}\equiv[w_1,w_2,\cdots,w_n]^{\mathrm{T}} \tag{*4}$$

得到新的方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x}=0 \tag{*5}$$

写成分量形式便为

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial w_i}{\partial x}=0 \qquad (i=1\sim n)\text{（这里不对 } i \text{ 作和）} \tag{*6}$$

相应的初值问题变为

$$w_i(x,0)=\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{U}(x,0)=\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{U}_0(x)\equiv w_{i0}(x) \quad (i=1\sim n) \tag{*7}$$

因此由（*6）与（*7）式便可对每一个固定的 i 解得

$$w_i(x,t)=\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{U}(x,t)=w_{i0}(x-\lambda_i t)=\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{U}_0(x-\lambda_i t) \tag{*8}$$

于是可得到原始方程组初值问题的解，用矩阵表达便为

$$\boldsymbol{U}(x,t)=\boldsymbol{RW}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\left[w_i(x,t)\boldsymbol{r}_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{U}_0(x-\lambda_i t)\boldsymbol{r}_i\right] \tag{*9}$$

例 2 考虑一维 Euler 方程的守恒形式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})}{\partial x}=0\\&\boldsymbol{U}=\left[\rho,\rho u,\varepsilon\right]^{\mathrm{T}},\varepsilon=\frac{P}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho u^2\\&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})=\left[\rho u,\rho u^2+P,u(\varepsilon+P)\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{4-2-26}$$

试推导出它的黎曼不变量以及特征标准型方程的具体形式。

解 首先求出系数矩阵

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})=\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})}{\partial \boldsymbol{U}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \dfrac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1\\ \dfrac{\gamma-2}{2}u^3-\dfrac{ua^2}{\gamma-1} & \dfrac{a^2}{\gamma-1}+\dfrac{3-2\gamma}{2}u^2 & \gamma u\end{bmatrix} \tag{4-2-27}$$

再求 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ 的特征方程为

$$\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\right|=(\lambda-u)\left[(\lambda-u)^2-a^2\right]=0$$

因此它的三个特征值为 $\lambda_1=u-a,\quad \lambda_2=u,\quad \lambda_3=u+a$ （4-2-28）

计算三个右特征列向量，分别为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{U})=\left[1,u-a,H-ua\right]^{\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{U})=\left[1,u,\frac{u^2}{2}\right]^{\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{r}_3(\boldsymbol{U})=\left[1,u+a,H+ua\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{4-2-29}$$



式中，H 为总焓，$H=\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho}=\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{a^2}{\gamma-1}$。

由 $\boldsymbol{LR}=\boldsymbol{I}$，因此可求得与 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 相对应的三个左特征行向量分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{U})&=\frac{\gamma-1}{2a^2}\left[\frac{1}{2}u^2+\frac{ua}{\gamma-1},-u-\frac{a}{\gamma-1},1\right]\\\boldsymbol{l}_2(\boldsymbol{U})&=\frac{\gamma-1}{2a^2}\left[\frac{2a^2}{\gamma-1}-u^2,2u,-2\right]\\\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{U})&=\frac{\gamma-1}{2a^2}\left[\frac{u^2}{2}-\frac{ua}{\gamma-1},\frac{a}{\gamma-1}-u,1\right]\end{aligned}\right\}\tag{4-2-30}$$

然后由 $\mathrm{d}J_i=\beta_i(\boldsymbol{U})\boldsymbol{l}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{U}$ 得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}J_1&=\beta_1(\boldsymbol{U})\left(\frac{\mathrm{d}P}{2a^2}-\frac{\rho}{2a}\mathrm{d}u\right)\\\mathrm{d}J_2&=\beta_2(\boldsymbol{U})\left(\mathrm{d}\rho-\frac{\mathrm{d}P}{a^2}\right)\\\mathrm{d}J_3&=\beta_3(\boldsymbol{U})\left(\frac{\mathrm{d}P}{2a^2}+\frac{\rho}{2a}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}\right\}\tag{4-2-31}$$

显然，如果取 $\beta_1(\boldsymbol{U})=a/\rho$，$\beta_2(\boldsymbol{U})=-\rho^{-\gamma}a^2$，$\beta_3(\boldsymbol{U})=a/\rho$，　　(4-2-32)

可得到一组黎曼不变量，即

$$J_1=\frac{a}{\gamma-1}-\frac{u}{2},\quad J_2=\frac{P}{\rho^\gamma},\quad J_3=\frac{a}{\gamma-1}+\frac{u}{2},\tag{4-2-33}$$

于是，$J_i(\boldsymbol{U})$ 满足如下的特征方程式

$$\frac{\partial J_i}{\partial t}+[u+(i-2)a]\frac{\partial J_i}{\partial x}=0\quad(i=1,2,3)\tag{4-2-34}$$

4.2.2　两类基本方程组间的相互转换及特征分析

这里所谓两类方程组是指用守恒变量与原始变量写成的 Euler 方程组。这两类方程组同等重要，而且经常需要相互转换。首先由能量方程式（1-4-32）出发，对于无粘、无热传导的非定常完全气体，则式（1-4-32）可简化为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0\tag{4-2-35}$$

注意到 $\mathrm{d}e=C_V\,\mathrm{d}T$ 以及 $P=\rho RT$ 则上式可变为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$$

应用连续方程后，则上式变为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+a^2\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{4-2-36}$$

式中，a 为声速。因此无粘、无热传导的非定常可压缩完全气体的基本方程组可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0\\&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\nabla P=0\\&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\rho a^2\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0\end{aligned}\right\} \tag{4-2-37}$$

令

$$\tilde{\boldsymbol{U}}=[\rho,u,v,w,P]^{\mathrm{T}}\equiv[\rho,u_1,u_2,u_3,P]^{\mathrm{T}} \tag{4-2-38}$$

用 (y^1,y^2,y^3) 代替直角笛卡儿坐标系 (x,y,z)，于是式（4-2-37）在直角笛卡儿坐标系中写成矩阵形式便为

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_j\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial y^j}\right)=0 \tag{4-2-39}$$

这里 $\tilde{A}_j(j=1\sim3)$ 为 5×5 的矩阵，作为课后练习，读者可自行推导出 $\tilde{\boldsymbol{A}}_1,\tilde{\boldsymbol{A}}_2,\tilde{\boldsymbol{A}}_3$ 的具体表达式。今引进一个辅助矩阵

$$\boldsymbol{M}=\sum_{j=1}^{3}(k_j\tilde{A}_j) \tag{4-2-40}$$

这里 k_j 为常数；由线性代数的基本知识，容易验证存在着一个满秩矩阵 $\boldsymbol{T}$（以及它的逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$）使下式成立

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{MT}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \tag{4-2-41}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{K}\\&\lambda_4=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{K}+a\sqrt{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K}}\\&\lambda_5=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{K}-a\sqrt{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K}}\end{aligned}\right\} \tag{4-2-42}$$



$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{K}=[k_1,k_2,k_3]^{\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{V}=[u_1,u_2,u_3]\\&\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K}=\sum_{j=1}^{3}(k_j)^2\\&\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{K}\equiv\sum_{j=1}^{3}(u_jk_j)\end{aligned}\right\}\tag{4-2-43}$$

式（4-2-41）中的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 分别为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\bar{K}_1 & \bar{K}_2 & \bar{K}_3 & \rho/(a\sqrt{2}) & \rho/(a\sqrt{2})\\ 0 & -\bar{K}_3 & \bar{K}_2 & \bar{K}_1/\sqrt{2} & -\bar{K}_1/\sqrt{2}\\ \bar{K}_3 & 0 & -\bar{K}_1 & \bar{K}_2/\sqrt{2} & -\bar{K}_2/\sqrt{2}\\ -\bar{K}_2 & \bar{K}_1 & 0 & \bar{K}_3/\sqrt{2} & -\bar{K}_3/\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & \rho a/\sqrt{2} & \rho a/\sqrt{2}\end{bmatrix}\tag{4-2-44}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\bar{K}_1 & 0 & \bar{K}_3 & -\bar{K}_2 & -\bar{K}_1/a^2\\ \bar{K}_2 & -\bar{K}_3 & 0 & \bar{K}_1 & -\bar{K}_2/a^2\\ \bar{K}_3 & \bar{K}_2 & -\bar{K}_1 & 0 & -\bar{K}_3/a^2\\ 0 & \bar{K}_1/\sqrt{2} & \bar{K}_2/\sqrt{2} & \bar{K}_3/\sqrt{2} & 1/(\rho a\sqrt{2})\\ 0 & -\bar{K}_1/\sqrt{2} & -\bar{K}_2/\sqrt{2} & -\bar{K}_3/\sqrt{2} & 1/(\rho a\sqrt{2})\end{bmatrix}\tag{4-2-45}$$

式中，$\bar{K}_j\equiv k_j/\sqrt{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K}}$，显然矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 所对应的行列式的值为

$$\det\boldsymbol{T}=\left(\det\boldsymbol{T}^{-1}\right)^{-1}=\rho a\tag{4-2-46}$$

将式（4-2-37）在直角坐标系 (y^1,y^2,y^3) 中写成守恒形式，即

$$\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}_j}{\partial y^j}\right)=0\tag{4-2-47}$$

式中

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \varepsilon\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u_1\\ \rho u_2\\ \rho u_3\\ \varepsilon\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_j=\begin{bmatrix}\rho u_j\\ \rho u_1u_j+P\delta_{1j}\\ \rho u_2u_j+P\delta_{2j}\\ \rho u_3u_j+P_{3j}\\ (\varepsilon+P)u_j\end{bmatrix}\tag{4-2-48}$$

$$\varepsilon = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}$$

令 $\boldsymbol{A}_j = \partial \boldsymbol{F}_j / \partial \boldsymbol{U}$，于是（4-2-47）式又可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \left(\boldsymbol{A}_j \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y^j} \right) = 0 \tag{4-2-49}$$

令 $\boldsymbol{N} = \partial U / \partial \tilde{\boldsymbol{U}}$，则有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_j = \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{N} \tag{4-2-50}$$

也就是说 $\tilde{\boldsymbol{A}}_j$ 与 $\boldsymbol{A}_j$ 为相似矩阵，由线性代数知道它们有相同的特征值。矩阵 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 的具体表达式为

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ V^2/2 & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & 1/(\gamma-1) \end{bmatrix} \tag{4-2-51}$$

$$\boldsymbol{N}^{-1} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial \boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -u_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{2} V^2 & -(\gamma-1)u_1 & -(\gamma-1)u_2 & -(\gamma-1)u_3 & (\gamma-1) \end{bmatrix} \tag{4-2-52}$$

于是，对于矩阵 $\boldsymbol{A}_j$，注意到式（4-2-41），则有

$$\left(\boldsymbol{T}_{(j)}^{-1} \boldsymbol{N}^{-1} \right) \boldsymbol{A}_j \left(\boldsymbol{N} \boldsymbol{T}_{(j)} \right) = \boldsymbol{\Lambda}_{(j)} \tag{4-2-53}$$

这里 $\boldsymbol{\Lambda}_{(j)}$ 为对角矩阵。因此，便可很方便的得到了矩阵 $\boldsymbol{A}_j$ 的左特征矩阵 $\boldsymbol{L}_{(j)}$ 与右特征向量矩阵 $\boldsymbol{R}_{(j)}$，即

$$\boldsymbol{L}_{(j)} = \boldsymbol{T}_{(j)}^{-1} \boldsymbol{N}^{-1}, \quad \boldsymbol{R}_{(j)} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{T}_{(j)} \tag{4-2-54}$$

用类似的方法，也可以得到任意曲线坐标系下通量雅科比矩阵所对应的特征值、特征向量矩阵及其逆矩阵[11~14]。



§ 4.3* 双曲型守恒律方程的弱解及熵函数、熵通量、熵条件

既然一维非定常气体力学方程组属于双曲组，那么双曲型方程的求解就必然要涉及弱解和熵条件的概念，而且必然会涉及到经典解、间断解以及模型方程的讨论。

4.3.1 熵函数与熵通量

偏微分方程的研究表明：对双曲守恒律方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})}{\partial x}=0 \quad (-\infty<x<\infty, t>0) \tag{4-3-1}$$

这里 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^{\mathrm{T}}$，通量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=[f_1(\boldsymbol{u}),f_2(\boldsymbol{u}),\cdots,f_n(\boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}}$，即使初值

$$\boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x) \tag{4-3-2}$$

是充分光滑的，随着时间增长，同族特征线也可能会相交，即解可能有间断，因此有必要推广经典解（又称古典解）引进弱解的概念。粗糙地说，弱解就是经典解加上间断解。大量的理论研究表明：解的间断性深刻地反映着非线性方程（或拟线性方程）的本质特点，同时在自然界中各种物理量的间断面的传播是一个普遍现象[15]。理论研究还表明[16, 17]：初值问题式（4-3-1）、式（4-3-2）的弱解是不惟一的。对于一维非定常气体动力学方程，在获得间断解时可以根据熵增条件去选出惟一的真实解即物理解。对一般双曲型守恒律式（4-3-1），我们也希望能选出它的惟一真实解，因此便提出了所谓熵函数 $U^*(\boldsymbol{u})$ 和熵通量函数 $F^*(\boldsymbol{u})$ 的概念，同时也就提出了研究凸函数的要求；与此同时便推出了用熵条件（又称熵不等式）去判断物理解的思想。熵函数 $U^*(\boldsymbol{u})$ 与熵通量函数 $F^*(\boldsymbol{u})$ 都是标量函数，尤其是熵函数它满足下列两点性质：

1. U^* 是 $\boldsymbol{u}$ 的凸函数，即 U^* 的 Hessian 矩阵

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \boldsymbol{u}\partial \boldsymbol{u}}=\left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial u_i \partial u_j}\right)\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_1\partial u_1} & \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_1\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_1\partial u_n}\\ \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_2\partial u_1} & \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_2\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_2\partial u_n}\\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_n\partial u_1} & \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_n\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial u_n\partial u_n}\end{bmatrix} \tag{4-3-3}$$

正定。

2. U^*满足相容性条件，即

$$\frac{\partial U^*}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial F^*}{\partial u} \tag{4-3-4}$$

这里 $F^*=F^*(u)$ 为熵通量，它也是个标量函数。另外，必须指出的是：这里定义数学上的熵函数与物理上的熵是有显著区别的，并且在许多情况下两者并不一致。U^*与F^*满足下列熵条件，即

$$\frac{\partial U^*}{\partial t}+\frac{\partial F^*}{\partial x}\leqslant 0 \tag{4-3-5}$$

可以证明：满足熵条件的弱解是惟一的，并且是物理解。

例 3 已知一维 Euler 方程组 $\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{W})}{\partial x}=0$。

式中，$\boldsymbol{W}=\left[\rho,\rho u,\varepsilon\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{W})=\left[\rho u,\rho u^2+P,(\varepsilon+P)u\right]^{\mathrm{T}}$；对应于这个方程组的熵函数$U^*$与熵通量为$F^*$分别为：$U^*=-\rho S,F^*=-\rho S u$，这里 S 为热力学的熵。试计算这时U^*的 Hessian 矩阵并给出这时的熵条件。

解 由热力学熵 $S=C_V\ln\frac{P}{\rho^{\gamma}}+S$

于是

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \boldsymbol{W}\partial \boldsymbol{W}}=\frac{C_V}{(\rho e)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\rho u^4+\frac{\gamma P^2}{(\gamma-1)^2\rho} & -\frac{1}{2}\rho u^3 & \frac{1}{2}\rho u^2-\rho e\\ -\frac{1}{2}\rho u^3 & \rho u^2+\rho e & -\rho u\\ \frac{1}{2}\rho u^2-\rho e & -\rho u & \rho\end{bmatrix}$$

用式（4-3-5）及这时的U^*与F^*便得到

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u S)}{\partial x}\geqslant 0$$

考虑到连续方程后，则上式又可变为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}\geqslant 0。$$

4.3.2 强间断以及接触间断面两侧参数间的关系

正如前面所讲的，双曲型方程的一个重要特点是无论初始值是否光滑，其解都可能产生间断。在物理上，特别是在气流流动中，这种间断是客观存在的。间断面可以分为两种，一



种是弱间断即参数连续，而参数的导数不连续；另一种是强间断即参数产生间断，例如激波和接触间断。下面仅就强间断作些讨论。

设 $\boldsymbol{n}$ 为间断面的单位外法矢量，D 为间断面运动的法向速度，于是气体通过间断面的质量、动量和能量守恒关系为

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-D)=\rho_2(\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}-D)\\&\rho_1\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-D)+P_1\boldsymbol{n}=\rho_2\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}-D)+P_2\boldsymbol{n}\\&\varepsilon_1(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-D)+P_1\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}=\varepsilon_2(\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}-D)+P_2\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}\end{aligned}\right\}\tag{4-3-6}$$

式中，ρ、P 与 ε 分别为密度、压力与广义内能。另外，上式中的下标 1 与 2 分别对应于间断面前后（或两侧）的参数，令 m 表示通过间断面的质量流，则

$$m=\rho_1(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-D)=\rho_2(\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}-D)\tag{4-3-7}$$

由式（4-3-6）中的第 2 式得到

$$m(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2)=(P_2-P_1)\boldsymbol{n}\tag{4-3-8}$$

将式（4-3-8）两边点乘 $\boldsymbol{n}$ 得

$$m(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n})=(P_2-P_1)\tag{4-3-9}$$

将式（4-3-8）两边叉乘 $\boldsymbol{n}$ 得

$$m(\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_2\times\boldsymbol{n})=0\tag{4-3-10}$$

因此可得到两点结论：

① 对于接触间断面，由定义知它是没有流体穿过的间断面，即 $m=0$，因此这时由式（4-3-7）便可得 $\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{D}$；另外，由式（4-3-8）可得 $P_1=P_2$，这表明接触间断面两侧压强相等，速度相等，而气体的密度和温度等可以有任意间断。

② 对于激波，由式（4-3-10）可知，因为 $m\neq0$，所以 $\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{V}_2\times\boldsymbol{n}$ 即表示切向速度连续，而气流穿过激波时密度、法向、速度、压强和能量都要产生间断。

4.3.3 典型模型方程的经典解

先讨论方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=g(u,x,t)\tag{4-3-11}$$

及初始条件

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x)\tag{4-3-12}$$

的经典解（又称古典解）。显然，如果 u 是式（4-3-11）的解，那么在特征线上，u 应满足如下特征关系式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=g(u,x,t) \tag{4-3-13}$$

而特征线为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(u,x,t) \tag{4-3-14}$$

这时相应的初值条件为

$$x\big|_{t=0}=x_0,\quad u\big|_{t=0}=u_0 \tag{4-3-15}$$

也就是说，借助于特征线方法，方程式（4-3-11）与初值条件式（4-3-12）的求解问题可以转化为由式（4-3-13）～式（4-3-15）组成的常微分方程组的初值问题，即

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(u,x,t),\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=g(u,x,t)\\ x\big|_{t=0}=x_0,\quad u\big|_{t=0}=u_0\end{array}\right\} \tag{4-3-16}$$

由常微分方程理论知道，如果 a 与 g 可微分，则式（4-3-16）便有惟一解，不妨将这个解记作

$$u=f_1(u_0,x_0,t),\qquad x=f_2(u_0,x_0,t) \tag{4-3-17}$$

并且 f_1 与 f_2 满足

$$f_1(u_0,x_0,0)=u_0,\qquad f_2(u_0,x_0,0)=x_0 \tag{4-3-18}$$

另外，当 $t=0$ 时，还要求 u_0 与 x_0 由式（4-3-12）给出，于是得到下面形式的方程

$$u=f_1(u_0(x_0),x_0,t) \tag{4-3-19}$$

$$x=f_2(u_0(x_0),x_0,t) \tag{4-3-20}$$

在这两个式子中 x_0 为参量，也就是说式（4-3-19）与式（4-3-20）是关于 x_0 的参量方程。于是首先由式（4-3-20）得到反函数 $x_0=x_0(x,t)$，然后代入到式（4-3-19）中便得到了 u 的表达式，即

$$u=f_1\left[u_0(x_0(x,t)),x_0(x,t),t\right]\equiv u(x,t) \tag{4-3-21}$$

为了进一步理解上述过程，这里以气体力学数值分析中最常用的几个模型方程为例，寻求它们的经典解。

例 4 考虑一维一阶波动方程（又称一维对流方程）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (a=\text{const})\\ u\big|_{t=0}=u_0(x)\end{cases}$$

求它的特征线及方程的通解（又称普遍解）。

解 它的特征方程及特征关系是[18]



$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$$

由式（4－3－21），故解为 $u=u_0(x-at)$，特征线是直线族 $x=at+c$。

例 5　考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=0\\ u\big|_{t=0}=u_0(x)\end{cases}$$

求它的特征线及方程的通解。

解　它的特征方程及特征关系是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=0$$

由式（4－3－21），故解为 $u=u_0(x-t)\mathrm{e}^{-t}$，特征线是直线族 $x=t+c$。

例 6　考虑无粘 Burgers（又称 Hopf）方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ u\big|_{t=0}=u_0(x)\end{cases}$$

求它的特征线及方程的通解。

解　它的特征线方程及特征关系是

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u,\quad \mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0$$

由式（4－3－19）与式（4－3－20）可得到它们的解是

$$u=u_0(x_0),\quad x=u_0(x_0)t+x_0$$

于是得

$$x_0=x-u_0(x_0)t=x-ut$$

又可得到这时的解满足下式 $u=u_0(x-ut)$，显然，这个问题没有解的显式解析表达式。而 u 的特征线为 $x=u_0(x_0)t+x_0$。

例 7　考虑单个守恒律方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0\\ &u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x)\end{aligned}\right\}\tag{4-3-22}$$

这里 u 及 $f(u)$ 都是标量。它的非守恒形式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0\\&u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x)\end{aligned}\right\}\tag{4-3-23}$$

求它的特征线及方程的通解。

解 这时等价的常微分方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=a(u),\quad \mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0\\&x\big|_{t=0}=x_0\qquad u\big|_{t=0}=u_0\end{aligned}\right\}\tag{4-3-24}$$

由上式知道，在相应的特征线上，u 保持常数，特征线斜率 $a(u)$保持为常数，因而特征线是直线。由于特征线经过初始点 $(x_0,0)$，因此特征线为

$$x=x_0+a(u)t\tag{4-3-25}$$

故方程式（4－3－18）的解 u 为

$$u=u_0(x-a(u)t)\tag{4-3-26}$$

例 8 考虑二阶波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\quad (a=\mathrm{const})\tag{4-3-27}$$

初始条件
$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x)\tag{4-3-28}$$

定解域 $-\infty<x<+\infty,\quad t\geqslant 0$

这是个双曲型方程，其特征线为

$$x\pm at=\mathrm{const}$$

引进特征坐标：$\xi=x+at,\zeta=x-at$，于是式（4－3－27）可变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}=0\tag{4-3-29}$$

试从式（4－3－29）出发，求式（4－3－27）与式（4－3－28）所构成的初值问题的解。

解 由式（4－3－29）知，其解有如下形式

$$u=\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\zeta)$$

或者写为

$$u(x,t)=\varphi_1(x+at)+\varphi_2(x-at)$$

这就是波动方程的达朗贝（D'Alembert）解，这里 φ_1 与 φ_2 的函数形式可由给定的初始条件来确定。于是可得

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(\zeta)\mathrm{d}\zeta\tag{4-3-30}$$



例 9　考虑非线性 Burgers 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0)\big|_{t=0}=u_0(x) \end{cases} \qquad (\mu=\text{const}) \tag{4-3-31}$$

引入 Cole 和 Hopf 提出的非线性变换

$$u=-\frac{2\mu}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{4-3-32}$$

于是非线性 Burgers 方程可化为线性扩散方程。试求出式（4－3－31）的经典解。

解　令 $u=\xi_x\equiv\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$，代入式（4－3－31）得

$$(\xi_t)_x+\frac{1}{2}\left[(\xi_x)^2\right]_x=\mu(\xi_{xx})_x$$

将上式对 x 积分便得到

$$\xi_t+\frac{1}{2}(\xi_x)^2=\mu\xi_{xx} \tag{4-3-33}$$

令 $\xi=-2\mu\ln\varphi$ 并代入上式，得到线性的扩散方程，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{4-3-34}$$

于是对于初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases}$$

的经典解为

$$u(x,t)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\zeta}{t}\mathrm{e}^{-f/2\mu}\,\mathrm{d}\zeta}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-f/2\mu}\,\mathrm{d}\zeta} \tag{4-3-35}$$

式中

$$f(\zeta,x,t)=\int_0^{\zeta}u_0(y)\,\mathrm{d}y+\frac{(x-\zeta)^2}{2t}$$

例 10　考虑线性 Burgers 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases} \qquad (a,\mu=\text{const}) \tag{4-3-36}$$

（1）当 $\mu=0$ 时得到一维对流方程（又称一维波动方程）；对于这个问题在例题4中已用特征线法获得了经典解。

（2）当 $a=0$ 时得到一维扩散方程即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}\quad(\mu=\text{const}并且\mu>0) \tag{4-3-37}$$

于是采用分离变量法[18]可得到式（4-3-37）的经典解，即

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4\mu t}}\mathrm{d}\zeta \tag{4-3-38}$$

（3）对于一般线性 Burgers 方程式（4-3-36），其经典解为

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\zeta-at)^2}{4\mu t}}\mathrm{d}\zeta \tag{4-3-39}$$

试分析上述三种情况下解的耗散过程。

解

图4.1（a）给出了扰动波传播的过程。若给定的初始条件 $u_0(x)$ 是一个三角形，则在 $t=t_0$ 时刻仍为三角形，也就是说沿着特征线，是以波形不变的方式沿 x 的正方向（当 $a>0$ 时）或负方向（当 $a<0$ 时）传播着。扰动波以有限速度传播是双曲型方程解的一个重要特性。对于更为一般的双曲型方程，波形与波幅均有可能变化，但是扰动恒以有限速度传播，并能够保持波阵面。图4.1（b）给出了初始三角形波随时间演化的过程。可以看到，初始扰动波的棱角逐渐变平滑。这种耗散过程使得不管初始分布如何集中，扰动总是在瞬刻之间传播到很远，虽然它的强度是随距离按指数衰减，但是传播的速度是无穷的。这是抛物型方程解的特征。如果 $u_0(x)$ 是三角波，则初始扰动波尖角将随着传播而逐渐抹平。图4.1（c）给出了耗散与对流耦合的物理过程，扰动波仿佛以群速度 a 传播，但波形不能保持，这是双曲一抛物混合型方程的特征。

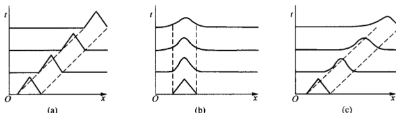


图4.1　扰动波的传播

（a）波动方程；（b）热传导方程；（c）线性 Burgers 方程



4.3.4　单个守恒律方程及 Олейник熵条件

前面已曾经讲过，非线性双曲方程即使初始条件是连续的，也有可能在有限时间内出现间断解。气体动力学中激波与滑移面的出现便是人们熟悉的例子。事实上，当解出现间断时，在间断点处原来的偏微分方程不再成立，前面研究的经典解理论也不再适用。为了得到间断解，必须引入弱解的概念。双曲型偏微分方程的研究表明：分片光滑的向量函数 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 如果是柯西问题式（4-3-1）的弱解其充分必要条件有三点：① 光滑部分，在古典意义下满足方程式（4-3-1）；② 所有的连续点满足初始条件式（4-3-2）；③ 在间断线上，设间断线的斜率为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=D$，则有

$$[\boldsymbol{u}]D=[\boldsymbol{f}] \tag{4-3-40}$$

这里用方括号表示一个函数的“跃度”（有的书上称为“跳跃”），也可以说它表示间断左、右两侧的状态差，例如

$$[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{u}(x+0,t)-\boldsymbol{u}(x-0,t)=\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \tag{4-3-41}$$

式（4-3-40）常称为 Rankine-Hugoniot 条件（简称 R-H 条件）。前面所说的间断线，要么是激波，要么是接触间断。而式（4-3-40）中的 D 叫间断速度；对于单个守恒律的情况，可以直接由间断关系式（4-3-40）计算间断速度 D。

$$D=\frac{[f(u)]}{[u]}=\frac{f(u_{\mathrm{R}})-f(u_{\mathrm{L}})}{u_{\mathrm{R}}-u_{\mathrm{L}}} \tag{4-3-42}$$

应该指出，满足上述三条的弱解并不惟一。Олейник在研究单个守恒律方程式（4-3-22）的弱解惟一性时，提出了一个熵条件即

$$\begin{cases}\dfrac{f(u_{\mathrm{R}})-f(u)}{u_{\mathrm{R}}-u}\leqslant\dfrac{f(u_{\mathrm{R}})-f(u_{\mathrm{L}})}{u_{\mathrm{R}}-u_{\mathrm{L}}}\leqslant\dfrac{f(u)-f(u_{\mathrm{L}})}{u-u_{\mathrm{L}}}\\ \forall u\in I\end{cases} \tag{4-3-43}$$

这里

$$I=\{\min[u_L,u_R],\quad \max[u_L,u_R]\}$$

式（4-3-43）常称作 Олейник 熵条件。数学上可以证明：满足 Олейник熵条件的弱解是惟一的，并且是物理解。文献[19]还进一步解释了 Олейник 熵条件所对应的物理问题是穿过激波的熵增条件。这里应该指出：尽管对于单个一维守恒型方程，数学上已经证明了满足熵条件的弱解是惟一的物理解，但是对于一维守恒方程组在一般情况下，解的惟一性并没有得到严格的数学证明；至于多维方程组，熵条件仅仅是确定惟一物理解的必要条件。另外，数学上定义的熵函数、熵通量以及由此引进的熵条件和满足熵条件而获得的熵解等一

系列问题在多维问题中如何去实现，仍然是气体动力学数值计算与理论分析中的热点，至今这类问题还没有得到圆满的解决[20]。为了进一步说明熵条件的重要性，下面举一个具有多个弱解的例子。

例 11 从无粘 Burgers 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right)=0\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}\tag{4-3-44}$$

出发，初始条件按下面两种情况选取：

① 如果初始条件为

$$u_0(x)=\begin{cases}+1 & (x<0)\\ -1 & (x\geqslant 0)\end{cases}\tag{4-3-45}$$

这时式（4-3-44）的惟一物理解为

$$u(x,t)=\begin{cases}+1 & (x<0)\\ -1 & (x\geqslant 0)\end{cases}$$

很显然，该物理解不但满足方程和初始条件而且在间断线上满足间断条件和熵条件。

② 如果初始条件取为

$$u_0(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ +1 & (x\geqslant 0)\end{cases}\tag{4-3-46}$$

容易验证，这时式（4-3-44）的惟一物理解为

$$u(x,t)=\begin{cases}-1 & (x\leqslant -t)\\ \dfrac{x}{t} & (-t<x<t)\\ +1 & (x\geqslant t)\end{cases}$$

问：能否给出第二种情况时的几个弱解？

解 在这种情况下，存在着许多组弱解，这里给出关于这个问题的三组弱解：

第一组：

$$u(x,t)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ +1 & (x\geqslant 0)\end{cases}$$

第二组：假设 $\alpha\geqslant -1$ 时，有

$$u(x,t)=\begin{cases}-1 & (x<-(1+\alpha)t/2)\\ -\alpha & (-(1+\alpha)t/2<x<0)\\ \alpha & (0<x<(1+\alpha)t/2)\\ 1 & ((1+\alpha)t/2<x)\end{cases}\tag{4-3-47}$$

第三组：如果 β 满足 $0<\beta<1$ 时，有



$$
u(x,t)=\begin{cases}-1 & (x\leqslant -t)\\ x/t & (-t<x<-\beta t)\\ -\beta & (-\beta t<x<0)\\ \beta & (0<x<\beta t)\\ x/t & (\beta t<x<t)\\ 1 & (t\leqslant x)\end{cases} \tag{4-3-48}
$$

显然，这些弱解在定解域内满足方程和初始条件，并且在间断线上它们满足间断条件，但是在间断线上它们不满足熵条件，因此它们是非物理解。

§4.4　双曲型偏微分方程初、边值问题的提法

解气体力学方程需要边界条件。一个正确的定解条件应该能够保证所研究的偏微分方程组是适定的，在数学上说是存在、惟一并且连续依赖于定解条件。但是应该看到：对于普遍性的一阶拟线性偏微分方程组而言，定解条件的正确提法仍然是一个没有完全解决的问题。因此，对一维非定常气体力学方程组边界条件提法的讨论是必要的，不可缺少的。

4.4.1　双曲型方程边界条件提法的一般性原则

考虑在 $x\geqslant 0$，$t\geqslant 0$ 的区域内求解方程组式（4-4-1）与初始条件式（4-4-2），即

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}=0, \tag{4-4-1}
$$

$$
\boldsymbol{U}(x,0)=\boldsymbol{U}_0(x) \tag{4-4-2}
$$

式中，$\boldsymbol{U}$ 为矢量，$\boldsymbol{U}=[u_1,u_2,\cdots,u_m]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{A}$ 为矩阵。

设方程组为严格双曲型方程组，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为互异的实数，并且存在着 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 矩阵使得

$$
\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{LAR}=\boldsymbol{\Lambda}\\ &\boldsymbol{L}^{-1}=\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{L}\end{aligned}\right\} \tag{4-4-3}
$$

式中，$\boldsymbol{\Lambda}$ 是以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为元素的对角矩阵。

为便于下文讨论，假设 $\boldsymbol{A}$ 为常数矩阵，以矩阵 $\boldsymbol{L}$ 左乘式（4-4-1），这时方程组可化为特征型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}\dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x}=0\\ \boldsymbol{W}=[w_1,w_2,\cdots w_m]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{4-4-4}$$

式中，特征变量 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{U}$，于是方程组式（4－4－1）便可分裂为 m 个单个方程，并且可以独立积分。因此方程组式（4－4－4）中每一个方程初边值问题的提法便与单波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4-4-5}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \tag{4-4-6}$$

相同。这里 λ 是常数，$u_0(x)$ 为给定的初始值。另外，对于式（4－4－1），在一般情况下在 $x=0$ 处还需要定义边界条件。因方程式（4－4－1）仅含一次偏微分，所以相应的边界条件为 Dirichlet（狄利克莱）型，不妨暂时把边界条件用矩阵写成一般形式，即为

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{U}(0,t)=\boldsymbol{g}(t) \tag{4-4-7}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是 $r\times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{g}(t)$ 为 r 维列矩阵；r 为边界条件的个数，在下面将会知道，r 必须等于矩阵 A 的正特征值的个数。

当然初始条件式（4－4－2）与边界条件式（4－4－7）必须满足相容性条件，即

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{U}_0(0)=\boldsymbol{g}(0) \tag{4-4-8}$$

因此由式（4－4－1）、式（4－4－2）与式（4－4－7）所定义的问题被称为初边值问题（又称混合初边值问题）。现将对应于 $\boldsymbol{A}$ 的对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 写为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_1,\boldsymbol{\Lambda}_2),\ \boldsymbol{\Lambda}_1\geqslant 0,\ \boldsymbol{\Lambda}_2<0 \tag{4-4-9}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_r),\quad \boldsymbol{\Lambda}_2=\mathrm{diag}(\lambda_{r+1},\lambda_{r+2},\cdots,\lambda_m) \tag{4-4-10}$$

式中，$\boldsymbol{\Lambda}_1$ 为对角元素为 $\lambda_i>0$ 的对角矩阵；$\boldsymbol{\Lambda}_2$ 为对角元素为 $\lambda_i<0$ 的对角矩阵。

相应地式（4－4－4）也就被分解为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^{(1)}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}_1\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^{(1)}}{\partial x}=0\\ \boldsymbol{W}^{(1)}=[w_1,w_2,\cdots,w_r]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{4-4-11}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^{(2)}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}_2\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^{(2)}}{\partial x}=0\\ \boldsymbol{W}^{(2)}=[w_{r+1},w_{r+2},\cdots,w_m]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{4-4-12}$$

这里 $\boldsymbol{W}^{(1)}$ 对应于正特征值，称为流入分量；$\boldsymbol{W}^{(2)}$ 对应于负特征值，称为流出分量；而用矩阵表达的边界条件式（4－4－7）此时就变为：

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}\cdot[\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2]\cdot\left[\boldsymbol{W}^{(1)},\boldsymbol{W}^{(2)}\right]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{W}^{(1)}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{W}^{(2)}=\boldsymbol{g}(t) \tag{4-4-13}$$



式中，$\boldsymbol{R}_1$ 是 $m\times r$ 阶矩阵，$\boldsymbol{R}_2$ 是 $m\times(m-r)$ 阶矩阵；$\boldsymbol{W}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{W}^{(2)}$ 分别为 r 维与 $(m-r)$ 维列向量。

当

$$\det(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_1)\neq 0 \tag{4-4-14}$$

时，则式（4-4-13）变成用矩阵表达的如下形式的边界条件

$$\boldsymbol{W}^1(0,t)=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{W}^{(2)}(0,t)+\tilde{\mathbf{g}}(t) \tag{4-4-15}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为 $r\times(m-r)$ 阶矩阵；$\tilde{\boldsymbol{g}}$ 与 $\boldsymbol{W}^{(2)}$ 分别为 r 维与 $(m-r)$ 维列向量；$\boldsymbol{M}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{g}}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{M}=-(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_1)^{-1}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_2) \tag{4-4-16}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(t)=(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_1)^{-1}\cdot\boldsymbol{g}(t) \tag{4-4-17}$$

这里 $\boldsymbol{M}$ 矩阵表示了反射规律，即当考虑波的传播时，式（4-4-15）的第一项表示了边界上波的反射规律，也可以理解为流出分量 $\boldsymbol{W}^{(2)}$ 在边界上被部分的反射而转化成的流入分量。式（4-4-15）还表明：对每个流入特征变量应该给边界条件。在实际计算问题中，边界值往往需由设计条件或者试验测量数据提供，因此可以将这时的边界条件写为如下矩阵形式

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}(0,t)=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(2)}+\boldsymbol{g}_1(t) \tag{4-4-18}$$

式中

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}^{(1)}\\ \boldsymbol{\xi}^{(2)}\end{bmatrix} \tag{4-4-19}$$

这里 $\boldsymbol{\xi}$ 可以是与 $\boldsymbol{W}$ 不相同的变量。$\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ 为 r 维列向量，$\boldsymbol{\xi}^2$ 为 $(m-r)$ 维列向量，$\boldsymbol{N}$ 为 $r\times(m-r)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{g}_1(t)$ 为 r 维列向量。为了使式（4-4-18）满足适定性要求，应当使它与式（4-4-15）等价。

令

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}^{(1)}\\ \boldsymbol{W}^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_2\\ \boldsymbol{S}_3 & \boldsymbol{S}_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}^{(1)}\\ \boldsymbol{\xi}^{(2)}\end{bmatrix} \tag{4-4-20}$$

式中 $\boldsymbol{S}_1$ 与 $\boldsymbol{S}_4$ 分别为 $r\times r$ 阶与 $(m-r)\times(m-r)$ 阶矩阵；而 $\boldsymbol{S}_2$ 为 $r\times(m-r)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{S}_3$ 为 $(m-r)\times r$ 阶矩阵。借助于式（4-4-20），下面分两种情况讨论式（4-4-18）与式（4-4-15）等价时应满足的关系式：

（1）当矩阵 $(\boldsymbol{S}_4+\boldsymbol{S}_3\cdot\boldsymbol{N})$ 为空矩阵时（即这时 r 等于 m），则两式等价便有下式成立，即

$$\boldsymbol{W}^{(1)}=\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{g}_1(t) \tag{4-4-21}$$

（2）当矩阵 $(\boldsymbol{S}_4+\boldsymbol{S}_3\cdot\boldsymbol{N})$ 存在逆矩阵时，则两式等价便有下列两式成立，即

$$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}_2)\cdot(\boldsymbol{S}_3\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}_4)^{-1} \tag{4-4-22}$$



$$\tilde{g} = [S_1 - (S_1 \cdot N + S_2) \cdot (S_3 \cdot N + S_4)^{-1} \cdot S_3] \cdot g_1(t) \tag{4-4-23}$$

例 12 以原始变量的一维可压缩非定常 Euler 方程组为例，说明边界条件的提法。

解 首先写出一维可压缩非定常 Euler 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + C\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{4-4-24}$$

式中

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ P \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix} \tag{4-4-25}$$

这里矩阵 C 有三个特征值 $u, u+a, u-a$，以及左右特征向量矩阵 L 与 R，其矩阵表达式为

$$LCR = \Lambda \tag{4-4-26}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho/2a & -\rho/2a \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \rho a/2 & -\rho a/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & \rho/a & -\rho/a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \rho a & -\rho a \end{bmatrix}, \tag{4-4-27}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho a \\ 0 & 1 & -1/\rho a \end{bmatrix}, \tag{4-4-28}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+a & 0 \\ 0 & 0 & u-a \end{bmatrix}, \tag{4-4-29}$$

特征变量 W 以及对角阵 Λ_1, Λ_2 分别为

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho - \dfrac{P}{a^2} \\ u + \dfrac{P}{\rho a} \\ u - \dfrac{P}{\rho a} \end{bmatrix}, \Lambda_1 = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u-a \end{bmatrix} \tag{4-4-30}$$

以下分四种情况讨论：

（1）亚声速入流 $(0 < u < a)$

这时 C 的前两个特征值为正，第三个特征值为负，所以在入流边界上应取

$$W^{(1)} = [w_1, w_2]^{\mathrm{T}}, \quad W^{(2)} = [w_3]$$



另外还有

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho a \\ 0 & 1 & -1/\rho a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ P \end{bmatrix}$$

① 如果取 $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = [u, P]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = [\rho]$，也就是说对 u 与 P 提边界条件，显然这时 $\boldsymbol{S}_4 = 0$，$\boldsymbol{S}_4$ 不可逆，因而问题不适定。

② 如果取 $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = [\rho, u]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = [P]$，即对 ρ 和 u 提边界条件，则 $\boldsymbol{S}_4 = \dfrac{1}{\rho u}$，$\boldsymbol{S}_4$ 可逆，因而问题适定。

③ 如果取 $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = [\rho, P]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = [u]$，即对 ρ 和 P 提边界条件，则 $\boldsymbol{S}_4 = -1$，$\boldsymbol{S}_4$ 可逆，因而问题适定。

（2）超声速入流 $(u > a > 0)$

这时矩阵 C 的所有特征值为正，因此对 ρ, u 与 P 都提边界条件。这时 $\boldsymbol{S}_4$ 为空矩阵，问题适定。

（3）亚声速出流 $(0 > u > -a)$

这时只有第二个特征值为正，因此应该取 $\boldsymbol{W}^{(1)} = [w_2]$，$\boldsymbol{W}^{(2)} = [w_1, w_3]^{\mathrm{T}}$。

于是有

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\rho a \\ 1 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1 & -1/\rho a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ P \end{bmatrix}$$

① 如果取 $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \rho$，则

$$\boldsymbol{S}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1/a^2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\rho a \end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{S}_4$ 可逆，对 ρ 提边界条件适定。

② 如果取 $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = u$，则

$$S_4=\begin{bmatrix}1 & -1/a^2\\0 & -1/\rho a\end{bmatrix}$$

S_4可逆，对u提边界条件适定。

③ 如果取$\xi^{(1)}=P$，则

$$S_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

S_4可逆，对P提边界条件也适定。

（4）超声速出流$(u<-a)$

这时矩阵C的所有特征值均为负，当然这时就不需要提任何边界条件。

4.4.2 单向波动方程的初、边值问题的提法

单向波动方程，常作为双曲型偏微分方程的模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4-4-31}$$

式中，a为常数。

该方程的通解（又称普遍解）为

$$u(x,t)=\varphi(x-at) \tag{4-4-32}$$

可以看出特征线是直线，沿着每一条特征线u保持着常值。换句话说，沿着每一条特征线传播的扰动不随时间而变化。

1. 关于纯初值问题

今给定如下的初值条件

$$u(x,0)=f(x)\qquad(-\infty<x<+\infty) \tag{4-4-33}$$

于是由式（4-4-31）与式（4-4-33）所构成初值问题的解为

$$u(x,t)=f(x-at) \tag{4-4-34}$$

另外，还可以用图（如图 4.2 所示）表示。显然，当$a>0$时，式（4-4-34）可以看作是一个向右传播的波。

2. 关于初边值问题的提法

当$a>0$时，特征线向右倾斜，如图 4.3（a）所示，因此除了初始条件$u(x,0)=f(x)$之外，还要在左边界上规定边界条件即$u(x_1,t)=\psi(t)$，而右边界上的u值将由初值和左边界值完全决定。因此在右边界上就不能规定边界条件。当$a<0$时，特征线向左倾斜，如图 4.3（b）所示，此时除了初始条件之外，还要在右边界上规定边界条件，而左边界上的u值将由初值



和右边值完全确定，因此在左边界上也就不能规定边界条件。综上所述，如果特征线自边界走向求解域内部，则在该边界上应该规定边界条件；反之，若特征线自求解域内部走向边界，则在该边界上不能规定边界条件。

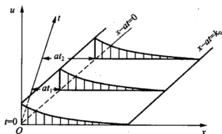


图 4.2 波动方程初值问题

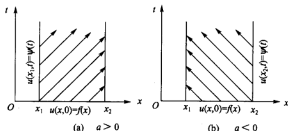


图 4.3 特征线走向与初边值提法

4.4.3 一维非定常 Euler 方程组初、边值问题的提法

可压缩、无粘、完全气体、一维非定常流动的 Euler 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial P}{\partial t}+u\dfrac{\partial P}{\partial x}+\rho a^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}\tag{4-4-35}$$

该方程组有三条特征线，它们分别是

$$\left.\begin{aligned}C^{\pm}:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\pm a\\ C^{0}:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\end{aligned}\right\}\tag{4-4-36}$$

现在讨论方程组式（4-4-35）在 (x,t) 平面上区域 R 的定解条件。这里 R 为 $0\leqslant x\leqslant l$，$0\leqslant t\leqslant t_0$ 的矩形区域，如图 4.4 所示。为了便于讨论，先假定 $u>0$。

（1）在 $x=0$ 边界上某点 A 处，若流动是超声速的，即 $u_A>a$，则其上的三条特征线 C^+,C^-,C^0 都指向求解域的内部，因此在 A 点要规定三个边界条件。如果在 $x=0$ 边界上某点 A' 处流动是亚声速的，则这时有两条特征线 C^0 与 C^+ 是指向求解域内部的，而另一条 C^- 指向求解域的外部，因此在 A' 点处只能规定两个边界条件。

（2）在$t=0$的任一点 B 处，无论流动是超声速还是亚声速，其上的三条特征线都指向求解域内部，所以在 B 点要规定三个初始条件。

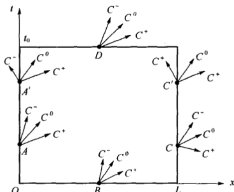


图 4.4　一维 Euler 流初边值问题的提法

（3）在$x=l$的某点 C 处，若该点流动是超声速，其上三条特征线都指向求解域的外部，因此在 C 点处不能规定任何边界条件。如果在$x=l$上的某点C'处流动是亚声速，这时两条特征线C^0与C^+指向求解域外部，而有一条特征线C^-指向求解域内部，因此在C'点要规定一个边界条件。

（4）在$t=t_0$的任一点D处，无论流动是亚声速、还是超声速，在其上的三条特征线都指向区域的外部，因此在 D 点处不能规定任何定解条件。

总之，对于双曲型方程组，我们可以根据特征线的走向决定求解域边界上任一点处定解条件的数目。

§4.5　广义一维非定常流动的特征线和相容关系

针对工程中涌现的大量可以用广义一维流解决的问题，这里想给出一个较实际而且相对严谨的数学与气体力学处理方法。与前几节内容相比，本节想更多地面对工程应用。

4.5.1　有摩擦、加热、添质效应的广义一维非定常流动

一、连续方程的分析

一维流动的连续方程在不同的坐标系下其表达形式略有不同，今引进参数δ，因此在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系下的一维连续方程可统一写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial V}{\partial x}+\delta\frac{\rho V}{x}=0 \tag{4-5-1}$$

当δ分别取 0，1 和 2 时，式（4－5－1）分别代表着直角坐标系、柱坐标系和球面坐标系下的连续方程。对于既有摩擦和加热，又有添质流量的广义一维非定常流动，这时连续方程如何，现讨论如下：

连续方程所反映的是质量守恒定律，摩擦和加热对它没有影响，因此只须在方程式



（4－5－1）中加上添质项即可。设通过 dx 段控制体侧面加入到主质量流量 $\dot{m}=\rho VA$ 中去的添质流量为 $d\dot{m}_i$，于是加入添质项以后，连续方程变成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial V}{\partial x}+\delta\frac{\rho V}{x}=b_1 \qquad (4-5-2)$$

其中

$$b_1=\frac{1}{A}\frac{d\dot{m}_i}{dx} \qquad (4-5-3)$$

二、动量方程的分析

显然这时摩擦和添质效应都直接影响到动量方程。对于摩擦项，设壁面切应力为 τ_W，摩擦系数 $f=\tau_W\Big/\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)$，气流横截面接触壁面周长（润湿周长）的平均值为 $C_W=4A/D$，于是 dx 控制体上所受的摩擦力在 x 轴上的投影为

$$\delta R_{fx}=-\frac{1}{2}\rho V^2 fC_W dx=-\frac{1}{2}\rho V^2 f\frac{4A}{D}dx=-\frac{\rho V^2 bfA}{2r_W}dx \qquad (4-5-4)$$

这里 b 是截面形状因子。例如当截面为圆截面时，r_W 为半径，则 $b=2$。对于添质项，这里讨论任意方向的添质流动。设添质流速为 V_i，它在 x 方向的分量为 V_{ix}，则由添质引起的动量变化率为 $d\dot{m}_iV_{ix}$，如图 4.5 所示。令 $\bar{V}_{ix}=V_{ix}/V$（如果添质流速方向垂直于主流方向，则 $\bar{V}_{ix}=0$；如果二者的速度矢量相同，则 $\bar{V}_{ix}=1$），于是添质对动量方程的附加项为

$$d\dot{m}_iV_{ix}=\rho V^2\left(\frac{V_{ix}}{\rho V^2}\frac{d\dot{m}_i}{dx}\right)dx=\rho V^2\left(\bar{V}_{ix}\frac{d\dot{m}_i}{\dot{m}dx}\right)Adx \qquad (4-5-5)$$

而没有添质流时，一维动量方程为

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t}+\rho V\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=0 \qquad (4-5-6)$$

有添质流时，将式（4－5－5）除以 Adx 后加到上式中去，便得

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t}+\rho V\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=b_2 \qquad (4-5-7)$$

式中

$$b_2=\rho V^2\left[\bar{V}_{ix}\frac{d\dot{m}_i}{\dot{m}dx}-\frac{2f}{D}\right] \qquad (4-5-8)$$

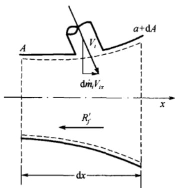


图 4.5　广义一维流动的控制体

三、能量方程的分析

加热和添质对能量方程都会产生影响，并且这时的流动并不是等熵流。由积分形式的能量方程，忽略质量力，有

$$\iiint_{\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau+\oint\!\!\!\oint_{\sigma}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)V_n\,\mathrm{d}\sigma+\oint\!\!\!\oint_{\sigma}pV_n\,\mathrm{d}\sigma\right]=\delta\dot{Q}$$

这里 $\delta\dot{Q}$ 是对控制体 τ 的加热率。令 e_i， $V_i^2/2$ 和 p_i/ρ_i 分别表示单位质量添质流体的内能、动能和压力功。将上式用于图 4.6 所示的控制体，便有

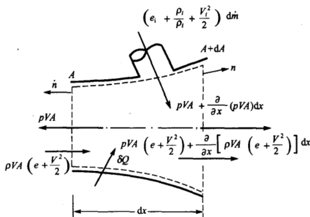


图 4.6　广义一维流动的控制体（用于能量方程）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]A\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho VA\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial x}(pVA)\,\mathrm{d}x-\left(e_i+\frac{p_i}{\rho_i}+\frac{V_i^2}{2}\right)\mathrm{d}\dot{m}_i=\delta\dot{Q} \tag{4-5-9}$$

式中，左端第一项表示控制体内的内能和动能随时间的变化率，它是由流动的非定常引起的；第二项表示由截面 A 处流入控制体 τ 的内能和动能与由截面 $A+\mathrm{d}A$ 处流出控制体 τ 的内能和动能之差引起的变化率；第三项表示压力功的变化率；第四项表示由添质引起的内能、动能和压力做功的增加率；而等式右端是加热率。气体的焓 h 是压力和密度的函数，因而内能



$e=h(p,\rho)-\dfrac{p}{\rho}=e(p,\rho)$。令

$$E=e+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2},\quad E_i=e_i+\frac{p_i}{\rho_i}+\frac{V_i^2}{2}$$

这里假设截面积 A 只与 x 有关，并且不随时间变化，则方程式（4－5－9）的第一项可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]A\mathrm{d}x=E\frac{\partial\rho}{\partial t}A\mathrm{d}x+\rho\frac{\partial E}{\partial t}A\mathrm{d}x-\frac{\partial p}{\partial t}A\mathrm{d}x$$

第二、三项合并可改写成

$$E\rho\frac{\partial V}{\partial x}A\mathrm{d}x+EV\frac{\partial\rho}{\partial x}A\mathrm{d}x+\rho V\frac{\partial E}{\partial x}A\mathrm{d}x+\rho VE\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

因而方程式（4－5－9）可写成

$$\begin{gathered}\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}A\mathrm{d}x+E\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial V}{\partial x}\right]A\mathrm{d}x-\frac{\partial p}{\partial t}A\mathrm{d}x+\\ \rho VE\frac{\mathrm{d}(\ln A)}{\mathrm{d}x}A\mathrm{d}x-E_i\mathrm{d}\dot{m}_i=\delta\dot{Q}\end{gathered}\tag{4-5-10}$$

由连续方程，上式左端第二项可用 $E\left(\mathrm{d}\dot{m}_i-\delta\dfrac{\rho V}{x}A\mathrm{d}x\right)$代替。因此能量方程有如下形式，即

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{E-E_i}{A\mathrm{d}x}\mathrm{d}\dot{m}_i+\delta\frac{\rho VE}{x}-\rho VE\frac{\mathrm{d}(\ln A)}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{A}\frac{\delta\dot{Q}}{\mathrm{d}x}\tag{4-5-11}$$

这里 $\delta=0,1,2$。另外动量方程式（4－5－7）可改写成

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)+V\frac{\partial p}{\partial x}=Vb_2\tag{4-5-12}$$

由方程式（4－5－11）减去式（4－5－12）后，得到

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=b_3\tag{4-5-13}$$

式中

$$b_3=-\frac{(E-E_i)}{A}\frac{\mathrm{d}\dot{m}_i}{\mathrm{d}x}+\delta\frac{\rho VE}{x}-\rho VE\frac{\mathrm{d}(\ln A)}{\mathrm{d}x}+\rho V\frac{\delta\dot{Q}}{\mathrm{d}x}-Vb_2\tag{4-5-14}$$

对于完全气体，有

$$\mathrm{d}h=c_p\mathrm{d}T=c_pT\left(\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right)=\frac{a^2}{\gamma-1}\left(\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right)$$

于是这时方程式（4-5-13）可改写为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=(\gamma-1)b_3 \tag{4-5-15}$$

因此，方程式（4-5-2）、式（4-5-7）和式（4-5-15）就是广义一维非定常流动的基本方程组，它含 V，P 和 ρ 这三个因变量，可联立求解。

4.5.2 广义一维非定常流动沿特征线的相容关系

现讨论既有摩擦、加热，又有添质效应的广义一维非定常流动的特征线和相容性方程。为更深刻的认识与掌握特征线方法，本节从特征线基本定义出发，采取了另外一种较直观的办法。为此将式（4-5-2）、式（4-5-7）和式（4-5-15）分别乘以 k_1，k_2 和 k_3 并且将所得三式相加，然后按照 V, P 和 ρ 的导数分项整理，得到

$$(k_1\rho+k_2\rho V)\left[\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{k_2}{(k_1+k_2V)}\frac{\partial V}{\partial t}\right]+(k_2+k_3V)\left[\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{k_3}{(k_2+k_3V)}\frac{\partial p}{\partial t}\right]+$$

$$(k_1V-k_3a^2V)\left[\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{(k_1-k_3a^2)}{(k_1V-k_3a^2V)}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]+\left(k_1\frac{\delta\rho V}{x}-k_1b_1-k_2b_2-k_3b_3\right)=0 \tag{4-5-16}$$

设 q 代表流动参数 V，p 和 ρ 中的任意一个，有

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial q}{\partial x}+\lambda\frac{\partial q}{\partial t}$$

其中 $\lambda=\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ 是 xt 平面上特征线的斜率。为了使方程式（4-5-16）成为全微分的形式，因此要求下式成立，即

$$\lambda=\frac{k_2}{(k_1+k_2V)}=\frac{k_3}{(k_2+k_3V)}=\frac{(k_1-k_3a^2)}{(k_1V-k_3a^2V)} \tag{4-5-17}$$

在上式成立的情况下，方程式（4-5-16）可改写成全微分形式，即

$$\begin{aligned}&\rho(k_1+k_2V)\mathrm{d}V+(k_2+k_3V)\mathrm{d}p+V(k_1-k_3a^2)\mathrm{d}\rho+\\&\left(k_1\frac{\delta\rho V}{x}-k_1b_1-k_2b_2-k_3b_3\right)\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{4-5-18}$$

方程式（4-5-18）是沿着 $\lambda=\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ 特征线成立的关系式，在确定了 λ 并将式中 k_i 消去以后，就是所要求的相容关系。下面先求出特征线方程。首先将方程式（4-5-17）写成关于 k_i 的代数方程组，即



$$\left.\begin{aligned}&\lambda k_1+(\lambda V-1)k_2=0\\&\lambda k_2+(\lambda V-1)k_3=0\\&(\lambda V-1)k_1-a^2(\lambda V-1)k_3=0\end{aligned}\right\}\tag{4-5-19}$$

欲使方程式（4－5－19）有非平凡解，则必须要使它的系数行列式为零，即有

$$(\lambda V-1)[(\lambda V-1)^2-a^2\lambda^2]=0\tag{4-5-20}$$

这个方程有三个根，令第一个因子为零，给出一个特征线方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)_0=\lambda_0=\frac{1}{V},\ \text{或}\ \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0=\frac{1}{\lambda_0}=V\ \text{（特征线 } c_0\text{）}\tag{4-5-21}$$

这就是迹线方程。也就是说在一维非定常流动中，迹线是特征线。若令方程式（4－5－20）中第二个因子为零，有 $\lambda V-1=\pm a\lambda$，给出两个特征线方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)_\pm=\lambda_\pm=\frac{1}{V\pm a},\ \text{或}\ \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_\pm=\frac{1}{\lambda_\pm}=V\pm a\ \text{（特征线 } c_\pm\text{）}\tag{4-5-22}$$

图 4.7 给出了一维非定常流动的特征线。在 xt 平面上，特征线共有三族，即迹线 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=1/V$，用 C_0 表示；非定常流动的右行波和左行波 $(\mathrm{d}t/\mathrm{d}x)_\pm=1/(V\pm a)$，用 $c_\pm$ 表示，这里 c_+ 为第 I 族特征线（即右行波），c_- 为第 II 族特征线（即左行波）。

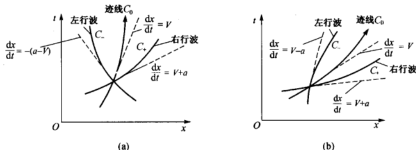


图 4.7　一维非定常流动的特征线

（a）亚声速 $V<a$；（b）超声速 $V>a$

现在来推导沿三条特征线所满足的相容关系。只要从式（4－5－19）中解出 k_i，再将它代入到式（4－5－18）即可。下面分别进行计算：

1. 对于迹线 c_0

因为 $\lambda V-1=0$，因此由式（4－5－19）便得到 $k_1=0,k_2=0$，而 k_3 为任意值。将这组的值代入到式（4－5－18）中便得到了沿迹线的相容性关系，即

$$\mathrm{d}p-a^2\,\mathrm{d}\rho=(b_3/V)\,\mathrm{d}x\quad\text{（沿迹线 } c_0\text{）}\tag{4-5-23}$$

2. 对于特征线 $c_{\pm}$

因为 $(\lambda V-1)^2=a^2\lambda^2$，故由方程组式（4－5－19）得到

$$k_1=-k_2\frac{\lambda V-1}{\lambda},\quad k_2=-k_3\frac{\lambda V-1}{\lambda},\quad k_1=a^2k_3 \tag{4-5-24}$$

显然，这三个方程不完全独立，在 k_1,k_2,k_3 中有一个是任意值。现在令 k_3 取任意值，并将式（4－5－24）代入到式（4－5－18）中，约去公因子 k_3，即得到沿特征线 $c_{\pm}$ 的相容关系为

$$\begin{gathered}\rho\left(a^2-V\frac{\lambda V-1}{\lambda}\right)\mathrm{d}V+\left(-\frac{\lambda V-1}{\lambda}+V\right)\mathrm{d}p+V\left(a^2-a^2\right)\mathrm{d}\rho+\\\left(\delta\frac{\rho Va^2}{x}-a^2b_1+\frac{\lambda V-1}{\lambda}b_2-b_3\right)\mathrm{d}x=0\end{gathered} \tag{4-5-25}$$

因为沿特征线 $c_{\pm}$ 有 $(\lambda V-1)^2=a^2\lambda$ 以及 $\lambda_{\pm}=1/(V\pm a)$，所以式（4－5－25）可简化为

$$\pm\rho a\mathrm{d}V+\mathrm{d}p=\left(a^2b_1-a^2\frac{\delta\rho V}{x}\pm ab_2+b_3\right)\mathrm{d}t \quad （沿特征线\ c_{\pm}） \tag{4-5-26}$$

因此式（4－5－23）与式（4－5－26）就是所要求的三个相容关系。对于流场内部任意一点，有三条特征线通过，每条特征线上有一个相容关系，利用这三个相容关系即可以确定该点的有关流动参数。如果在没有摩擦、没有加热和没有添质效应时，则 $b_1=b_2=b_3=0$，于是相容关系式（4－5－23）简化为 $\mathrm{d}p-a^2\mathrm{d}\rho=0$，而相容关系式（4－5－26）简化为

$$\pm\rho a\mathrm{d}V+\mathrm{d}p=-a^2\frac{\delta\rho V}{x}\mathrm{d}t \tag{4-5-27}$$

§ 4.6　非定常一维均熵流动及分析

一维非定常均熵流动模型是气体力学中使用最广泛、理论分析较完美的内容之一。首先讲述一下容易混淆的但又是常用到的几个概念：

1. 均熵流与等熵流

这是两个完全不同的概念。均熵流是指流场处处熵值相等的流动，也就是说对于均熵流动时存在着 $\nabla S=0$ 的关系。等熵流是指沿流线熵值保持不变的流动。但不同的流线可以有不同的熵值，因此等熵流动时随体导数 $DS/Dt=0$。例如，对于无粘、完全气体的流动，采用克罗克（Crocco）形式表达时，则运动方程式（1－3－22）简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}=T\nabla S-\nabla H \tag{4-6-1}$$

对于均熵流，则上式可进一步简化为



$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}=-\nabla H \tag{4-6-2}$$

2. 均能流与绝能流

这也是两个完全不同的概念。定常均能流是指整个流场滞止焓均匀分布，并且不随时间变化的流动。也就是说，流场中的每一个质点都具有相同的滞止焓值，因有 $\nabla H=0$；绝能流是指沿流线流体质点所具有的总能量保持不变的流动。当然，沿不同的流线流体所具有的总能量可以是不同的，因此绝能流只存在着随体导数 $\frac{DH}{Dt}=0$ 的关系。对于定常流动，这时迹线与流线重合，因此定常绝能流动中流体沿迹线也保持总能量不变。还应该指出：气体作绝能流动时，不论过程是否可逆，总焓和总温都保持不变。另外，绝能并不一定等熵；具有摩擦等损失的不可逆绝能流动，熵是增加的；只有可逆绝能流动才是绝能等熵流；在绝能等熵流动中，气流的所有总参数都保持不变。

下面讨论一维非定常均熵流动问题。本节可作为 § 4.2 与 § 4.5 节的特殊情况，在均熵流动的前提下，§ 4.2 与 § 4.5 节给出的普遍结果还能够进一步化简以方便工程计算。

4.6.1　均熵流动下的黎曼不变量

为了充分利用均熵的假设条件，这里想扼要推导均熵流的特征方程及黎曼不变量。在直角坐标系下讨论等截面、无添质流的一维非定常均熵流动，这时连续方程式（4-5-2）变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+V\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{4-5-1）*}$$

在均熵的假定下，这时只有一个独立的热力学变量，取 P 为独立变量，则 $\rho=\rho(p)$，

$$\mathrm{d}\rho=\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S\mathrm{d}p=\frac{1}{a^2}\mathrm{d}p$$

借助于上式，于是式（4-5-1）* 变为

$$\frac{1}{\rho a}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+a\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{4-6-3}$$

另外,将动量方程式（4-5-6）变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{4-6-4}$$

引进两个导数算子 $\frac{D^+}{Dt}$ 与 $\frac{D^-}{Dt}$，其定义为

$$\frac{D^+}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (V + a)\frac{\partial}{\partial x} \tag{4-6-5}$$

$$\frac{D^-}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (V - a)\frac{\partial}{\partial x} \tag{4-6-6}$$

这里 $\frac{D^+}{Dt}$ 表示相对于以速度 $V+a$（即随着特征线 C^+）移动的观察者而言的时间变化率；$\frac{D^-}{Dt}$ 表示相对于以速度 $V-a$（即随着特征线 C^-）移动的观察者而言的时间变化率。引进一个新的热力学函数，$F = F(P,S)$，在等熵的条件下有

$$F \equiv \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho a} \tag{4-6-7}$$

显然

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho a}\dfrac{\partial p}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{\rho a}\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \tag{4-6-8}$$

于是将式（4-6-4）与式（4-6-3）相加，得

$$\frac{D^+}{Dt}(V + F) = 0 \tag{4-6-9}$$

将式（4-6-4）减去式（4-6-3）得

$$\frac{D^-}{Dt}(V - F) = 0 \tag{4-6-10}$$

由上面两式可知：$V+F$ 和 $V-F$ 沿着它们各自的特征线不变，这里将这些不变量记作 J^+ 与 J^-，即

$$\begin{cases} J^+ \equiv V + F \\ J^- \equiv V - F \end{cases} \tag{4-6-11}$$

式中，J^+ 与 J^- 常称作黎曼不变量。将其与式（4-2-25）中的 J_i 相比，这里的 J^+ 与 J^- 仅仅是在均熵流动这个特定条件下的不变量，而 J_i 适用于一般的一维 Euler 流动。另外，将式（4-6-7）微分，得

$$dF = \frac{dp}{\rho a} \tag{4-6-12}$$



在熵不变的情况下，$\mathrm{d}P = a^2\mathrm{d}\rho$ 。注意到式（1－9－92）与式（1－9－94），这时 $\mathrm{d}p$ 又可表示为

$$\mathrm{d}p = \frac{\rho a}{\Gamma - 1}\mathrm{d}a \tag{4-6-13}$$

式中 Γ 为基本气动导数（见（1－9－95）式定义），于是 $\mathrm{d}F$ 可以表示为

$$\mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}p}{\rho a} = a\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}a}{\Gamma - 1} \tag{4-6-14}$$

因此与之对应的积分形式为

$$F = \int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho a} = \int_{\rho_0}^{\rho}a\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \int_{a_0}^{a}\frac{\mathrm{d}a}{\Gamma - 1} \tag{4-6-15}$$

这里 p_0, ρ_0, a_0 指的是同一个参考状态下的参数。对于完全气体，则 $\Gamma = (\gamma+1)/2$ ，由式（4－6－15），则

$$F = \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_0)$$

为方便起见，许多书中常将参考状态的 a_0 取为零，于是这时的 F 可写为

$$F = \frac{2a}{\gamma - 1} \tag{4-6-16}$$

因此对于完全气体，则黎曼不变量为

$$\begin{cases} J^+ = V + \dfrac{2}{\gamma - 1}a \\ J^- = V - \dfrac{2}{\gamma - 1}a \end{cases} \tag{4-6-17}$$

在 $x-t$ 物理平面上，定义：J^+ 所对应的特征线为第 I 族特征线，记作 C^+ ； J^- 所对应的为第 II 族特征线，记作 C^- ；于是

沿第 I 族 C^+：
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{V + a} & (4-6-18\mathrm{a}) \\ V + \dfrac{2}{\gamma - 1}a = C_1 = J^+ & (4-6-18\mathrm{b}) \end{cases}$$

沿第 II 族 C^-：
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{V - a} & (4-6-19\mathrm{a}) \\ V - \dfrac{2}{\gamma - 1}a = C_2 = J^- & (4-6-19\mathrm{b}) \end{cases}$$

这里常数 C_1 和 C_2 就是对应的黎曼不变量 J^+ 与 J^- 的取值。显然，它们沿着一条特征线是常



数，而沿不同的特征线其常数值一般也是不同的。另外，式（4-6-18b）与式（4-6-19b）为沿着 C^+ 与 C^- 特征线的相容性关系。将其与式（4-5-27）相比，显然这里仅仅是在均熵流动这个特定条件下的结果，而式（4-5-27）没有这个限制。当然，如果纯粹想得到式（4-6-18b）与式（4-6-19b）这两个关系式，也可以直接由式（4-5-27）出发，引进均熵流与完全气体这两个约束条件便能够得到。本节之所以如此处理，其目的在于将新的热力学函数 F 以及两个导数算子 D^+/Dt 与 D^-/Dt 介绍给读者。在均熵流动下，式（4-6-11）定义的 J^+ 与 J^- 较式（4-6-17）相比有更大的通用性。另外，在 $V-a$ 状态平面上，这时的特征线是直线。

4.6.2 初值问题的依赖域与影响区

首先考虑式（4-6-9）与式（4-6-10）所表示的平面波。对于均熵流动，假定在 $t=0$ 时 ab 线上速度 $V(x)$ 与压强 $p(x)$ 的分布已给出，如图 4.8（a）所示，于是点 d 上的 V 与 p 值便可完全决定了。从式（4-6-9）与式（4-6-10）可知，$J_d^+=J_a^+, J_d^-=J_b^-$，即

$$V_d+F_d=J_a^+,\qquad V_d-F_d=J_b^-$$

这里 J_a^+，J_b^- 为已知的初值，于是 V_d 与 F_d 便可由下式得到

$$V_d=\frac{1}{2}\left(J_a^+ + J_b^-\right),\quad F_d=\frac{1}{2}\left(J_a^+ - J_b^-\right) \tag{4-6-20}$$

因为，图 4.8（a）所示的三角形 abd 内任意一点的状态都可以由 ab 线上的原始状态来决定，因此 ab 线段称为 d 点的依赖域[21]。如图 4.8（b）所示，自 Q 点沿气流方向引出两条马赫线表示了该点的微弱扰动传播区域的边界，也就是说该点的信息只能影响如图 4.8（b）所示的下游阴影区域，因此该区域称为点 Q 的影响区。

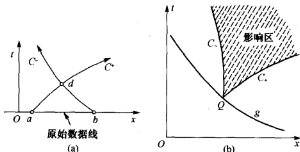


图 4.8 初值问题的依赖域与影响区

（a）依赖域；（b）影响区



4.6.3 简单波区的性质及流动参数计算

一、简单波的性质

从物理上讲，当扰动仅从一个方向向着均匀流动区域传播时，就产生了简单波。例如，假设管道中有不变的定常流动，在某一瞬时在某一点 A 上，例如采用关闭一个阀门的办法（如图 4.9 所示）引进一个扰动（不一定是小扰动）。简单波区的特征线具有一些特殊的性质：

（1）考察 C^- 特征线（如图 4.10 所示），它们全部穿过均匀区。沿着这些特征线的每一条，它的黎曼量 J^- 应等于 $V_0-F_0=\text{const}$（这里 V_0,F_0 属于均匀区的值，是已知量）。于是这些特征线 C^- 上的黎曼量处处相等，都等于

$$V-F=J_0^-=\text{const} \tag{4-6-21}$$

（2）考察简单区的一条典型的特征线 C_k^+（见图 4.10）。沿着这条特征线

$$V+F=J_k^+$$

显然，C_k^+ 线上每点 V 与 F 的值可借助于式（4-6-20）决定（这相当于图 4.8（a）中的 ad 线为 C_k^+，db 线为 C^- 特征线，点 d 为 C_k^+ 上所考察的任一点），可写为

$$\left.\begin{aligned}V_k&=\frac{1}{2}\left(J_k^++J_0^-\right)\\F_k&=\frac{1}{2}\left(J_k^+-J_0^-\right)\end{aligned}\right\} \tag{4-6-22}$$

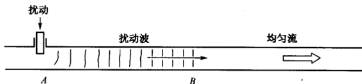


图 4.9　简单波的物理说明

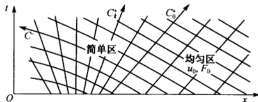


图 4.10　$x-t$ 平面上的简单波区

由式（4-6-22）可知，在同一条 C_k^+ 线上的各个点有相同的 V_k 与相同的 F_k 值。由于同一条线上各点的 F 值相同，所以各点的全部热力学参数（P,ρ,T 等）也分别相同，特别是同一条线上各点处声速 a 值都相同。因此，沿着每一条 C_k^+ 特征线，$(V+a)$ 的值在各点（指这条 C^+ 线上的点）都相同，故 C^+ 特征线都是直线。

（3）在简单波区域内，V 与 a 互为单值函数。

二、简单波的类型与流动参数计算

简单波大体上可分为四类，即右行膨胀波、右行压缩波、左行膨胀波和左行压缩，如图 4.11 所示。左行波（即左行膨胀波与左行压缩波的统称）与右行波（即右行膨胀波与右行压缩波的统称）在原理上是一样的，只不过扰动传播的方向相反。图 4.9 给出的是右行波的示意图，在右行简单波区中有一族形状为直线的特征线 C^+，其特征线方程为

$$dx/dt=V+a \tag{4-6-23}$$

考虑到简单波的性质，于是积分后得到

$$x=(V+a)t+f_1(V) \tag{4-6-24}$$

式中，$f_1(V)$ 是关于 V 的积分常数

在这个简单波区内，有一个黎曼不变量（这里为 J_0^-）为普适常数。对于完全气体

$$V-\frac{2}{\gamma-1}a=C_0 \tag{4-6-25}$$

或者

$$V_1-\frac{2}{\gamma-1}a_1=V_2-\frac{2}{\gamma-1}a_2=C_0 \tag{4-6-25）*}$$

这里 C_0 为常数；下标 1 和 2 分别为波前和波后的参数。同样地，对于左行波，在左行简单波区域中，它有一族特征线 C^- 为直线，其特征线方程为

$$\frac{dx}{dt}=V-a \tag{4-6-26}$$

于是积分上式得到

$$x=(V-a)t+f_2(V) \tag{4-6-27}$$

式中，$f_2(V)$ 是关于 V 的积分常数。

在这个简单波区内，也有一个黎曼不变量（这里为 J_0^+）为普适常数。对于完全气体有

$$V+\frac{2}{\gamma-1}a=C_0 \tag{4-6-28}$$



或者

$$V_1+\frac{2}{\gamma-1}a_1=V_2+\frac{2}{\gamma-1}a_2=C_0 \tag{4-6-28}$$ *

式中，C_0 为常数；下标 1 和 2 分别为波前和波后的参数。

如果简单波是由 $x-t$ 平面上一点发出的，则称为中心简单波。在这种情况下式（4-6-24）与式（4-6-27）中的 f_1 与 f_2 都等于零。显然，对于中心简单波来讲，中心点为奇点，该点的流动参数具有多值性。

例 13　假定右行中心膨胀波前的参数 a_0 为已知，并且 $V_0=0$，又知道波后温度为 T_2，试求膨胀波的范围以及在 $x-t$ 图上任意一点 Q 处的流动参数。

解　首先确定膨胀波的范围。第一道膨胀波（又称波头）的位置，借助于式（4-6-24）为 $(x/t)_1=a_0$；最后一道膨胀波（又称波尾[22]）的位置 $(x/t)_2$ 应该由 T_2 决定。注意到 $a_2=\sqrt{\gamma RT_2}$，于是由式（4-6-25）并注意此时 $V_0=0$，得

$$V_2=\frac{2}{\gamma-1}\left(\sqrt{\gamma RT_2}-a_0\right)$$

将上式代入到式（4-6-24）并注意到 $f_1(V)=0$，得

$$\left(\frac{x}{t}\right)_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\sqrt{\gamma RT_2}-\frac{2}{\gamma-1}a_0$$

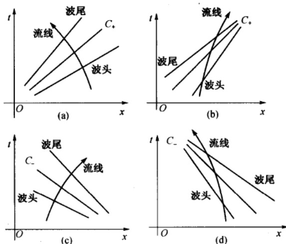


图 4.11　压缩波与膨胀波

（a）右行膨胀波；（b）右行压缩波；（c）左行膨胀波；（d）左行压缩波

于是任意一点 $Q(x^*,t^*)$ 处的参数可由式（4-6-24）与式（4-6-25）得到

$$\begin{cases} V = \dfrac{2}{\gamma+1}\left(\dfrac{x^*}{t^*} - a_0\right) \\ a = \dfrac{2}{\gamma+1}a_0 + \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{x^*}{t^*} \end{cases}$$

例 14 考察一个半无限长的圆管，其左端有一个可移动的活塞，右端伸至无穷远，管内充满着静止的气体。若活塞由静止开始以速度 $V_p = -bt$ 作等加速运动如图 4.12 所示，试求管内任意时刻的速度分布。

解 因活塞往左移动，这时扰动产生一个右行膨胀波。设 $t=0$ 时，活塞位于 $x=0$ 处；于是在 t 时刻，活塞移动到

$$x = \int_0^t V_p \mathrm{d}t = -\frac{b}{2}t^2 \tag{*1}$$

显然，它就是 t 时刻最后一道膨胀波的位置。当然，紧靠活塞的气体速度（即波后速度）应等于活塞的速度，即

$$V = V_p = -bt \tag{*2}$$

它表示 t 时刻最后一道膨胀波波后气体的速度。假设管内未受扰动区域的声速为 a_0，由式（4-7-5），可求出时刻 t 最后一道膨胀波波后的声速为

$$a = a_0 - \frac{\gamma-1}{2}bt \tag{*3}$$

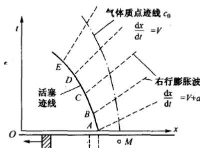


图 4.12 活塞加速往左运动而产生的右行膨胀波

将式（*1）、式（*2）、式（*3）代入到式（4-6-24）便能够确定出积分常数 $f_1(V)$ 为

$$f_1(V) = \frac{a_0}{b}V + \frac{\gamma}{2b}V^2 \tag{*4}$$

于是将式（*3）与式（*4）代入到式（4-6-24）便可以得到关于 V 的方程，即

$$\frac{\gamma}{2b}V^2 + \left(\frac{\gamma+1}{2}t + \frac{a_0}{b}\right)V + (a_0 t - x) = 0$$

由此解出 V，便得到了管内任意时刻 t 的速度分布为



$$V=-\frac{1}{\gamma}\left(a_0+\frac{\gamma+1}{2}bt\right)+\frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(a_0+\frac{\gamma+1}{2}bt\right)^2-2\gamma b(a_0t-x)} \tag{*5}$$

上式的根号前只能取正号。可以验证：取负号时，不满足 $x=0$，$t=0$ 时 $v=0$ 的初始条件。

§ 4.7　波的相互作用

简单波和激波迟早会到达边界，并在边界上引起反射或干扰。本节讨论这类各种不同的过程。

4.7.1　特征线在刚性边界上的反射

作为例子，图 4.13 给出了一个中心膨胀波（又称中心稀疏波）从静止壁面上反射的情况。假设入射的 C^+ 特征线所具有的 J_i^+ 值已知，希望求出反射的 C^- 特征线上的 J_r^- 值。考虑到一般性，假设反射边界具有某个速度 V_b（正好象在那儿有一个活塞），因此边界处流体的速度也必然为 V_b，故

$$J_i^+=V_b+F_b$$
$$J_r^-=V_b-F_b$$

这里 F_b 是壁面处热力学参数 F 的值。消去 F_b 便得到

$$J_r^-=-J_i^++2V_b \tag{4-7-1}$$

同样地对于左边界，这时入射的为 C^- 特征线，反射的为 C^+ 特征线，相应结果为

$$J_r^+=-J_i^-+2V_b \tag{4-7-2}$$

对于固定边界，则 $V_b=0$，因此这时特征线进行简单的反射，只是改变符号而模不变。

由此，可以得到以下两点推论：

（1）膨胀波遇到不动的固壁，将反射为膨胀波。

（2）压缩波从静止封闭端反射后，仍为压缩波。

下面再以一道小扰动的膨胀波为例讲一下计算过程的细节。假设膨胀波前后的压力比 p_1/p_2 已知，波前为静止区①，其参数已知，如图 4.14 所示。气体在膨胀波通过后由静止变成向左运动，当膨胀波遇到固壁时，波后的运动气体与不

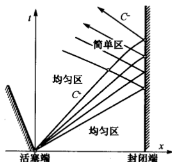


图 4.13　中心膨胀波在封闭端的反射



动的固壁接触。这时，边界条件就不满足，因为波后气体的速度为V_2，方向向左，而固壁要求气体速度等于零。因此，固壁相当于对气体产生了一个膨胀的扰动，其结果产生一道左行膨胀波。当这一道膨胀波通过后，使波后气体速度$V_3=0$，这样就满足了固壁上的边界条件。由此得出结论：膨胀波遇到不动的固壁反射为膨胀波。若封闭端不是静止固壁，而是运动的活塞，该活塞向右运动。当活塞运动速度小于V_2时，仍反射成膨胀波。当活塞运动速度正好等于V_2时，不产生反射波。膨胀波在固壁上反射可用状态平面图表示，如图 4.14（b）所示。静止气体①中声速为 a，在 $V-a$ 图上由点 1 表示。入射波沿特征线 Γ_-，按相容关系

$$-\frac{2}{\gamma-1}a_1=V_2-\frac{2}{\gamma-1}a_2 \quad 或 \quad V_2=\frac{2}{\gamma-1}(a_2-a_1) \tag{4-7-3}$$

把状态从点 1 改变为点 2。由此得出V_2，a_2与压力比p_2/p_1的关系为

$$V_2=\frac{2a_1}{\gamma-1}\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)=\frac{2a_1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}-1\right] \tag{4-7-4}$$

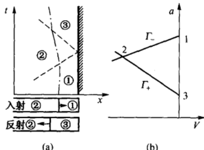


图 4.14　膨胀波在管子封闭端反射

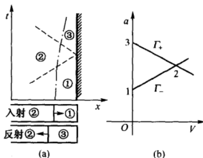


图 4.15　压缩波在管子封闭端处反射

为了使壁面处流体运动速度为零，反射膨胀波必须沿特征线Γ_+把状态从点 2 改变为点 3，点 3 处$V_3=0$，即

$$V_2+\frac{2}{\gamma-1}a_2=\frac{2}{\gamma-1}a_3 \tag{4-7-5}$$

所以，由式（4-7-3）与式（4-7-4）得到

$$a_3=\frac{\gamma-1}{2}V_2+a_2=2a_2-a_1 \tag{4-7-6}$$

入射膨胀波的特征线斜率$\frac{dx}{dt}=V+a$，其中 V 和 a 应按①区和②区的平均值来确定，即根据



图 4.14（b）上线段 12 的中点来确定。关于右行压缩波在固壁上反射的情形，与上述相同。其主要结论是：压缩波在静止封闭端反射后仍为压缩波。经压缩波扰动后，速度和声速增大。其反射前后的参数变化如图 4.15 所示。

4.7.2　膨胀波或压缩波在开口端处的反射

为了确定波在开口端处反射的一般特性，现在讨论一种最简单情形。设有一小扰动的膨胀波，波前后的压力比 P_2/P_1 已知。膨胀波向开口端运动，如图 4.16 所示。①区与外界相通，外界保持恒定的压力 P_a，所以①区的压力 $P_1=P_a$。膨胀波到达开口端时，波后压力较低的气体与大气接触，引起压力不平衡。于是管内气体得到压力增量，其结果的反射一道压缩波，使波后气体压力 $P_3=P_1=P_a$，即反射波是压缩波。由此得出结论：膨胀波在开口端反射为压缩波。

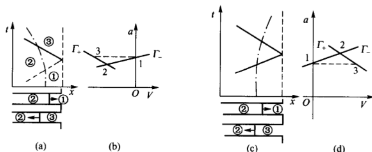


图 4.16　波在开口端处的反射

（a）与（b）为膨胀波；（c）与（d）为压缩波

从①区到②区的计算方法和前面所述的相同。从②区到③区是跨过第Ⅱ族特征线，应该利用沿第Ⅰ族特征线的相容关系，即

$$V_2+\frac{2}{\gamma-1}a_2=V_3+\frac{2}{\gamma-1}a_3$$

因为 $P_3=P_1=P_a$，根据等熵关系，有 $a_3=a_1$，所以

$$V_3=V_2+\frac{2}{\gamma-1}(a_2-a_1) \qquad (4-7-7)*$$

对于右行压缩波在开口端静止气体上反射的情形，可作类似的讨论。其主要结论是：压缩波从开口端反射为膨胀波。其反射前后的参数变化情况如图 4.16 所示。当然，上述过程也可用热力学 F 与黎曼不变量 J^+ 与 J^- 进行讨论。考察从一根管道排入静止大气的非定常流动。

在定常流动中，只要排气是亚声速的，则排气流动恰好具有周围的外界大气压强 P_a；因此那里边界条件简单地为 $P=P_a$；这个条件对于非定常流动通常也是适用的，虽然排气流动的脉动会局部地影响着周围的压强，但这个条件应该说是一个很好的近似。对于均熵流动，假设相应于周围压强的 F 值是个恒定值，即 $F_a=F(P_a)$，又由于 J_i^+ 是已知的，在出口为亚声速流动时（如图 4.17（a）所示），于是

$$J_i^+=V+F_a$$

$$J_r^-=V-F_a$$

消去 V 便得到

$$J_r^-=J_i^+-2F_a \tag{4-7-7}$$

对于开口端在左边的情况，相应的结果是

$$J_r^+=J_i^-+2F_a \tag{4-7-8}$$

对于出口为超声速流动，这时两族特征线都从管内入射到开口端上，如图 4.17（b）所示，因此不存在反射的特征线，即在超声速流动中，声波不能逆流传播。在这种情况下，出口平面上的状态被 J^+ 与 J^- 值所予先确定，并且通常出口压强与出口大气压强不同。

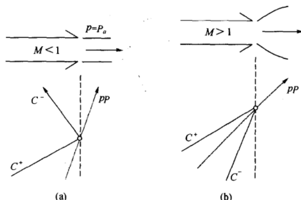


图 4.17 在开口端处不同流动下的波反射

4.7.3 等熵波之间的相互作用

当两道膨胀波迎面相遇时，如 4.18 所示，②区的气体与③区的气体接触后，两道波互相透射并按原方向继续前进。由于②区和③区的速度和压力都不相等，因此引起新的扰动。波透射后，相交面附近气体变成图中④区。①区参数 V_1，a_1 已知，在状态平面上可标出点 1。



由①区到②区和由①区到③区分别为右行波和左行波，容易算出点 2 和点 3。由②区到④区和由③区到④区分别利用沿第Ⅰ族和第Ⅱ族特征线上的相容关系，有

$$V_4+\frac{2}{\gamma-1}a_4=V_2+\frac{2}{\gamma-1}a_2$$

$$V_4-\frac{2}{\gamma-1}a_4=V_3-\frac{2}{\gamma-1}a_3$$

由上面两式容易解出

$$a_4=\frac{1}{2}\left[a_2+a_3+\frac{\gamma-1}{2}(V_2-V_3)\right] \tag{4-7-9}$$

根据式（4-7-3），$V_2=\frac{2}{\gamma-1}(a_2-a_1)$，同理 $V_3=\frac{2}{\gamma-1}(a_1-a_3)$，把它们代入上式得

$$a_4=a_2+a_3-a_1 \tag{4-7-10}$$

因为 a_2 与 a_3 均小于 a_1，所以 a_4 小于 a_2 与 a_3。这表明由②、③区到④区，声速下降，压力下降，即新形成的透射波是膨胀波。由此可以得出结论：膨胀波与膨胀波迎面相交后，其透射波仍为膨胀波。

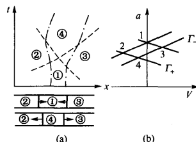


图 4.18 两道膨胀波相互作用

作类似的分析，还可以得到如下结论：压缩波与压缩波迎面相交后，其透射波仍为压缩波。膨胀波与压缩波迎面相交后，其透射波与对应的入射波为同一类型。综上所述，简单波与简单波迎面相交后，相互作用的结果遵循这样一个规律即压缩波的透射波仍为压缩波，膨胀波的透射波仍为膨胀波。

§4.8 有间断面的一维非定常流动

含间断面的数值分析与研究已成为当代气体力学与计算流体力学的热点之一。尤其是追踪运动界面，捕捉强间断面与接触间断面等问题在国内外学术界一直深受重视[19, 22-26]。本节想讨论一下在一维非定常流动下间断面的运动规律、两波的相互作用以及初始间断分解的黎曼问题。首先介绍一下间断面。间断面有两类：一类是激波间断，另一类是接触间断。所谓接触间断是指两种不同的气体或者同种气体的两个不同状态参数的分界面，初始间断也可看作接触间断的一种形式。

4.8.1 运动激波与驻激波之间的共性及其重大区别

一般运动激波与运动正激波问题已分别在§2.2 与§2.3 节作过详述。这里仅结合一维非定常运动中所遇到的左行运动激波和右行运动激波的某些问题并结合第二章讲过的普遍理论作进一步的讨论。按照文献［27,28］的建议，选用了激波面相对于波前气体的相对传播速度 W（始终取为正值）和波前声速 a_1 作为研究运动激波时的重要参数。我们约定：气体进入激波面的一侧称为波前，并用下标“1”表示相应的气体参数；气体离开激波面的一侧称为波后，并用下标“2”表示相应的气体参数。选用了两种坐标系：一种是固定绝对坐标系（简称静止坐标系），另一种是激波相对坐标系（简称相对坐标系）。在静止坐标系中，选取坐标轴向右为正，N 代表激波面的绝对速度，V_1 与 V_2 分别代表波前与波后气体本身的绝对速度，N、V_1 与 W 间的关系是

$$\left.\begin{aligned}\text{右传波}: N = V_1 + W \\ \text{左传波}: N = V_1 - W\end{aligned}\right\} \tag{4-8-1}$$

在相对坐标系中，由于坐标系固连于激波面上，如图 4.19 所示，因此在这个坐标系下的观察者（常称相对观察者）看激波就变为驻激波了。

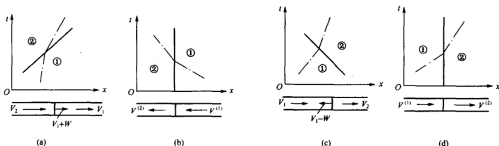


图 4.19 运动激波的两种坐标系

令

$$\left.\begin{aligned}w_1 = V_1 - N \\ w_2 = V_2 - N\end{aligned}\right\} \tag{4-8-2}$$

于是在相对坐标系下，激波的基本方程组变为

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2 = m_s \tag{4-8-3a}$$

$$P_1 + \rho_1 w_1^2 = P_2 + \rho_2 w_2^2 \tag{4-8-3b}$$



$$P_2 - P_1 = m_s(w_1 - w_2) = m_s^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) \tag{4-8-3b}$$ *

$$e_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}(w_1)^2 = e_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}(w_2)^2 \tag{4-8-3c}$$

显然式（4-8-3a）、式（4-8-3b）和式（4-8-3c）同时适用于右传激波和左传激波。在这三个方程中共含有七个未知数，即 P_1，ρ_1，V_1，P_2，ρ_2，V_2 和 N，因此仅有四个独立参量。另外，由于压强、密度、温度、声速等这类热力学静状态参量是不受观察者是否运动而发生变化的，因此静止坐标系和相对坐标系中的静状态量保持不变。然而滞止参数在两个坐标系中是不同的，计算时应格外注意。很显然，原来驻激波中的许多关系在运动激波下照常有效，例如

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1 - N}{V_2 - N} \tag{4-8-4}$$

$$N = \frac{\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1}{\rho_2 - \rho_1} \tag{4-8-5}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1(N - V_1)} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2(N - V_2)} \tag{4-8-6}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(N - V_1)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}(N - V_2)^2 \tag{4-8-7}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\dfrac{1}{\rho_2} - \dfrac{1}{\rho_1}} = -\rho_1^2(N - V_1)^2 = -\rho_2^2(N - V_2)^2 \tag{4-8-8a}$$

$$(N - V_1)(N - V_2) = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \tag{4-8-8b}$$

$$(V_2 - V_1)^2 = \frac{(P_2 - P_1)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 \rho_2} = \frac{2(P_2 - P_1)^2}{\rho_1\left[(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2\right]} \tag{4-8-9}$$

上面这几个式子，可以由式（4-8-3a）、式（4-8-3b）以及式（4-8-2）得到，它们并没有涉及能量方程。下面讨论能量方程，首先将式（4-8-7）变为两个等式，然后相减，可得到

$$(N - V_1)^2 - (N - V_2)^2 = (P_2 - P_1)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

于是将上式代入到式（4-8-3c）后得到

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)(P_1 + P_2) \tag{4-8-10}$$

对于完全气体

$$e = c_V T = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$$

借助于式（4－8－10）便得到一组显式的 R-H 关系，即

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2} \tag{4-8-11a}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)P_2 + (\gamma-1)P_1}{(\gamma+1)P_1 + (\gamma-1)P_2} \tag{4-8-11b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = \frac{\dfrac{P_2}{P_1} + \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1} + \dfrac{P_1}{P_2}} \tag{4-8-11c}$$

因此，R-H 关系对运动激波与驻激波都适用。另外，借助于式（4－8－11b）可将式（4－8－7）改写为

$$(N - V_1)^2 = \frac{1}{2\rho_1}\left[(\gamma-1)P_1 + (\gamma+1)P_2\right] \tag{4-8-12}$$

$$(N - V_2)^2 = \frac{1}{2\rho_2}\left[(\gamma-1)P_2 + (\gamma+1)P_1\right] \tag{4-8-13}$$

当然，式（4－8－12）也可由式（4－8－3b）*和式（4－8－11b）联立消去 ρ_2 后得到，即

$$(\rho_1 w_1)^2 = (\rho_2 w_2)^2 = \frac{\rho_1}{2}\left[(\gamma-1)P_1 + (\gamma+1)P_2\right] \tag{4-8-14}$$

按照国内教材的习惯，这里采用文献［24～26］中定义的

$$M_s = \frac{N - V_1}{a_1} \tag{4-8-15}$$

对右传波与左传波分别为

$$\begin{cases} \text{右传波：} & M_s = \dfrac{W}{a_1} \\ \text{左传波：} & M_s = -\dfrac{W}{a_1} \end{cases} \tag{4-8-15）*}$$

于是由式（4－8－12）便得到



$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_s^2+\frac{1-\gamma}{\gamma+1} \tag{4-8-16}$$

将上式与式（4－8－11b）联立并消去 P_2/P_1 项后得到

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)M_s^2}{2+(\gamma-1)M_s^2} \tag{4-8-17}$$

另外，注意到完全气体滞止温度 T_0 的定义，即

$$T_0=T+\frac{V^2}{2c_P}=T+\frac{\gamma-1}{2\gamma R}V^2 \tag{4-8-18}$$

式中，V 是气体的绝对速度。

于是由式（4－8－3c）便直接推出

$$T_{01}-T_{02}=\frac{N}{c_P}(V_1-V_2) \tag{4-8-19}$$

式中，N 为激波面的绝对速度。

显然 $T_{01}\neq T_{02}$，这一点是运动激波与静止激波的重要区别。当然，相应地还有 $P_{02}/P_{01}\neq\rho_{02}/\rho_{01}$，它们的比值应该由下面两式给出

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}=\frac{P_{02}}{P_2}\frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_{01}}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_S^2+\frac{1-\gamma}{\gamma+1}\right) \tag{4-8-20}$$

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}=\frac{\rho_{02}}{\rho_2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_1}{\rho_{01}}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{(\gamma+1)M_S^2}{2+(\gamma-1)M_S^2} \tag{4-8-21}$$

熵增由下式定出，即

$$S_2-S_1=c_V\ln\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\right] \tag{4-8-22}$$

引进激波后马赫数（又称伴流马赫数）M_2，它与 M_S 的关系为

$$M_2=\frac{V_2}{a_2}=\frac{V_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{\gamma-1}\left(M_S^2-1\right)\left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_S^2-1\right)\left(\frac{2}{\gamma-1}+M_S^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{4-8-23}$$

由上式可知，当 $M_S\to1$ 时，$M_2\to0$，这就是小扰动波的情况。当 $M_S\to\infty$，

$M_2\to\sqrt{\dfrac{2}{\gamma(\gamma-1)}}\approx1.89$，这说明伴流（或称激波后气体的跟随速度 V_2）可以达到超声速流动。

另外，将式（4－8－3c）改写为

$$\frac{w_1^2}{2}+\frac{a_1^2}{\gamma-1}=\frac{w_2^2}{2}+\frac{a_2^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\Lambda^2 \tag{4-8-24}$$

显然，如果将上式改写为两个等式，而后相减，并注意应用式（4－8－3b），便可得到

$$\frac{P_2-P_1}{\rho_2-\rho_1}=\Lambda^2 \tag{4-8-25}$$

另外，将式（4－8－7）改写为两个等式而后相乘便得到

$$w_1w_2=\frac{P_2-P_1}{\rho_2-\rho_1} \tag{4-8-26}$$

于是将上面两式相比较，便得到了运动激波的 Prandtl 关系式

$$w_1w_2=\Lambda^2 \tag{4-8-27}$$

值得注意的是，式（4－8－27）不再保证激波前后的气流在一侧为超声速，另一侧一定是亚声速了，而只能保证相对速度的绝对值，在激波前一定大于当地音速，而在激波后则一定小于当地声速；或者说激波相对于流体一定是以一个大于小扰动波的传播速度传播着。另外，由式（4－8－15）、式（4－8－3a）与式（4－8－17），便得到

$$\frac{V_2-V_1}{a_1}=\frac{2}{\gamma+1}\left(M_S-\frac{1}{M_S}\right) \tag{4-8-28}$$

由式（4－8－16）与式（4－8－17）又可得到

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{P_2}{P_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2=\frac{1}{(\gamma+1)^2}\left(2\gamma-\frac{\gamma-1}{M_S^2}\right)\left[2+(\gamma-1)M_S^2\right] \tag{4-8-29}$$

又由式（4－8－16）得

$$M_S=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{4-8-30}$$

注意到式（4－8－15）*，因此，式（4－8－30）中“+”号用于右传波，“－”号用于左传波，对于右传波，它的 M_S 始终是一个大于 1 的正值，并且 $V_2-V_1>0$；对于左传波，M_S 始终是一个负值，但它的绝对值仍是大于 1 的正数，并且 $V_2-V_1<0$;通常，运动激波可能出现下面四种情况：① 波前亚声速，波后仍是亚声速；② 波前亚声速，波后变成超声速；③ 波前超声速，波后仍是超声速；④ 波前超声速，波后变成亚声速。对于这四种情况，例题 15 给出了具体的实例。

例 15 试分析下面四个激波传播问题中激波两侧的流场属于哪一类流动状态：

（1）激波强度为 1.5 的正激波在静止空气的传播；

（2）激波强度为 4 的正激波在静止空气中的传播；

（3）激波强度为 1.5 的正激波向马赫数为 2 的超声速流中逆流传播（即流速方向与激波



传播方向相反）；

（4）强度为 4 的正激波向马赫数为 2 的超声速气流中逆流传播。

解　（1）由于通常称$\dfrac{P_2-P_1}{P_1}$为激波强度，因此这里$P_2=2.5P_1$；又因为波前气体静止，所以$V_1=0$；借助于式（4－8－10），则$(V_2/a_2)^2=0.378<1$，因此激波两侧都属于亚声速流动状态。

（2）因$V_1=0$，且这时$P_2=5P_1$，故由式（4－8－10）得$(V_2/a_2)^2=1.039>1$，因此此时波前是亚声速流动状态，波后则变为超声速流动状态。

（3）因为流速方向与激波传播方向相反，所以$V_1=-2a_1$；又这里$P_2=2.5P_1$，注意到$\dfrac{V_1}{a_2}=-2\dfrac{a_1}{a_2}=-2\sqrt{\dfrac{P_1\rho_2}{P_2\rho_1}}$，因此将式（4－8－11b）代入后再代入有关数据，便得到$\dfrac{V_1}{a_2}=-1.735$，又由式（4－8－10）得

$$\frac{V_2}{a_2}=\frac{V_1}{a_2}+\sqrt{\frac{2(P_2-P_1)^2}{\rho_2\left[(\gamma+1)P_1+(\gamma-1)P_2\right]}\frac{\rho_2}{\gamma P_2}}=-1.12$$

即$M_2>1$，表明此时激波两侧都属于超声速流动状态。

（4）因$V_1=-2a_1$，并且$P_2=5P_1$，于是$\dfrac{V_1}{a_2}=-1.5$，$\dfrac{V_2}{a_2}=-0.482$，即$M_2<1$，表明此时波前为超声速气流通过激波后变为亚声速气流。

4.8.2　运动正激波在静止气体中的传播

令V_1与V_2为激波前与波后的速度，N为激波面传播的速度，于是由式（2－2－24）得到正激波的基本方程组为

$$\rho_1(V_1-N)=\rho_2(V_2-N) \tag{4-8-31}$$

$$P_1+\rho_1(V_1-N)^2=P_2+\rho_2(V_2-N)^2 \tag{4-8-32}$$

$$h_1+\frac{1}{2}(V_1-N)^2=h_2+\frac{1}{2}(V_2-N)^2 \tag{4-8-33}$$

这个方程组共有 7 个参量：$P_1,\rho_1,P_2,\rho_2,u_1,u_2,N$；现在已知$V_1=0$，所以剩下的 6 个参量中只要再给出其中的三个参量则问题便可求解了。原来静止区域中的P_1,ρ_1一般总是已知的，因此另一个条件可以给激波强度$\Delta P/P_1$，也可以给激波传播的速度N，当然也可以给伴流速度（又称跟随速度）V_2；至于求解过程，这里从略。



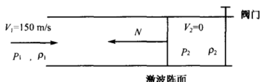


图 4.20 阀门突然关闭产生的激波传播问题

例题 16 空气在管道中以 150 m/s 的速度流动，其压力是 1.5×10^5 N/m²，温度为 300 K；在某一瞬时，管道末端的阀门突然关闭，于是就有一道正激波逆流向管道内传播，如图 4.20 所示，试求该激波相对于管壁的传播速度。

解 这个问题与上面我们所讲的情况恰好相反，即波前气体速度不为零，通过激波后其波后速度等于零。根据本情况，基本方程组可改写为

$$\begin{cases}\rho_1(N-V_1)=\rho_2 N & (4-8-34)\\ P_1+\rho_1(N-V_1)^2=P_2+\rho_2 N^2 & (4-8-35)\\ \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{P_1}{\rho_1}+\dfrac{1}{2}(N-V_1)^2=\dfrac{1}{2}N^2+\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{P_2}{\rho_2} & (4-8-36)\end{cases}$$

式中，V_1,P_1,ρ_1应认为是已知的（因 $\rho_1=P_1/(RT_1)$，故可算出 $\rho_1=1.742\ \text{kg/m}^3$）；由（4－8－27）式得到

$$P_2-P_1=-\rho_1(N-V_1)V_1 \tag{4-8-37}$$

注意到$V_2=0$以及式（4－8－37），于是由式（4－8－10）可得到

$$\rho_1(N-V_1)\sqrt{\frac{2}{\rho_1\left[(\gamma+1)P_2+(\gamma-1)P_1\right]}}=1$$

于是

$$N-V_1=\sqrt{\frac{(\gamma+1)P_2+(\gamma-1)P_1}{2\rho_1}}=a_1\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}}=a_1\sqrt{1-\frac{\gamma+1}{2}\frac{N-V_1}{a_1}\frac{V_1}{a_1}}$$

上式又可整理为

$$(N-V_1)^2+\frac{\gamma+1}{2}V_1(N-V_1)-a_1^2=0$$

解得

$$N=\frac{3-\gamma}{4}V_1+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}V_1\right)^2+a_1^2} \tag{4-8-38}$$

因本题$V_1=-150$ m/s，$T_1=300$ K，代入上式得到$N=298.7$ m/s；



4.8.3 激波的相互作用及接触间断面的计算

一、六种情况的综合分析与计算

考察一道激波与另外一个间断面相交，这个间断面可能是一道异族激波、一道同族激波、一个接触面、一个开口端或者一个封闭端。这些各种各样的相互作用都属于初值问题，图 4.21 给出了常见的六种相互作用的情况，即图 4.21（a）的 1-2，图 4.21（b）的 1-2，图 4.21（c）的 1-2-3，图 4.21（d）的 1-2-3，图 4.21（e）的 1-2-3 和图 4.21（f）的 1-2-3 区域中的状态都分别是已知的。未知区域的计算取决于压强和速度的匹配，下面针对完全气体对上属各种情况作一个综合性的分析与研究。

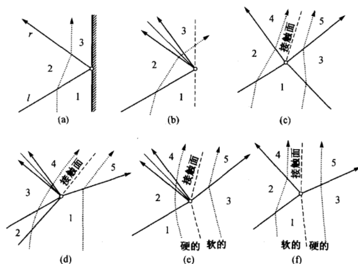


图 4.21 激波相互作用的六种情况

（a）激波在刚性壁或封闭端反射；（b）激波入射于恒压开口端；（c）异族激波相交；（d）同族激波相交；（e）激波入射于接触面；（f）激波入射于接触面

1. 激波在固壁上反射

设有一道右行入射激波，以某一速度在静止区域①中传播，波后②区中气体速度为 V_2；当激波遇到固壁时，②区中运动着的气体与固壁相撞，产生较高压力，必然反射一道左传反射激波，如图 4.21（a）所示。反射激波后③区气体又恢复静止。因此，入射激波和反射激波两者存在一定关系，即波两侧气体的相对速度之差值应该相等，即

$$V_2 - V_1 = V_2 - V_3 = V_2 \tag{4-8-39a}$$

或在激波坐标系中写出

$$w_1 - w_2 = w_3 - w_2 \tag{4-8-39b}$$

利用式（4-8-3b）容易求得

$$m_s = \frac{P_2 - P_1}{w_1 - w_2} = \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{1}{\rho_2}}} \tag{4-8-40}$$

所以

$$w_1 - w_2 = \sqrt{(P_2 - P_1)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)} \tag{4-8-41a}$$

同理

$$w_3 - w_2 = \sqrt{(P_2 - P_3)\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_2}\right)} \tag{4-8-41b}$$

借助于式（4-8-39b）以及上面二式，可以得到

$$(P_2 - P_1)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = (P_3 - P_2)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3}\right) \tag{4-8-42}$$

对于反射激波，利用关系式（4-8-11b），得

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{(\gamma+1)P_3 + (\gamma-1)P_2}{(\gamma+1)P_2 + (\gamma-1)P_3} \tag{4-8-43}$$

由式（4-8-11b）、式（4-8-42）与式（4-8-43）这三个式子，消去密度后便得到

$$(P_3 - P_2)^2\left[(\gamma+1)P_1 + (\gamma-1)P_2\right] = (P_2 - P_1)^2\left[(\gamma+1)P_3 + (\gamma-1)P_2\right]$$

它是关于 P_3 的二次代数方程，该方程有一个无实际意义的根 $P_3 = P_1$。消去因子 $(P_3 - P_1)$ 后即得到的用 P_1 和 P_2 表达的关于 P_3 的公式

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{(3\gamma-1)P_2 - (\gamma-1)P_1}{(\gamma-1)P_2 + (\gamma+1)P_1} = \frac{\dfrac{3\gamma-1}{\gamma-1}\dfrac{P_2}{P_1} - 1}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1} + \dfrac{P_2}{P_1}} \tag{4-8-44}$$

2. 激波在管道开口端反射

激波与管道开口端相互作用可能产生几种不同的结果。这主要取决于管内气体的速度和压力。下面仅讨论一种简单情况，即管口内外气体压力、速度相等的情形。设有一右行激波向开口端运动，如图 4.22 所示。当激波通过后，波后压力增高。激波到达开口端时，波后



②区的气体直接与外界接触。口内气体压力高于口外压力，这时开口端给予气体一个膨胀扰动，因而在开口端反射出一系列膨胀波，又因为压力是突然下降的，所以膨胀波是中心膨胀波，在膨胀波后的③区内，这时 $p_3 = p_1$。由于①区到②区的计算前面已讲过，现在讨论当②区的参数获得后，如何去计算③区的参数。利用沿第 I 族特征线的相容关系

$$V_3 + \frac{2}{\gamma-1}a_3 = V_2 + \frac{2}{\gamma-1}a_2$$

再由等熵关系，并考虑到 $p_3 = p_1$，得

$$\frac{a_3}{a_2} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

这样就可求出 a_3，然后再由上面二式消去 a_3，便得到关于 V_3 的关系式

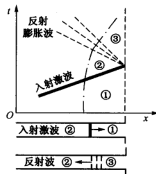


图 4.22　激波在开口端的反射

$$\frac{V_3 - V_2}{a_2} = \frac{2}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right] \qquad (4-8-45)$$

以上仅对 $V_2 < a_2$ 和 $V_3 < a_3$ 的情形作了讨论，更复杂的情况可参阅文献［5,29-31］，本书不作介绍。

3. 两激波相交将产生接触面

所谓接触面是气体某些热力学参数的间断面。它的两侧可以是两种不同的气体，也可以是同一种气体。接触面与激波的一个重要区别是激波面有气体通过；而接触面没有气体通过，即接触面与两侧气体一起运动。所以，接触面两侧气体速度相等，压力也相等。如果不考虑掺混、粘性扩散和热传导等输运过程，那么接触面一旦形成，在整个运动过程中应该保持不变。

接触面可以由多种方式形成，而两个激波相交时通常会产生接触面。下面我们就讨论两个激波的相交。关于异族激波相交和同族激波相交问题，前面 § 2.4 节已讲过，这里仅给出主要结论：两个异向运动激波相交后相互穿过，反射波也是激波。此外，还将产生接触面（如图 4.21（c）所示），在该面上压强与速度要相匹配。另外，对于两个同族激波相交后合成一个较大强度激波的情况，同样也应注意在接触面处（如图 4.21（d）所示的④区与⑤区的接触面上）压强与速度应该相匹配。总之，两道异族激波相交或碰撞以及两道同族激波相交或追赶都会产生接触面。对于前者，因为当两道强度不等的激波相撞时，波后气体直接接触，使相邻区域的气体压力和速度相等，并且互相透射以后出现两道激波，各自按原来方向前进。但由于两道激波强度不等，引起熵增不同，因此，两道透射激波后面气体直接接触处两侧的

熵值不等，于是形成一个接触面。其运动情况取决于原来两道激波的强度，如图 4.23（a）所示。对于同族激波，由于激波的传播速度总小于波后的声速，因此以声速传播的小扰动波一定能赶上同族激波。小扰动波以声速传播，而激波相对于波前气体以超声速传播，所以激波必定能赶上它前面的同族激波。赶上以后，前一道激波波前的气体与后一道激波波后的气体直接接触，两个气体区域的熵值是不同的，形成接触面，如图 4.23（b）所示。两个入射激波相互作用的结果形成了一道激波继续向前，同时在反方向产生反射波。而反射波可以是膨胀波，也可以是激波，这与接触面两侧的热力学参数有关，这里图 4.23（b）仅给出了反射波为膨胀波的情形。应该特别指出的是，柯朗在其论著（见文献[5]）中指出了区分上述两类反射的判据，周毓麟（见文献[22]）在数学上进行了严格证明，感兴趣的读者可读他们的原著。另外，在他们的著作中，给出了大量的理论分析，有几点结论是需要结合本节内容去进一步深刻体会的：

（1）在压缩波区内，随着时间的增长，特征线会变得越来越密集。而在膨胀波区，随着时间的增长，特征线会越变越稀疏。

（2）压缩波提供给气体的加速方向与波的传播方向一致，而膨胀波提供给气体的加速方向则与波的传播方向相反。

（3）如果在一维管道中有两道同方向传播的波（激波或单波），那么，如果前面一道波是压缩波，则后面一道波终将赶上它；如果后面一道波是正激波，则它终将赶上前面的那道波。

（4）中心单波区一定是膨胀波区。

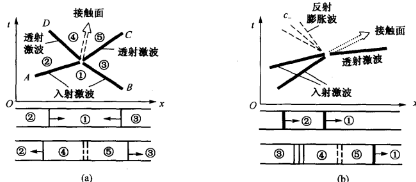


图 4.23　两激波相交产生的接触面

4. 激波与接触面的相互作用

当激波与接触面相互作用时，如图 4.21（e）（f）所示，总会有一个透射激波穿过接触面。另外，在交点上将会产生一个反射波，其反射波的种类可能是激波，也可能是膨胀波，这要依赖于接触面两侧气体的热力学参数和气体的流动参数。另外，理论计算与分析还表



明：对于图 4.21（e）或者图 4.24（b）所示的反射波，其透射波的强度要小于入射激波的强度，而对于图 4.21（f）或者图 4.24（a）所示的反射波，其透射激波强度要大于入射激波的强度。

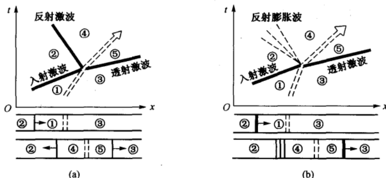


图 4.24 激波与接触面的相交

例 17 设有一个右行激波和一个左行激波，其强度分别为 $P_2/P_1 = 2.0$ 和 $P_3/P_1 = 4.0$，已知 $T_1 = 294\ \text{K}$，$P_1 = 0.68$ 大气压（绝对）。试求两激波相遇后各个区（如图 4.23（a）所示）的压强、声速和流速值。

解 ①区：$p_1 = 0.68$ 大气压，$a_1 = 20.1\sqrt{T_1} = 313\ \text{m/s}$，$V_1 = 0$。

②区：$p_2 = 2.0\times p_1 = 1.36$ 大气压。由式（4－8－11c）得 $a_2 = 377\ \text{m/s}$

再由式（4－8－9）求得

$$V_2 = V_1 + \frac{a_1}{\gamma}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{-1/2} = 180\ \text{m/s}$$

③区：按左行激波的关系式进行计算。得 $p_3 = 4.0\times p_1 = 2.72$ 大气压，$a_3 = 434\ \text{m/s}$，$V_3 = -938\ \text{m/s}$；

现在求透射激波与接触面之间④区与⑤区的参数，这里采用试凑法以满足下列两个条件，即 $V_4 = V_5$，$p_4 = p_5$。

因为激波 S_1 是左行的，所以有关系式

$$\frac{V_4 - V_2}{a_2} = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_4}{p_2} - 1\right)\left[\frac{(\gamma+1)}{2\gamma}\frac{p_4}{p_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right]^{-1/2}$$

或写成

$$\frac{p_4}{p_2}=\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\left(\frac{V_4-V_2}{a_2}\right)-1+\gamma\sqrt{\left[\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\left(\frac{V_4-V_2}{a_2}\right)^2-1\right]}\frac{(V_4-V_2)}{a_2} \qquad (*1)$$

激波 S_2 是右行的，有关系式

$$\frac{V_5-V_3}{a_3}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_5}{p_3}-1\right)\left[\frac{(\gamma+1)}{2\gamma}\frac{p_5}{p_3}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right]^{-1/2}$$

或写成

$$\frac{p_5}{p_3}=\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\left(\frac{V_5-V_3}{a_3}\right)+1+\gamma\sqrt{\left[\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\left(\frac{V_5-V_3}{a_3}\right)^2+1\right]}\frac{(V_5-V_3)}{a_3} \qquad (*2)$$

于是可以假定一系列 $V_4(=V_5)$ 值，利用上面的式（*1）和式（*2），算出相应的 p_4 和 p_5，通过试算去找到 $p_4=p_5$ 成立时所对应的 V_4（这里 $V_4=V_5$）值。试凑结果是 $V_4=V_5=-205$ m/s，对应的 $p_4=p_5=4.81$ 大气压。再进一步算出 $a_4=471$ m/s，$a_5=464$ m/s。

二、两波作用时接触间断产生的几种情况

综上分析，关于两波相互作用能否产生接触间断面问题可以归纳出以下的五点：

（1）激波与激波作用要产生接触间断面。

（2）激波与接触间断面作用后要产生新的接触间断面。

（3）激波与膨胀波作用后要产生接触间断面。

（4）膨胀波与膨胀波相互作用后不产生接触间断面。

（5）膨胀波与接触面作用后要产生新的接触间断面。

下面我们引进两波作用问题中的常用符号：用 $\vec{S}$ 与 $\bar{S}$ 分别代表向右与向左传播的激波；用 $\vec{R}$ 与 $\bar{R}$ 分别代表向右与向左传播的膨胀波，用 J 代表接触间断面；显然用符号方程 $\vec{S}_2\bar{S}_1 \to \bar{S}J\vec{S}$ 或者 $\bar{R}J\vec{S}$ 可以清楚地表明了两个同向激波相交或碰撞后其反射波将有两种可能：一种是反射波都是激波，另一种是一个激波一个膨胀波，而且这两种情况都有接触间断面产生。再如用符号方程 $\vec{S}_0\bar{R}_0 \to \bar{R}J\vec{S}$ 或者 $\vec{R}_0\bar{S} \to \bar{S}J\vec{R}$，则表明了激波与膨胀波迎面相撞相互作用时的情况。作为课后练习，请读者用上面给出的符号将前面给出的有关两波作用的五点结论表达出来。

4.8.4 初始间断的分解及黎曼问题的精确解法

一、初始间断的分解

前面所讲的间断问题，例如激波间断，这类间断面两侧的气体参数是通过连续方程、动量方程和能量方程来互相制约的；对于接触间断，它两侧的压强和速度分别相等，而密度、温度和熵是任意的。正是由于这种间断面两侧的压强和速度分别相等，因此它不会由于其他



参数的任意性而发生任何扰动。然而本节讨论的间断问题与上述不同，它是一种任意间断。所谓任意间断是指在初始时刻，在气体中可能存在着一个间断面，它两侧的气体性质是不同的，气体参数不受任何条件限制，它们之间可以是毫无联系的。理论分析表明：任意间断所引起的扰动运动可由下面的三个元素构成即中心膨胀波、定常区和激波。但这些不同运动的组合要受到以下条件的限制，即在一个方向上只能有一个波在传播（当然这个波可以是激波也可是中心膨胀波），所以从同一个任意间断点处只能发出两个朝着不同方向传播的波。这两个波可能的组合是：① 两个激波；② 两个中心膨胀波；③ 一个激波、一个中心膨胀波。在这样的两个波之间存在着一个定常区。由于两边熵值不等，所以在定常区中存在着一个接触间断面 J，在接触面两侧的压强和速度分别相等。图 4.25 给出了从同一个初始间断点处发出波的五种可能情况。对于一个具体的工程问题到底应属于哪一种情况，这要取决于初始间断面两侧的初始状态。

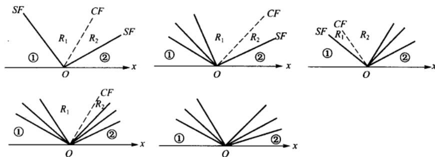


图 4.25　任意间断分解的五种可能情况

现在介绍图 4.25 给出的五种类型：① 在接触间断（以虚线表示）的左右两边各有一个激波（以粗线表示），其中一个为左行激波，一个为右行激波。这些波都是从初始间断点处出发的，各自以常速度运动。在接触间断面与激波之间的区域都是常数状态区。② 在接触间断面的左边有一个左行中心膨胀波（以一束直线表示），在接触面右边有一个右行激波。中心膨胀区的物理量是 x/t 的函数，并从其波头（又称第一道膨胀波）连续地过渡到波尾。③ 接触间断面的左边有一个左行激波，右边有一个右行中心膨胀波。④ 接触面的左边有一个左行中心膨胀波，右边有一个右行中心膨胀波。⑤ 在初始间断点处的左边发出一个左行中心膨胀波，右边发出一个右行中心膨胀波，在两个中心膨胀波之间出现真空区域。

二、黎曼（Riemann）问题的数学提法

所谓 Riemann 问题就是求解一维非定常无粘气体动力学如下初值问题的解，该初值为：$t=0$时，物理量初值分别为$V(x,0)$，$\rho(x,0)$，$P(x,0)$；在$x=0$处有间断，并且在$x=0$的两边分别是常数分布，即

$$\begin{bmatrix} V(x,0) \\ \rho(x,0) \\ P(x,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(\text{当}x<0)\text{或者}V_2(\text{当}x>0) \\ \rho_1(\text{当}x<0)\text{或者}\rho_2(\text{当}x>0) \\ P_1(\text{当}x<0)\text{或者}P_2(\text{当}x>0) \end{bmatrix} \tag{4-8-46}$$

这里$V_1,\rho_1,P_1,V_2,\rho_2$与$P_2$分别为常数。我们欲求满足上述初始条件式（4－8－46）的解（V,ρ,P），使它在光滑区满足一维非定常无粘 Euler 方程式（4－8－47），在间断处满足间断条件（又称间断关系式）式（4－8－48）。这里式（4－8－47）与式（4－8－48）分别为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho V)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial(\rho V)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho V^2+P)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{\partial\left((\varepsilon+P)V\right)}{\partial x}=0 \end{cases} \tag{4-8-47}$$

$$\begin{cases} [\rho]N-[\rho V]=0 \\ [\rho V]N-\left[\rho V^2+P\right]=0 \\ [\varepsilon]N-[\varepsilon V+PV]=0 \end{cases} \tag{4-8-48}$$

式中，$[f]$代表物理量f在间断处右侧（又称右边）的值减去f在间断处左侧（又称左边）的值，即$[f]\equiv f_2-f_1$；N为间断面$x=x(t)$的运动速度，即$N=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$。通常，这种初始时刻的间断并不一定满足间断关系，所以是不稳定的。因此在$t>0$后这种初始间断便立即分解为若干满足间断关系的间断，所以黎曼问题又常被称为初始间断的分解问题。需要特别指出的是，在近代计算流体力学和气体动力学的数值方法研究中，黎曼问题的精确解显得格外重要，常常用它去校验一些数值新方法（尤其是高分辨率数值格式）的精确程度。

三、黎曼问题的精确解

1. 预备知识

首先将间断关系式（4－8－48）改写为

$$\rho_1(N-V_1)=\rho_2(N-V_2)=m \ \text{或者}\ m[1/\rho]=-[V] \tag{4-8-49}$$

$$m[V]=[P] \tag{4-8-50}$$

$$m[\varepsilon/\rho]=[PV] \tag{4-8-51}$$



式中，m 表示在单位面积上单位时间内通过间断面的流量。

由式（4－8－49）与式（4－8－50）得

$$m=-\frac{[V]}{[1/\rho]}=\frac{[P]}{[V]} \tag{4-8-52}$$

$$m^2=-\frac{[P]}{[1/\rho]}=-\frac{P_2-P_1}{\dfrac{1}{\rho_2}-\dfrac{1}{\rho_1}} \tag{4-8-53}$$

$$[V]^2\equiv[V]\,[V]=-[P]\,[1/\rho] \tag{4-8-54}$$

$$(N-V_1)(N-V_2)=\frac{P_2-P_1}{\rho_2-\rho_1} \tag{4-8-55}$$

对于右行激波，因 $m>0$，有

$$[V]-\frac{[P]}{|m|}=0 \tag{4-8-56}$$

对于左行激波，因 $m<0$，有

$$[V]+\frac{[P]}{|m|}=0 \tag{4-8-57}$$

将式（4－8－50）乘 $(V_1+V_2)/2$ 并整理后可得

$$m\left[V^2/2\right]=\frac{1}{2}(V_1+V_2)[P]=[PV]-\frac{1}{2}(P_1+P_2)[V] \tag{4-8-58}$$

再利用式（4－8－49），则上式变为

$$m\left[V^2/2\right]-[PV]=\frac{1}{2}(P_1+P_2)m[1/\rho] \tag{4-8-59}$$

由式（4－8－51）与式（4－8－59）中消去速度 V 后得到

$$m[e]+\frac{1}{2}m(P_1+P_2)[1/\rho]=0$$

式中，e 为内能。

对于激波，则 $m\neq0$，故上式变为

$$[e]+\frac{1}{2}(P_1+P_2)[1/\rho]=0 \tag{4-8-60}$$

对于完全气体，则 $e=\dfrac{P}{\rho}/(\gamma-1)$，于是式（4－8－60）变为

$$(1/\rho_2-1/\rho_1)/(1/\rho_1)=-\frac{2(P_2-P_1)}{(\gamma-1)P_1+(\gamma+1)P_2}$$

将上式代到式（4－8－53）则有

$$m^2=\frac{1}{2}\rho_1\{(\gamma-1)P_1+(\gamma+1)P_2\}=\frac{1}{2}\rho_2\{(\gamma-1)P_2+(\gamma+1)P_1\} \tag{4-8-61}$$

因此

$$|m|=\rho_1 a_1\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}=\rho_2 a_2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} \tag{4-8-62}$$

式中，a_1 与 a_2 分别为激波左侧状态与右侧状态的声速。

激波间断除了应该满足连续方程、动量方程和能量方程之外，还应该服从热力学第二定律也就是熵增条件，即

$$S_{波后}-S_{波前}\geqslant 0 \tag{4-8-63}$$

这一条与要求激波后的压力、密度大于波前的压力、密度是一致的，即

$$P_{波后}-P_{波前}\geqslant 0,\quad \rho_{波后}-\rho_{波前}\geqslant 0 \tag{4-8-64}$$

值得特别注意的是，我们在刚开始讨论黎曼问题时已作过约定：下标 1 为间断面左侧的状态，下标 2 为间断面右侧的状态（这与 4.8.1 节讲述运动激波时在相对坐标系中所定义的下标是有区别的！）。对于右行激波来讲，它的右侧为波前、左侧为波后，于是 $P_2-P_1<0$，$\rho_2-\rho_1<0$，由式（4－8－56）可知 $V_2-V_1<0$；对于左行激波来讲，它的右侧为波后、左侧为波前，于是 $P_2-P_1>0$，$\rho_2-\rho_1>0$，由式（4－8－57）可知，这时 $V_2-V_1<0$；因此，无论是右行激波还是左行激波总有 $V_2-V_1<0$，这与压缩波总有 $\frac{\partial V}{\partial x}<0$ 的结论是一致的。正由于这个原因，所以由式（4－8－54）开平方时只取

$$V_2-V_1=-\sqrt{(P_2-P_1)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)} \tag{4-8-65}$$

这里下标 1 与 2 分别表示左与右侧状态。另外，由§4.6 节可知，对于左行简单波，它有一个黎曼不变量 J^+ 为普适常数，并且还有如下关系成立，即

$$沿第\,\text{II}\,族C^-:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V-a\\ V-\dfrac{2}{\gamma-1}a\equiv J^-=C_2\,(常数)\quad(沿特征线)\\ V+\dfrac{2}{\gamma-1}a=J_0^+\quad(跨过特征线)\end{cases} \tag{4-8-66}$$

考察 c^- 特征线的斜率 $(V-a)$ 与流线的斜率 V，由于总有 $V-a<V$，因此流体的质点总



是由左侧进入每一条 c^- 特征线。简单波可分为压缩波与膨胀波，对于压缩波则 $\frac{\partial V}{\partial x}<0$，而对于膨胀波则 $\frac{\partial V}{\partial x}>0$；对于左行中心膨胀波，取中心为原点（0,0），则 c^- 特征线为

$$\frac{x}{t}=V-a \tag{4-8-67}$$

设左行中心膨胀波的左边界即波头见图 4.26（b）为 $x/t=k_1$，右边界即波尾为 $x/t=k_2,(k_2>k_1)$，在左边界处状态为 V_1,a_1，右边界状态为 V_2,a_2，于是 $k_1=V_1-a_1$，$k_2=V_2-a_2$；在左行中心波区中有

$$J_0^+\equiv V+\frac{2}{\gamma-1}a=V_1+\frac{2}{\gamma-1}a_1=V_2+\frac{2}{\gamma-1}a_2 \tag{4-8-68}$$

将式（4-8-67）与式（4-8-68）联立解得左行中心波区中的状态分布

$$\begin{cases} V=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[J_0^++\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{x}{t}\right] \\ a=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[J_0^+-\dfrac{x}{t}\right] \qquad \left(k_1\leqslant\dfrac{x}{t}\leqslant k_2\right) \end{cases} \tag{4-8-69}$$

它们是 x/t 的函数。该区中的压强与密度分布为

$$\begin{cases} \rho=\rho_1\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ P=P_1\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{cases} \tag{4-8-70}$$

这里 ρ_1,P_1,a_1 为波头处的密度、压强和声速。对于右行简单波，它有一个黎曼不变量 J^- 为普适常数，并且有如下关系成立，即

$$\text{沿第I族}c^+:\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=V+a \\ V+\dfrac{2}{\gamma-1}a\equiv J^+=C_1(\text{常数}) \quad (\text{沿特征线}) \\ V-\dfrac{2}{\gamma-1}a=J_0^- \quad (\text{跨过特征线}) \end{cases} \tag{4-8-71}$$

考察 C^+ 特征线，流体的质点总是不断地从右侧进入每一条 C^+ 特征线。同样的，对于右行中心膨胀波，取中心为原点时，C^+ 特征线为

$$\frac{x}{t}=V+a \tag{4-8-72}$$

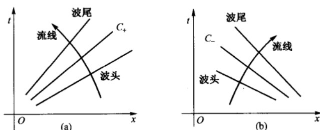


图 4.26　右行与左行膨胀波

设右行中心膨胀波的左边界即波尾（如图 4.26（a）所示）为 $\frac{x}{t}=k_1$，右边界即波头为 $\frac{x}{t}=k_2$，在波头处的状态为 V_1,a_1；在波尾处的状态为 V_2,a_2；于是在右行中心膨胀波区中有

$$J_0^- \equiv V-\frac{2}{\gamma-1}a=V_1-\frac{2}{\gamma-1}a_1=V_2-\frac{2}{\gamma-1}a_2 \tag{4-8-73}$$

将式（4－8－72）与式（4－8－71）联立解得右行中心膨胀波区状态的分布

$$\begin{cases} V=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[J_0^-+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{x}{t}\right] \\ a=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[\dfrac{x}{t}-J_0^-\right] \end{cases} \qquad \left(k_1\leqslant\frac{x}{t}\leqslant k_2\right) \tag{4-8-74}$$

2. 接触间断面两侧速度 $\tilde{V}$ 与压强 $\tilde{P}$ 的计算

对于接触间断面，考虑到该面两侧速度和压强都分别相等这个条件，这里仍用下标 1 代表间断面的左侧（或左边状态 l），下标 2 代表间断面的右侧（或右边状态 r）；因此在接触间断两侧的常数状态区域中用 $\tilde{V}$ 与 $\tilde{P}$ 分别代表这时速度与压强，即

$$\tilde{V}=V_1=V_2 \text{（在接触面两侧）} \tag{4-8-75}$$

$$\tilde{P}=P_1=P_2 \text{（在接触面两侧）} \tag{4-8-76}$$

对于左行激波，如图 4.25(a)所示，左侧是波前，右侧是波后，于是由式（4－8－57）与式（4－8－62）得到

$$\tilde{V}-V_1+\frac{\tilde{P}-P_1}{\tilde{m}_1}=0 \tag{4-8-77}$$



式中
$$\tilde{m}_1 = \rho_1 a_1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{\tilde{P}}{P_1}\right)+\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad （当 \tilde{P} > P_1 时） \tag{4-8-78}$$

对于右行激波，左侧是激波的波后，右侧是波前，由式（4－8－56）与式（4－8－62）得到

$$\tilde{V} - V_2 - \frac{\tilde{P}-P_2}{\tilde{m}_2} = 0 \tag{4-8-79}$$

式中

$$\tilde{m}_2 = \rho_2 a_2 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{\tilde{P}}{P_2}\right)+\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad （当 \tilde{P} > P_2 时） \tag{4-8-80}$$

对于左行中心膨胀波，如图 4.25(b)所示，由式（4－8－66）与式（4－8－68）得到

$$V + \frac{2}{\gamma-1} a = V_1 + \frac{2}{\gamma-1} a_1 \tag{4-8-81}$$

并注意利用等熵区中的关系式式（4－8－70），得

$$a = a_1 (P/P_1)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{4-8-82}$$

于是式（4－8－81）可写成如下形式

$$\tilde{V} + \frac{2}{\gamma-1} a_1 \left(\frac{\tilde{P}}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = V_1 + \frac{2}{\gamma-1} a_1 \tag{4-8-83}$$

将上式进一步整理为与式（4－8－77）相类似的形式，即

$$\tilde{V} - V_1 + \frac{\tilde{P}-P_1}{\tilde{m}_1} = 0 \tag{4-8-84}$$

式中

$$\tilde{m}_1 = \rho_1 a_1 \frac{1-\left(\tilde{P}/P_1\right)}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\tilde{P}/P_1\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right]} \quad （当 \tilde{P} < P_1 时） \tag{4-8-85}$$

对于右行中心膨胀波，类似的可以推出

$$V - \frac{2}{\gamma-1} a = V_2 - \frac{2}{\gamma-1} a_2 = \tilde{V} - \frac{2}{\gamma-1} a_2 \left(\frac{\tilde{P}}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{4-8-86}$$

并可改写为

$$\tilde{V}-V_2-\frac{\tilde{P}-P_2}{\tilde{m}_2}=0 \tag{4-8-87}$$

式中

$$\tilde{m}_2=\rho_2 a_2\frac{1-\left(\tilde{P}/P_2\right)}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\tilde{P}/P_2\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right]}\quad（当\ \tilde{P}<P_2\ 时） \tag{4-8-88}$$

因而对于左行波（包含左行激波与左行中心膨胀波）可以统一写为

$$\tilde{V}-V_1+\frac{\tilde{P}-P_1}{\tilde{m}_1}=0 \tag{4-8-89}$$

对于右行波（包含右行激波与右行中心膨胀波）也可以统一写为

$$\tilde{V}-V_2-\frac{\tilde{P}-P_2}{\tilde{m}_2}=0 \tag{4-8-90}$$

式中，$\tilde{m}_1$ 与 $\tilde{m}_2$ 又可以统一表达为

$$\tilde{m}_\beta=\begin{cases}\rho_\beta a_\beta\dfrac{1-\left(\tilde{P}/P_\beta\right)}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\tilde{P}/P_\beta\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right]} & （当\tilde{P}<P_\beta 时）\\ \rho_\beta a_\beta\sqrt{\dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\dfrac{\tilde{P}}{P_\beta}-1\right)+1} & （当\tilde{P}>P_\beta 时）\end{cases} \tag{4-8-91}$$

这里 $\beta=1,2$。对于给定初始值的式（4－8－46），将式（4－8－89）与式（4－8－90）联立便可解出 $\tilde{V}$ 与 $\tilde{P}$ 值。

3. 间断分解类型的判断

令

$$\varphi\left(\tilde{P};\ P_\beta,\rho_\beta\right)\equiv\frac{\tilde{P}-P_\beta}{\tilde{m}_\beta} \tag{4-8-92}$$

于是式（4－8－89）与式（4－8－90）可改写为

$$\tilde{V}-V_1=-\varphi\left(\tilde{P};\ P_1,\rho_1\right) \tag{4-8-93}$$

$$\tilde{V}-V_2=\varphi\left(\tilde{P};\ P_2,\rho_2\right) \tag{4-8-94}$$

将两式相减消去 $\tilde{V}$ 便得到关于 $\tilde{P}$ 的方程

$$V_1-V_2=\varphi\left(\tilde{P};\ P_1,\rho_1\right)+\varphi(\tilde{P};\ P_2,\rho_2)\equiv\phi(\tilde{P}) \tag{4-8-95}$$

可以证明：$\phi(\tilde{P})$ 关于 $\tilde{P}$ 为单调增加而且是导数连续的凸函数。下面我们进行间断分解



类型的判断，首先讨论 $P_1 > P_2$ 的情况：由 $\phi(\tilde{P})$ 的单调性，得 $\phi(P_1) > \phi(P_2)$。下面分几种情况叙述：

（1）当 $V_1 - V_2 > \phi(P_1)$ 时，借助于式（4－8－95），则有 $\tilde{P} > P_1 > P_2$，即左行波与右行波都是激波，如图 4.25（a）所示。

（2）当 $\phi(P_1) > V_1 - V_2 > \phi(P_2)$ 时，有 $P_1 > \tilde{P} > P_2$，即这时接触间断左边为中心膨胀波，右边为激波，如图 4.25（b）所示。

（3）当 $\phi(P_2) > V_1 - V_2 > \phi(0)$ 时，有 $P_1 > P_2 > \tilde{P} > 0$，这时接触间断两边都是中心膨胀波，如图 4.25（d）所示。

（4）当 $\phi(0) > V_1 - V_2$ 时，在左右中心膨胀波之间的区域中出现真空，（如图 4.25（e）所示。

作为课后作业，读者可以讨论当 $P_2 > P_1$ 时间断分解的类型划分情况。

下面再介绍一种分类的方法，使用起来也很方便。也是通过从分析每种情况出现时接触间断面的条件，来获得分类判断准则的。

（1）第一种类型：中间为接触面，两边都是激波，如图 4.27（a）所示。由式（4－8－9）得

$$V_3' - V_2 = \sqrt{\frac{2\left(P_3' - P_2\right)^2}{\rho_2\left[\left(\gamma_2+1\right)P_3' + \left(\gamma_2-1\right)P_2\right]}}$$

$$V_1 - V_3 = \sqrt{\frac{2\left(P_3 - P_1\right)^2}{\rho_1\left[\left(\gamma_1+1\right)P_3 + \left(\gamma_1-1\right)P_1\right]}}$$

式中，γ_1 和 γ_2 分别表示初始间断面两侧气体的比热比。

由接触间断面条件：$V_3 = V_3'$，　$P_3 = P_3'$，于是有

$$V_1 - V_2 = \sqrt{\frac{2(P_3 - P_1)^2}{\rho_1\left[\left(\gamma_1+1\right)P_3 + \left(\gamma_1-1\right)P_1\right]}} + \sqrt{\frac{2(P_3 - P_2)}{\rho_2\left[\left(\gamma_2+1\right)P_3 + \left(\gamma_2-1\right)P_1\right]}}$$

因为 $\partial(V_1 - V_2)/\partial P_3 > 0$，且 $P_3 \geqslant P_2$，所以该情况出现的条件是

$$V_1 - V_2 \geqslant \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)^2}{\rho_1\left[\left(\gamma_1+1\right)P_2 + \left(\gamma_1-1\right)P_1\right]}} \tag{4-8-96}$$

（2）第二种类型：接触面两侧分别为激波和中心膨胀波，如图 4.27（b）所示。左侧激波条件仍是

$$V_1 - V_3 = \sqrt{\frac{2(P_3 - P_1)^2}{\rho_1\left[\left(\gamma_1+1\right)P_3 + \left(\gamma_1-1\right)P_1\right]}}$$

右侧中心膨胀波的条件是

$$\begin{cases} V_2 - \dfrac{2}{\gamma_2 - 1}\sqrt{\dfrac{\gamma_2 P_2}{\rho_2}} = V_3' - \dfrac{2}{\gamma_2 - 1}\sqrt{\dfrac{\gamma_2 P_3'}{\rho_3'}} \\ \dfrac{P_3'}{P_2} = \left(\dfrac{\rho_3'}{\rho_2}\right)^{\gamma_2} \end{cases}$$

注意到接触间断条件 $V_3 = V_3'$，$P_3 = P_3'$，于是

$$V_1 - V_2 = \sqrt{\frac{2(P_3 - P_1)^2}{\rho_1[(\gamma_1+1)P_3 + (\gamma_1 - 1)P_1]}} - \frac{2}{\gamma_2 - 1}\left[1 - \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}\right]\sqrt{\frac{\gamma_2 P_2}{\rho_2}}$$

同样由于 $\partial(V_1 - V_2)/\partial P_3 > 0$，且 $P_2 > P_3 \geqslant P_1$，故该情况出现的判别条件为

$$\sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)^2}{\rho_1[(\gamma_1+1)P_2 + (\gamma_1 - 1)P_1]}} > V_1 - V_2 \geqslant -\frac{2}{\gamma_2 - 1}\left[1 - \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}\right]\sqrt{\frac{\gamma_2 P_2}{\rho_2}} \quad (4-8-97)$$

（3）第三种与第四种类型：接触间断面两侧都是中心膨胀波（如图 4.27（c）所示）为第三种类型；两侧都是中心膨胀波并且中间出现真空为第四种类型（如图 4.27（d）所示）。用同样的方法可以证明这两种情况的判别条件分别是

$$-\frac{2}{\gamma_2 - 1}\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}\right]\sqrt{\frac{\gamma_2 P_2}{\rho_2}} > V_1 - V_2 \geqslant -\frac{2}{\gamma_1 - 1}\sqrt{\frac{\gamma_1 P_1}{\rho_1}} - \frac{2}{\gamma_2 - 1}\sqrt{\frac{\gamma_2 P_2}{\rho_2}} \quad (4-8-98)$$

$$V_1 - V_2 < -\frac{2}{\gamma_1 - 1}\sqrt{\frac{\gamma_1 P_1}{\rho_1}} - \frac{2}{\gamma_2 - 1}\sqrt{\frac{\gamma_2 P_2}{\rho_2}} \quad (4-8-99)$$

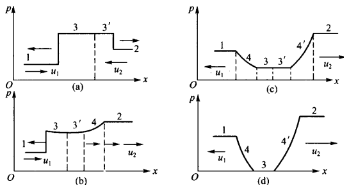


图 4.27　任意间断面的几种分解类型



§4.9 激波管及流动分析

4.9.1 激波管各区流动的计算与分析

激波管是短时间作用的空气动力学实验装置，具有结构简单、实验周期短等优点，因此多年来一直在航空、航天、爆炸工程、化学及物理学等方面广泛的应用。最简单的激波管是一根两端封闭的等截面直管，由膜片把管子分成两部分，膜片左边是高压段，充有高压气体，称为驱动气体；膜片右边是低压段，充有低压的被驱动气体。膜片两边可以是同种气体，也可以是不同的气体，如图4.28（a）所示。为了获得强激波，可使P_4/P_1高达10^6的比值。当膜片在瞬间破裂（理想情况是膜片完全消失）后，由§4.8节黎曼问题的理论分析可知：将有两个波产生，一个是左行膨胀波进入高压气体，另一个是右行激波进入低压气体，两部分气体的接触面也随着时间的推进而往右移，图4.28（b）给出了t_1时刻各种波的位置。显然，经过一定的时间以后，膨胀波和激波将分别在左、右封闭端固壁上被反射，这时激波管内波系状况表示在图4.28（c）中。下面分析$x-t$平面中各区的流动情况。

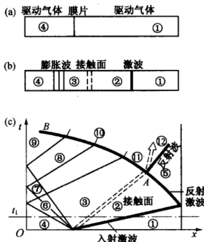


图 4.28 激波管示意图

①、④区：①区和④区是静止区域

$$V_1=0, V_4=0 \tag{4-9-1}$$

热力学参数为常数，且都是已知的。

②、③区：由于接触面两侧气体速度和压力应分别相等，因此有

$$V_2=V_3, P_2=P_3 \tag{4-9-2}$$

由式（4-6-28）* 可以得到中心简单波区两侧③区与④区的压力比为

$$\frac{P_3}{P_4}=\left(1-\frac{\gamma_4-1}{2}\frac{V_3}{a_4}\right)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4-1}} \tag{4-9-3}$$

对于右行激波，利用式（4－8－28）建立起①与②区间的关系即

$$\frac{V_2}{a_1}=\frac{2}{\gamma_1+1}\left(M_s-\frac{1}{M_s}\right) \tag{4-9-4}$$

式中，M_s 为激波马赫数（定义同式（4－8－15）*）。又注意将式（4－9－2）与式（4－9－4）代入到式（4－9－3），得

$$\frac{P_3}{P_4}=\left[1-\frac{\gamma_4-1}{\gamma_1+1}\frac{a_1}{a_4}\left(M_s-\frac{1}{M_s}\right)\right]^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4-1}} \tag{4-9-5}$$

因 $P_3=P_2$，因此可以用下列的方式将①区与④区联系起来，即

$$\frac{P_4}{P_1}=\frac{P_4}{P_3}\cdot\frac{P_3}{P_1}=\frac{P_4}{P_3}\cdot\frac{P_2}{P_1}$$

将式（4－8－16）和式（4－9－5）代入上式，便得到了用 M_s 表示 P_4/P_1 的关系式

$$\frac{P_4}{P_1}=\left(\frac{2\gamma_1}{\gamma_1+1}M_s^2-\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right)\left[1-\frac{\gamma_4-1}{\gamma_1+1}\frac{a_1}{a_4}\left(M_s-\frac{1}{M_s}\right)\right]^{-\frac{2\gamma_4}{\gamma_4-1}} \tag{4-9-6}$$

这就是简单激波管的最基本关系式。根据已知的 P_4/P_1、a_4、a_1 以及比热比 γ_1、γ_4 的值，便可算出激波马赫数 M_s；波后马赫数 M_2 可由下式得到，即

$$M_2=\frac{V_2}{a_2}=\frac{V_2}{a_1}\frac{a_1}{a_2}$$

于是利用式（4－9－4）与式（4－8－29），得到

$$M_2=\left(M_s^2-1\right)\left\{\left(1+\frac{\gamma_1-1}{2}M_s^2\right)\left(\gamma_1M_s^2-\frac{\gamma_1-1}{2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{4-9-7}$$

接触面后的马赫数 M_3 为

$$M_3=\frac{V_3}{a_3}=\frac{V_2}{a_1}\frac{a_1}{a_4}\frac{a_4}{a_3} \tag{4-9-8}$$

而 a_4/a_3 可由跨过左行膨胀波的关系式（4－6－28）* 得

$$a_3=a_4-\frac{\gamma_4-1}{2}V_3 \tag{4-9-9}$$

将式（4－9－4）与式（4－9－9）代入到式（4－9－8）后得

$$M_3=\left[\frac{a_4}{a_1}\frac{\gamma_1+1}{2}\frac{M_s}{M_s^2-1}-\frac{\gamma_4-1}{2}\right]^{-1} \tag{4-9-10}$$

在 M_s 已知后，由式（4－9－4）可得 V_2 与 V_3，由式（4－8－16）得 P_2 与 P_3 值。



⑥～⑨区：在确定了③区的流动参数后，就可用 § 4.7 节所述的有关简单波的计算方法确定⑥～⑨区的流动。另一方面利用右行激波在右壁面上的反射关系式（4-8-44）得到反射后静止区域的压强 P_5 值。再由 P_5/P_2 这个比值，根据激波关系式（4-8-16）得到反射激波的传播马赫数。

⑩～⑫ 区：很显然当⑧区中的简单膨胀波与激波 AB 相互作用时，使得反射激波变得弯曲了，因此⑩区不再是简单波区，而且该区的熵分布是不均匀的。

4.9.2　获得较高试验温度与速度的途径

为了深入研究激波管的调整机理以获得较高的试验温度和速度，今考察 $P_4/P_1 \to \infty$ 的情况。由式（4-9-6）可知，如果 M_s 保持有限值，则 $P_4/P_1 \to \infty$ 意味着式（4-9-6）方括号中的量趋于零，也就是说

$$M_s - \frac{1}{M_s} \to \frac{\gamma_1+1}{\gamma_4-1}\frac{a_4}{a_1} \qquad (4-9-11)$$

或者

$$M_s \approx \frac{\gamma_1+1}{\gamma_4-1}\frac{a_4}{a_1} \qquad (4-9-12)$$

换句话说，当

$$\frac{a_1}{a_4}\frac{\gamma_4-1}{\gamma_1+1}\left(M_s - \frac{1}{M_s}\right)=1 \qquad (4-9-13)$$

时，则 $P_4/P_1 \to \infty$，因此由式（4-9-13）可得到激波马赫数 M_s 可能达到的最大值。例如 $a_1 = a_4$，$\gamma_1=\gamma_4=1.4$ 时，$(M_s)_{\max} \approx 6.15$；将此值代入到式（4-9-7）得 $(M_2)_{\max} \approx 1.73$；由此可知，若高低压室都充以空气，即使 $P_4/P_1 \to \infty$，但波后气流马赫数最大也只有 1.73，这对高速气体动力学实验是一个限制。另外，若取 $\gamma_4 \neq \gamma_1$，$a_4 \neq a_1$ 但取 $T_4 = T_1$ 时，则由式（4-9-11）得到

$$\frac{a_1}{a_4} = \sqrt{\frac{\gamma_1 R_1}{\gamma_4 R_4}} \qquad (4-9-14)$$

式中，R 是气体常数。

令 R_0 是普适气体常数，n_i 为第 i 种气体的分子量，于是式（4-9-14）又可变为

$$\frac{a_1}{a_4} = \sqrt{\frac{\gamma_1 n_4}{\gamma_4 n_1}} \qquad (4-9-15)$$

将上式代入到式（4－9－13）得

$$M_s-\frac{1}{M_s}=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_4-1}\sqrt{\frac{\gamma_4 n_1}{\gamma_1 n_4}} \tag{4-9-16}$$

例如高压室采用氦，低压室用空气，取压比为 132 时，M_s 可达 10.64；如果高压室采用氢气，低压室仍用空气，并且取压比为 574 时，M_s 可达 22.2；因此高压室应尽量采用分子量小并且具有较高的声速和低比热比的气体，这是获取较大 M_s 值的途径之一。另外，虽然接触面后气体的速度与右行激波后气体速度相同，但因接触面后的温度要比激波后的温度低很多，因此 M_3 可以远远大于 M_2；很容易证明：当 $M_s\to(M_s)_{\max}$ 时，则 $M_3\to\infty$，因此利用接触面后的气流可以做马赫数很高的气体动力学实验。由上面的分析可以看到，虽然 M_2 即右行激波后的马赫数不高，然而波后可以达到非常高的温度。例如高低压室分别采用氦气与空气，即使实验前取 $T_4=T_1=288\,\text{K}$，激波后温度仍能升至 6 000 K 的高温。因此利用右行激波后产生的高温可以研究各种气体的高温性质。

最后讨论一下试验时间。当激波或膨胀波在端部反射之后，激波（或接触面）后的等速气体将受到干扰，因此利用激波或接触面后气流进行实验时试验时间应取为 τ（如图 4.29 所示）。

为了确定试验时间，需要在 $x-t$ 平面上确定中心膨胀波的前、后缘（又称波头 LE 与波尾 TE）以及接触间断面和入射激波的迹线。波头迹线为

$$\left(\frac{x}{a_4 t}\right)_{\text{LE}}=-1 \tag{4-9-17}$$

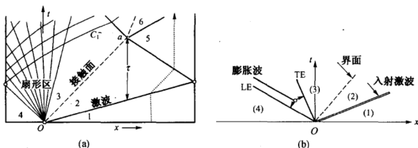


图 4.29　激波管的波系结构

对于激波线其方程为

$$\left(\frac{x}{t}\right)_s=V_s=a_1 M_s \tag{4-9-18}$$



以及

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2}{\gamma_1+1}\left(\gamma_1 M_s^2-\frac{\gamma_1-1}{2}\right) \tag{4-9-19}$$

借助于式（4－9－19），则式（4－9－18）变为

$$\left(\frac{x}{a_4 t}\right)_s=\frac{a_1}{a_4}\left(\frac{\gamma_1+1}{2\gamma_1}\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma_1-1}{2\gamma_1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4-9-20}$$

对于接触间断面（用下标 j 表示），因为

$$\frac{V_2}{a_1}=\frac{2}{\gamma_1+1}\frac{M_s^2-1}{M_s} \tag{4-9-21}$$

由式（4－9－19）求出 M_s 后代入上式得

$$V_2=a_1\left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)\left[\frac{2/\gamma_1}{(\gamma_1+1)\frac{P_2}{P_1}+(\gamma_1-1)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4-9-22}$$

因此接触面的迹线可由式（4－9－22）得到

$$\left(\frac{x}{t}\right)_j=V_j=a_1\left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)\left[\frac{2/\gamma_1}{(\gamma_1+1)\frac{P_2}{P_1}+(\gamma_1-1)}\right]^{1/2} \tag{4-9-23}$$

在波尾：因膨胀区的后缘也是一条过原点的特征线 c^-，其方程为

$$\left(\frac{x}{t}\right)_{TE}=V_3-a_3 \tag{4-9-24}$$

因此跨过特征线 c^- 有

$$\frac{2}{\gamma_4-1}a_4=V_3+\frac{2}{\gamma_4-1}a_3 \tag{4-9-25}$$

由上面两式消去 a_3 后便得

$$\left(\frac{x}{a_4 t}\right)_{TE}=\frac{\gamma_4+1}{2}\frac{V_3}{a_4}-1 \tag{4-9-26}$$

注意到 $V_j=V_3$，将式（4－9－23）代入式（4－9－26）后得到

$$\left(\frac{x}{a_4 t}\right)_{\mathrm{TE}}=\frac{\gamma_4+1}{2}\frac{a_1}{a_4}\left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)\left[\frac{2/\gamma_1}{(\gamma_1+1)\frac{P_2}{P_1}+(\gamma-1)}\right]^{1/2}-1 \qquad (4-9-27)$$

显然，有了这些表达式后再去确定试验时间就很容易了。关于激波管方面更多内容可参考文献［32］。

参考文献

1 钱学森. 气体动力学基本原理（A 辑）——气体动力学诸方程. 徐华舫译. 北京:科学出版社，1966

2 Emmons H W. Fundamentals of gas dynamics (Section B). New Jersey: Princeton University Press, 1958

3 Li Tatsien (李大潜). Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. Research in Applied Mathematics 32. New York: John Wiley, 1994

4 王竹溪. 热力学. 北京：人民教育出版社, 1960

5 Courant R, Friedrichs K O. Supersonic flow and shock waves. New York: Springer-Verlag, 1976

6 复旦大学数学系. 流体力学. 上海：上海科学技术出版社, 1960

7 吴望一. 流体力学. 北京：北京大学出版社, 1982

8 清华大学工程力学系. 流体力学基础. 北京：机械工业出版社, 1980

9 周光坰, 严宗毅, 许世雄, 章克本. 流体力学(第二版). 北京：高等教育出版社, 2000

10 Harten A. On a class of high resolution total-variation-stabe finite-difference schemes. SIAM J.Numer. Anal, 1984,21(1):1~23

11 王保国，黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法. 北京：国防工业出版社，2000

12 王保国. 叶栅流基本方程组特征分析及矢通量分裂. 中国科学院研究生院学报, 1987，4(2):54～65

13 王保国. N-S 方程组的通用形式及近似因式分解. 应用数学和力学, 1988，9(2):165～172

14 王保国. 跨声速主流与边界层迭代的稳定性分析与数值实验. 工程热物理学报, 1989，10(4):379～382

15 Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm.. Pure Appl. Math., 1957,10:537-566

16 Олейник O.A. Разрывные решения нелинейных дефференциалъных урав-нений.1957,YMH, 12:3~73

17 Олейник O.A. O единствености обобщеного решения задачикошидля одной нелинейной системы уравнений встречающейся в механке. 1957,YMH, 12:169~176

18 谷超豪, 李大潜. 数学物理方程. 上海：上海科技出版社, 1987

19 张涵信, 沈孟育. 计算流体力学——差分方法的原理和应用. 北京：国防工业出版社, 2003

20 Sever M. Uniqueness failure for entropy solutions of hyperbolic systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 1989, 42:173~183



21　Thompson P A. Compressible fluid dynamics. New York: McGraw-Hill, 1972
22　周毓麟. 一维非定常流体力学. 北京: 科学出版社, 1990
23　刘儒勋, 王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001
24　李维新. 一维不定常流与冲击波. 北京: 国防工业出版社, 2003
25　水鸿寿. 一维流体力学差分方法. 北京: 国防工业出版社, 1998
26　傅德薰, 汪翼云, 马延文. 计算空气动力学. 北京: 宇航出版社, 1994
27　Oswatitsch K. Gas dynamics. New York: Academic Press Inc, 1956
28　童秉纲, 孔祥言, 邓国华. 气体动力学. 北京: 高等教育出版社, 1990
29　张连玉, 汪令羽, 苗瑞生. 爆炸气体动力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1987
30　苗瑞生, 居贤铭. 火箭气体动力学. 北京:国防工业出版社, 1985
31　赵承庆, 姜毅. 气体射流动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1998
32　Gaydon A G, Hurle I. The shock tube in high temperature chemical physics. New York: Reinhold, 1963
33　梅强中. 水波动力学. 北京: 科学出版社,1984
34　易家训. 流体力学. 章克本, 张涤明, 陈启强等译. 北京: 高等教育出版社, 1982
35　叶敬棠, 柳兆荣, 许世雄等. 流体力学. 上海: 复旦大学出版社, 1989
36　张兆顺, 崔桂香. 流体力学. 北京: 清华大学出版社, 1999
37　夏震寰. 现代水力学. 北京: 高等教育出版社, 1992

习　题

1. 从无粘、完全气体、非定常基本方程组式（4－1－21）出发，给出矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 的具体表达式，问 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 是对称矩阵吗？

2. 求方程组式（4－1－23）的特征方程和特征值。

3. 从式（4－2－37）出发，在笛卡儿直角坐标系下将上述方程组整理为式（4－2－39）的形式，求 $\tilde{\boldsymbol{A}}_1,\tilde{\boldsymbol{A}}_2,\tilde{\boldsymbol{A}}_3$ 的具体表达式。

4. 考虑如下形式的等温欧拉方程和初始条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial f(U)}{\partial x}=0, & (x\in\Omega, t>0)\\ U(x,0)=U_0(x) & (x\in\Omega)\end{cases}\tag{*1}$$

这里 $\boldsymbol{U}=[\rho,\rho u]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho(u^2+a^2)\end{bmatrix}$。$\rho,u,a$ 分别代表密度、速度、声速。由于等温假设，因此式中 a 为常数。

（1）计算雅科比矩阵 $\boldsymbol{A}\equiv \mathrm{d}\boldsymbol{f}/\mathrm{d}\boldsymbol{U}$，并求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

（2）计算 A 的左、右特征矢量矩阵。

（3）计算特征变量，并建立特征变量与原始变量 $[\rho,u]^{\mathrm{T}}$ 间的关系，问：这种关系的特点及具体表达形式。

（4）如果在 $x=0$ 处分两种情况给定边界条件

① $\rho(0,t)=\varphi_1(t)$ （*2）

② $u(0,t)=\varphi_2(t)$ （*3）

试利用 § 4.4 节给出的边界条件提法，分析由方程（*1）式和条件（*2）式或者（*3）式所定义的初边值问题是否适定？

5. 考虑明渠中的浅水长波运动，其一维非线性浅水动力学方程为[9, 33-37]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+(g\cos\theta)\dfrac{\partial h}{\partial x}=g\sin\theta-\dfrac{\tau_0}{\rho R}\end{cases}\tag{*4}$$

式中，u 与 h 分别为水的速度与深度；g 为重力加速度；θ 为渠道底部的倾斜角；τ_0 为由 Manning 公式所决定的摩阻；R 为水力半径；ρ 为密度。为突出加速作用，也为简单起见，这里不考虑粘性作用，且假定渠道底是平的，因此这时（*4）式便退化为一维不可压缩无粘圣维南（Saint-Venant）基本方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}=0\end{cases}\tag{*5}$$

试求出关于（*5）式的特征线方程和相容性关系，并讨论：（1）不可压缩的浅水流动与完全气体等熵流动之间的比拟；（2）水力学中的水跃现象与气体力学中的激波现象之间的类比；（3）水库开闸时，水在排泄时出现的波动现象与气体力学中的膨胀波之间的比拟；（4）水库关闸时出现的断波跃升与气体力学中的压缩波聚集合并之间的比拟；（5）如果长形水池中央有一隔板将两边深度不同的水隔开，现将隔板突然抽出，这时池内的水体运动与本书 § 4.8 节中所讲述的初始间断分解及黎曼问题之间的比拟。

6. 从一维非定常无粘均熵流基本方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2mm]\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}+\rho u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial P}{\partial x}=0\end{cases}\tag{*6}$$

出发，证明它能够变为下面的形式



$$\begin{cases}\dfrac{\partial a}{\partial t}+u\dfrac{\partial a}{\partial x}+\dfrac{\gamma-1}{2}a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{2}{\gamma-1}a\dfrac{\partial a}{\partial x}=0\end{cases} \tag{*7}$$

式中，a 为声速。

7. 如图 4.30 所示的右行简单波与左行简单波在静止气体中传播，试证明简单波前后参数满足如下关系

$$\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}=\left[1\pm\frac{\gamma-1}{2}\frac{V_2}{a_2}\right]^{-1} \tag{*8}$$

式中，“–”号对应于右行波，“+”号对应于左行波。

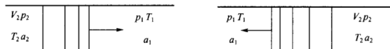


图 4.30　右行与左行简单波

8. 某等截面直管，两端置有活塞（左边活塞为 1，右边活塞为 2），中间为静止的空气。在某一时刻活塞 1 突然以等速向右运动，因此在静止气体中产生一个向右运动的正激波。已知该波速度 $N=408$ m/s；当激波刚好到达活塞 2 时，活塞 2 突然以速度 U 向右运动，这里 U 为常数；已知静止的空气参数为 $P_1=10^5$ N/m^2，$a_1=340$ m/s，$V_1=0$，如图 4.31 所示，试问：

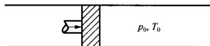


图 4.31　右行激波在两活塞之间的空气中传播

（1）当 U 分别等于 0，80 m/s，204 m/s 时，初始激波在活塞 2 处将会反射为何种波，为什么？

（2）当 $U=204$ m/s 时，求活塞 2 的表面压强？

9. 某原子弹爆炸产生的激波相对于地面的速度为 60 km/s，静止的空气压强为 1 atm，温度为 300 K，试求激波扫过后的压强 P_2 和温度 T_2=?

10. 设左行中心膨胀波向静止气体（这里声速为 a_0）传播。假定第 I 族特征线 c^+ 上当 $t=t_0$ 时 $x=a_0t_0$，试证明：

（1）第 II 族特征线 c^- 的方程为

$$x=-\frac{2}{\gamma-1}a_0 t+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_0 t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}} \qquad (*9)$$

（2）第Ⅲ族特征线（迹线）方程为

$$x=-\frac{2}{\gamma-1}a_0 t+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_0 t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \qquad (*10)$$

11. 对于一束右行简单波，波前气体参数用下标“1”来表示，波后用下标“2”，试用二项式展开法证明下列近似公式成立，即

$$\begin{cases} a_2=a_1+\dfrac{\gamma-1}{2}(V_2-V_1) \\ P_2=P_1\left[1+\gamma\left(\dfrac{V_2-V_1}{a_1}\right)+\dfrac{\gamma(\gamma+1)}{4}\left(\dfrac{V_2-V_1}{a_1}\right)^2+\cdots\right] \end{cases} \qquad (*11)$$

12. 如图 4.32 所示，设在 $t=0$ 时直管 A 点（$x_A=1$ m）处有一个右行压缩波，右端动壁与波前气流以相同的速度 $V_1=20$ m/s 向右运动，A 点处的气流压强 $P_1=1.6\times10^5$ Pa，$T_1=70$ ℃，波后气流速度 $V_2=26$ m/s，气体常数 $R=287$ J/（kg·K），比热比 $\gamma=1.4$；试求：

（1）区域 3 中的气流参数；

（2）D 点（即 $x_D=1.2$ m）的迹线；

（3）当压缩波 AB 到达 B 点时，动壁速度应大于多少时反射波才为膨胀波？

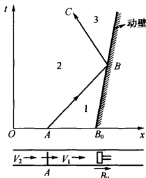


图 4.32 压缩波在动边界上的反射

13. ①“压缩波提供给气体的加速度方向是与波的传播方向一致的，而膨胀波提供给气体的加速度方向是与波的传播方向相反”，这句话对吗？为什么？

②“在压缩波区，随着时间的增长，特征线会变得越来越密集；在膨胀波区，随着时间的增长，特征线会变得越来越稀疏”，这句话对吗？为什么？

14. “在非定常流动中，某一状态下的流动参量与其滞止参量之间不再满足一维等熵关系式。在简单波区，这两种参量之间的关系可以写为



$$
\begin{cases}
\dfrac{a_0}{a}=1\pm\dfrac{\gamma-1}{2}M \\
\dfrac{\rho_0}{\rho}=\left(1\pm\dfrac{\gamma-1}{2}M\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \\
\dfrac{P_0}{P}=\left(1\pm\dfrac{\gamma-1}{2}M\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}
\end{cases}
\tag{*12}
$$

式中，正号用于左行波，负号用于右行波。这里 M 定义为 $M\equiv u/a$，它可能大于零，也可能小于零（在这一点上与定常流动时的情形不同）”，这段话对吗？为什么？

15. 在一个管道内有温度为 21℃和压强为 1.013×10^5 Pa 的静止空气，今有压强比为 2.0 的右行激波与压强比为 4.0 的左行激波分别从管道的左端附近与右端附近传入，试求两波相交后各区气流的压强、温度、流速以及波速。

16. 在一个管道内有温度为 21℃和压强为 1.013×10^5 Pa 的静止空气，有一个压强比为 2.0 的右行激波被另一个压强比也是 2.0 的右行激波追上，试求相交后各区气流的压强、温度、流速以及波速？

17. 如果在某个一维管道中有两道相同方向传播着的波（激波或简单波）（见图 4.33），试讨论如下四种情况：

（1）如果前面一道（即第一道波）是压缩波，后面一道（即第二道波）是单波，那么第二道波会赶上第一道波吗？

（2）如果第一道为压缩波，第二道为正激波，那么第二道波会赶上第一道波吗？

（3）如果第一道波为正激波，第二道也是正激波时，那么第二道波会赶上第一道波吗？

（4）如果第一道波为膨胀波，第二道波也是膨胀波，那么第二道波会赶上第一道波吗？

通过以上几种情况的讨论，能否对两道相同方向传播的波给出一个普遍的规律？

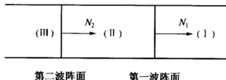


图 4.33　两道同向波的追赶问题

18. 激波管用氦气作高压气体（如图 4.28 所示的④区），用 N_2 作低压气体（见①区）。两种气体处于室温状态，测得压力比 $(P_2/P_1)=3$，试求 P_3/P_1，P_4/P_1，M_2 和 M_3 的值。



19. 如果激波管的高、低气压室采用同一种单原子的气体，并且 $\gamma_1=\gamma_4=5/3$，$T_1=T_4=300\,\mathrm{K}$，$P_4/P_1=10$，试计算 T_2 和 T_3，如见图 4.28 所示。

20. 如图 4.34 所示，虚线为接触间断面，ab 线是反射激波。300 K 为低压气体氩气的温度，$l=3$ m，$P_2/P_1=15$，求激波管运行时间中的两个重要数据 t_a 和 t_b 值？能否找到 (a_1t_a/l) 和 (a_1t_b/l) 随 γ_1 以及 (P_2/P_1) 的变化关系？

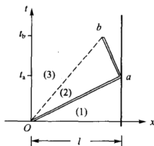


图 4.34　确定激波管运行时间的有关参数

第 5 章　粘性流动与湍流模型基础

§ 5.1　粘性流动的一般概述

正如文献[1]所指出的，粘性流体力学主要研究分子的输运和湍流脉动所引起的掺混输运对流体动力学过程的影响。因此，流体的分子输运与湍流输运深刻的反映着粘性流体力学的重要特征。事实上，存在于自然界中的所有流体都具有一定的粘性，粘性的存在给流体运动的数学描述和处理带来很大困难。正因如此，对于诸如水、空气等一些粘性较小的流体，在一定的条件下，往往可以用一种粘性系数为零的流体模型来代替，以便较为清晰地揭示流体运动的主要特征，较为方便的求出流体运动规律。这种粘性系数为零的流体模型便称作理想流体或无粘流体。因此为方便工程计算与理论研究，从所采用的流体模型上看流体可有无粘与粘性模型之分。粘性流体的运动又有层流与湍流两种状态的区别。对于粘性流体流动的一般性质，例如运动的有旋性、机械能的耗散性和涡旋的扩散性，在流体力学基础课程[2~28]中已讲过，所以也就不作详述，这里仅就其中的某些方面略作介绍。

5.1.1　分子输运与湍流输运

分子层次的输运是由分子无序运动完成的，例如温度不均匀即存在温度梯度时，分子运动将使温度分布趋于均匀，其宏观表现是热量从高温处向低温处流动，即热传导或者热扩散现象，并在实验的基础上建立了傅里叶（Fourier）定律

$$\boldsymbol{q}=-k\nabla T \tag{5-1-1}$$

式中，$\boldsymbol{q}$ 为热流矢量，k 为热传导系数。

同样，如果把速度看成单位质量流体所具有的动量，则当存在速度梯度时分子运动对动量的输运会表现为两流层之间的相互作用力，即粘性力。可用类似于定义热传导系数的方式定义粘性系数μ，若粘性系数越大，则两相邻流层之间的动量变换越大，粘性系数成了衡量流体抵抗大的（剪切）变形速率能力的量度。再如，当流体中某成分的浓度分布不均匀即存在浓度梯度时，分子运动将会使之均匀化，这种对质量的输运称为质量扩散过程，而斐克（Fick）定律反映了浓度梯度与质量输运量之间的关系。同样地，也可以定义出一个质量扩散系数 D，因此，分子运动所引起的动量、热量和质量的输运（或者称传输、交换），在宏观上就表现为流体的粘性、热传导性和质量扩散性。在湍流流动中，除了分子的传输现象外，宏观流体微团的湍流脉动所引起的渗混运动也引起动量、热量和质量的输运。这种掺混输运

对于流动过程和力的平衡有着非常重大的影响，就好像流体粘性增加了 100 倍、1 000 倍，甚至更多那样。这些量的湍流传输结果，从表象上看相当于在流体中产生了附加的“湍流切应力”、“湍流热传导”和“湍流质量扩散”。由于流体微团的质量比分子的质量大得多，因此湍流输运的强度自然要比分子输运的强度大得多。尽管湍流掺混运动与分子运动之间有重要的差别，但是早期半经验的湍流理论的创立者还是仿照分子输运性质的定律去建立湍流输运性质的公式。在这种框架下，定义了湍流粘性系数μ_t湍流热传导系数 k_t和湍流质量扩散系数 D_t，并且确认湍流切应力τ_t，湍流传运的热通量 q_t和湍流质量扩散引起的质量通量分别与平均速度的法向导数、平均温度梯度和平均浓度梯度有正比关系。事实上，在流体中同时存在着湍流的输运性和分子的输运性质，为了便于讨论，这里仅考虑只有一个速度分量的简单剪切流动，这时总的切应力、热通量和质量输运量应该为

$$\begin{cases}\tau_{总}=(\mu+\mu_t)\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}=\mu_{ef}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}\\ q_{总}=-(k+k_t)\dfrac{\partial\bar{T}}{\partial y}=-k_{ef}\dfrac{\partial\bar{T}}{\partial y}\\ \left(\dfrac{\dot{m}_i}{A}\right)_{总}=-(D+D_t)\dfrac{\partial\bar{\rho}_i}{\partial y}=-D_{ef}\dfrac{\partial\bar{\rho}_i}{\partial y}\end{cases}\tag{5-1-2}$$

式中，$\bar{u}$ 、$\bar{T}$ 、$\bar{\rho}_i$ 分别为平均速度、平均温度和平均容积浓度；y 为垂直于速度方向的坐标；$\dot{m}_i$ 为单位时间内通过面积 A 第 i 组分气体的质量输运量；μ_{ef} ，k_{ef} 与 D_{ef} 分别称为有效粘性系数、有效热传导系数与有效质量扩散系数。应该指出：湍流脉动所引起的渗混输运（以下简称湍流输运）与分子输运在机理上是有所不同的，不能完全仿照分子输运系数的方法去确定湍流输运系数，二者之间至少有下列三点差别：

（1）分子运动的状态只取决于流体的热力学状态，它不受流体宏观运动的影响，因此分子输运系数 μ,k 与 D 等只取决于流体的固有性质。而湍流运动的状态则与平均流场直接有关，因此湍流输运系数 μ_t ，k_t 与 D_t 主要取决于流体的平均运动。

（2）在一般情况下，分子运动的速度比流体宏观运动的速度大得多，而分子运动的平均自由程要比平均流场的特征长度小得多，因而对于分子输运性质，建立局部平衡的定律（例如式（5.1.1））是合理的。但是，湍流运动的脉动速度往往比平均流动速度小得多，而且流体微团作湍流掺混运动的特征长度往往与平均流场的特征长度具有相同的数量级。因此严格来讲对湍流输运性质仅作逐点局部平衡是不够的，还应该考虑湍流输运性质的松弛效应，要考虑周围流场对某时刻、某空间点湍流输运性质的影响。

（3）在一般情况下，分子运动是各向同性的，因而分子输运系数 μ,k,D 等也是各向同性的。但是在大多数情况下，湍流运动是非各向同性的，因而湍流输运系数 μ_t,k_t 与 D_t 等也应该是非各向同性。



正由于湍流输运性质的上述特点，因此湍流流动的理论分析至今仍是流体力学中远未彻底解决的问题[29, 30]。

5.1.2　粘性流体的壁面作用及涡量的产生

从运动学的角度，流动分为有旋流与无旋流（又称势流）；对于有旋流其涡量不为零。从动力学的角度，涡量场又和粘性流动存在着对应关系。例如，物面的边界层、分离流区、尾迹区等粘性流动，必然分布着涡量或者一个个的涡旋。它们之间的联系来源于如下的推论：涡量和应变速率都是由于流场的速度梯度所造成，速度梯度越大，应变速率和涡量也越大；流体的粘性应力大小取决于应变速率的大小，特别是剪切应变速率的值。因此涡量场和粘性流自然存在着因果关系，也就是说：涡量因粘性流体的无滑移边界条件而产生，因粘性而扩散，又因粘性而耗散。这里不妨举一个简单的例子。今考虑平板附近的不可压缩流动，设点 A 是平板上一点，x 轴选取沿流线方向，y 轴沿法线方向。根据粘性流体的无滑移条件，于是在壁面上有

$$\begin{cases} u=0,\ v=0,\ w=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{5-1-3}$$

它们是由连续方程得到的。此时壁面上的剪切应力为 $\tau_w=\mu\dfrac{\partial u}{\partial y}$。按照涡量的定义（见式（1-4-64）），在壁面上的涡量为

$$\begin{cases} \omega_z=-\partial u/\partial y \\ \omega_x=0,\omega_y=0 \end{cases} \tag{5-1-4}$$

因

$$\tau_w=-\mu\omega_z \tag{5-1-5}$$

在一般情况下，对于不可压缩流动有[31]

$$\boldsymbol{\tau}_w=-\mu\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega} \tag{5-1-6}$$

显然，壁面上的涡量和壁面的剪切应力直接相关。正如我们所知道的，壁面剪切应力的大小是由粘性流体的无滑移边界条件所制约。可以这样来设想物面产生涡量的过程：假设在 $t=t_0$ 时刻流场无旋，则可用无旋流方程求解流场，所得的无旋场惟一地由物面法向速度的边界条件所决定，而这时无滑移边界条件一般不能得到满足，结果在物面上会形成非零的相对切向速度以及伴随的强剪切力，因此必然会在物面上搓出刚好足够的涡量，使它诱导的速度恰好能去消除无旋解所导致的相对切向速度。所以，物面是通过粘性流体的无滑移物面边界条件而产生涡量的；也正是由于粘性，这些生成的涡量将扩散到流体内部，并借助于对流往下游输运。为了确定到底有多少涡量从壁面上生成并进入流体中，今定义涡量流率（或称

涡量源强度）$\boldsymbol{B}$，它是 Lighthill（莱特希尔）首先引入的，$\boldsymbol{B}$ 表示了单位时间内通过单位面积的涡通量。$\boldsymbol{B}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{B}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial n}=-\mu(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} \tag{5-1-7}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是物面的单位法矢量，负号表示沿外法矢量方向离开物面时，涡量的绝对值将减小。涡量绝对值的最大值发生于物面。也就是说式（5－1－7）表明了涡量流率正比于涡量的法向导数。考虑不可压流 N–S 方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{dt}=-\nabla P+\mu\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{V}=-\nabla P+\mu\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{5-1-8}$$

注意到

$$\nabla^2\boldsymbol{V}=\nabla\theta-\nabla\times\boldsymbol{\omega} \tag{5-1-9}$$

这里θ与$\boldsymbol{\omega}$分别为胀量（dilatation expansion）（见式（1－6－65）的定义）与涡量。对于不可压缩流，$\theta=0$，这时（5－1－8）式被简化为

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla P-\frac{\mu}{\rho}\nabla\times\boldsymbol{\omega} \tag{5-1-10}$$

在壁面上，$\boldsymbol{V}=0$，则

$$\nabla P=-\mu\nabla\times\boldsymbol{\omega} \tag{5-1-11}$$

将上式在壁面流线方向投影，如图 5.1 所示，于是有

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}=-\mu\frac{\partial\omega_z}{\partial n}=B_z$$

式中，$\partial/\partial\tau$ 表示沿流线方向求偏导。这里（$\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$）构造右手系。这表明壁面压强梯度的存在是壁面产生涡量流率的必要条件。壁面涡量流率的一般形式可以写为

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{n}\times\nabla P \tag{5-1-12}$$

对于静止壁面来说，可以证明[32]壁面上的应变速率张量 $\boldsymbol{D}$ 与壁面上的涡量$\boldsymbol{\omega}$，胀量θ之间满足如下条件（如图 5.1 所示）

$$2\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\theta+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \tag{5-1-13}$$

上式在推导时，使用了粘性流体的壁面无滑移条件，即在壁面上有

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V}=0\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{V}=0\end{cases} \tag{5-1-14}$$

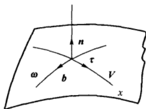


图 5.1　静止壁面上的流线和涡线



由式（5－1－13）可以很清楚地看出：壁面的应变速率张量可以由壁面涡量与壁面胀量去表达。因此，弄清楚粘性流场中涡量与胀量的分布有助于搞清粘性流体运动的内在规律，有助于搞清分子输运与湍流输运过程中涡的产生、运动、演化、失稳和衰减以及它们与固壁之间、各个涡之间的相互作用[33, 34]，有助于湍流现象的更深入研究[35]。

5.1.3　近代湍流研究的突出进展

湍流又称紊流，是一种很不规则的流动现象，是流体微团或者说是巨量分子群的平均不规则运动。湍流运动产生的质量和能量的输运远远大于分子热运动产生的宏观输运，这就导致了湍流场中质量和能量的平均扩散远远大于层流扩散。湍流现象的系统研究始于 19 世纪末，雷诺提出了统计平均方法[36]，他把不规则的湍流流场分解为规则的平均流场和不规则的脉动流场，从而把湍流研究的重点引向湍流统计特性；他提出了脉动场的平均输运概念，导出了雷诺应力；他开辟了湍流统计理论的道路，同时也提出了如何封闭雷诺应力的世纪难题。湍流的统计研究过去主要沿两个方向发展：一个是湍流相关函数的统计理论，另一个是湍流平均量的半经验分析。前一种理论主要用相关函数及谱分析等方法研究湍流结果，从而大大地增加了人们对湍流（特别是湍流的小尺度部分）机理的了解。其主要代表人物是英国的 G.I.Taylor（泰勒）和苏联的 N.Kolmogorov（柯尔莫戈罗夫）；Taylor 是一位杰出的物理学家，他认为湍流的载体是大大小小的随机涡（Eddy），他把湍流的动量输运和标量输运称之为湍涡粘度和湍涡扩散[37]。Kolmogorov 是一位卓越的数学家，他认为湍流脉动是一种多变量的随机过程，他用量纲分析的方法导出了局部各向同性湍流的普适能谱[38]。但由于湍流状态下影响动量和热量交换能力的主要是大尺度运动而不是小尺度运动，而相关统计理论主要涉及小尺度的运动，所以它未能解决工程技术方面的实际问题。湍流的半经验理论却是另一种情况。它针对工程技术上迫切需要解决的问题，例如管流、边界层和自由湍流等进行了大量的试验研究去确定湍流的特征参数，并在此试验的基础上提出湍流的半经验理论，这些理论将数据系统化并可用来预估类似条件下的结果。由于这种理论主要涉及湍流的大尺度运动，虽然这些理论未能明显地增进人们对湍流实质的了解，但是对解决实际问题却有很大贡献。这方面的代表人物有普朗特、冯・卡门和尼古拉兹（Nikuradse）等，泰勒在这方面也做了大量工作。另外，我国的周培源先生 1945 年提出湍流相关张量的动力学方程[39]被公认为是近代湍流模式理论的奠基人。正如许多著名文献所总结的那样，20 世纪 60 年代以来，湍流研究主要有三大方面的突出进展：

1. 在切变湍流中发现了大尺度拟序结构[40, 41]

在充分发展湍流中，这种拟序结构是产生湍流脉动的关键机制。拟序结构的发现，纠正了人们对湍流的传统认识，湍流并非完全不规则运动，而是有结构的不规则运动。这种认识对于控制和预测湍流有极其重要的指导意义。人们发现可以通过控制拟序结构来控制湍流输

运，例如控制摩阻、传热和传质以及噪声等。

2. 在确定性非线性微分方程中可以获得渐近的不规则解，也就是可能出现混沌现象

Lorenz[42]在研究多维热对流问题时将原始的流体力学方程加以截断，简化后得到一组非线性常微分方程，即著名的 Lorenz 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sigma x+\sigma y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=rx-y-xz\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-bz+xy\end{cases} \tag{5-1-15}$$

式中 r 为一个参数。当取不同的 r 值时，可出现完全不同的结果。洛伦兹（Lorenz）方程组可作为贝纳德（Benard）对流问题的近似描述，在研究中发现：在一定的参数范围内，热对流过程中会出现奇异吸引子（Strange attractor），它不是简单的极限环，而是有宽带频谱的不规则运动。混沌（choas）现象的发现说明了有结构的不规则运动可以是确定性非线性微分方程本身的性质。因此可以有理由去推测，牛顿流体的湍流运动是 Navier-Stokes 方程在高雷诺数条件下的不规则解。这里应该指出：在一般情况下，层流 N–S 方程初边值问题解的存在和惟一性，尚未得到数学上的严格证明。只有在很苛刻的条件下层流 N–S 方程解的存在和惟一性才有明确的答案，例如数学上已证明了下面四种特殊条件下，解是存在的和惟一的：① 定常、层流 N–S 方程的边值问题至少有一个解，但是只有当雷诺数不大时，解才是稳定的；② 非定常平面或轴对称流动的初边值问题，在一切时刻都有惟一解；③ 对于一般的三维非定常流动的初边值问题，只有当雷诺数很小时，才有惟一解；④ 任意雷诺数的三维非定常流动的初边值问题只有在某一个时间区间 $0<t<T$ 内，解是惟一的。时间区间 T 依赖于雷诺数和流动的边界，雷诺数愈大，存在惟一解的区间愈小。当不满足解的惟一性条件时，N–S 方程可能存在分岔解。注意以上这四点结论都是针对层流 N–S 方程而言的。至于 N–S 方程是否能够描述湍流，用数学语言来讲就是确定性的非线性偏微分方程是否可能有长时间的不规则渐近解，对于这个问题，国际上仅能给出这样一个结论：非线性常微分方程组的初值问题可能产生长时间不规则解（又称混沌解）。不过，直到现在人们仍普遍认为：N–S 方程组可用来描述湍流流动[1]。可以认为：随着流动雷诺数的增加，流动由层流向湍流过渡的现象是 N–S 方程初边值问题解的性质在发生变化。层流是小雷诺数下 N–S 方程初边值问题的惟一解。随着雷诺数的增加，出现过渡流动，相应的在 N–S 方程本身解的特征上就表现为分岔解。对于高雷诺数的湍流，则对应于 N–S 方程的渐近不规则解。也就是说，直到现在人们仍普遍认为，无论是层流还是湍流，它们都服从 N–S 方程。

3. 耗散结构理论是非平衡态热力学的一个重大发展

该理论认为在一个非线性开放系统中，当它远离平衡态时，有可能从原来无序混乱状态



转变为一种时间空间有序的新状态，这种有序状态需要不断与外界交换物质和能量才能维持，这种有序结构被称为耗散结构。系统的这种从无序到有序现象称为自组织现象。在流体力学中存在着许多自组织现象，例如 Benard（贝纳德）对流不稳定性，从静止的流体中产生了有组织的对流胞；再如，旋转 Couette（库埃特）流中的泰勒涡和波状泰勒涡等。因此，许多学者从耗散结构理论入手研究湍流的发生和湍流中的拟序结构。另一方面湍流的直接数值模拟也取得了十分可喜的成果。数值结果证实了拟序结构的存在，而且还给出了这种结构的定量数据。此外，直接数值模拟还给出了湍流脉动的许多细节，例如各向同性湍流中主要的大尺度结构是管状涡等，而对这些细节过去几乎一无所知。应该看到，直接模拟工作国外在 20 世纪 70 年代初就已经开始了，例如 Orzsag 等[43]在 1972 年就完成了 32×32×32 网格下低雷诺数各向同性湍流的直接数值模拟，并取得了很好的结果。另外，在低雷诺数简单切变湍流的条件下，直接数值模拟可以得到时间与空间上的不规则解，将这些数值解作系综统计或时间平均能够得到与物理实验相同的统计结果。综上所述，湍流直接模拟研究的实践，使人们更有信心确认 N–S 方程组可以描述牛顿型流体的湍流输运流动。

§ 5.2* 基本方程组的几种通用形式及粘性项的计算

本节讨论目前气体动力学数值计算中最常用的基本方程组的微分与积分型通用形式，其中包括直角坐标系与贴体曲线坐标系下微分形式守恒型基本方程组以及有限体积法中常采用的积分形式。另外，还特别给出了守恒型方程组坐标变换的一些重要特点以及有限体积法中粘性项计算的技巧。

5.2.1 直角坐标系下守恒型基本方程组的微分形式

守恒型气体动力学基本方程组的微分形式已由式（1－4－39）、式（1－4－40）与式（4－1－41）给出，在省略了彻体力后这组方程可变为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0\\&\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{I}P-\Pi)=0\\&\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot\left[(\varepsilon+P)\boldsymbol{V}-\Pi\cdot\boldsymbol{V}-(k\nabla T)\right]=0\end{aligned}\right\}\tag{5-2-1}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为单位体积气体的广义内能（又称总能），它已由式（1－4－50）定义；$\boldsymbol{I}$ 为单位张量，其定义同式（1－4－9）；Π 为粘性应力张量；$\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{V},\boldsymbol{P}$ 与 T 分别代表密度、速度、压强与温度；$\boldsymbol{k}$ 为热传导系数。

令$\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$，这里$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$为笛卡儿直角坐标系$(x,y,z)$沿坐标轴的单位矢量，$u$、$v$、$w$为相应的分速度，于是在直角坐标系下式（5－2－1）可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial y}+\frac{\partial(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v)}{\partial z}=0 \tag{5-2-2}$$

式中，$\boldsymbol{U}$为直角坐标系的守恒量，其表达式由（5－2－3）式给出；$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{G}$分别代表沿x，y与z方向的无粘矢通量；$\boldsymbol{E}_v,\boldsymbol{F}_v$与$\boldsymbol{G}_v$分别代表在$x$，$y$与$z$方向上由于粘性及热传导所引起的作用项。令$\tau_{xx},\tau_{xy},\cdots,\tau_{zz}$为粘性应力张量$\boldsymbol{\Pi}$的分量，于是$\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{E}_v,\boldsymbol{F}_v$等的表达式为

$$\boldsymbol{U}=[\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\varepsilon]^{\mathrm{T}} \tag{5-2-3}$$

$$[\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}]=\begin{bmatrix}\rho u & \rho v & \rho w\\ \rho uu+P & \rho vu & \rho wu\\ \rho uv & \rho vv+P & \rho wv\\ \rho uw & \rho vw & \rho ww+P\\ (\varepsilon+P)u & (\varepsilon+P)v & (\varepsilon+P)w\end{bmatrix} \tag{5-2-4}$$

$$[\boldsymbol{E}_v,\boldsymbol{F}_v,\boldsymbol{G}_v]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix} \tag{5-2-5}$$

式中，符号a_1,a_2与a_3的定义同式（1－4－49）。

应该特别指出的是，式（5－2－2）的运动方程是采用沿 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,三个方向分别列出的。另外，为便于以后的讨论特引进三个通用符号φ,Γ,S，于是式（5－2－2）又可改写为（注意这里用了爱因斯坦求和规约）

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y^i}(\rho u_i\varphi)=\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y^i}\right)+S \tag{5-2-6}$$

式中，(y^1,y^2,y^3)代表直角笛卡儿坐标系(x,y,z)；u_i代表速度$\boldsymbol{V}$在直角坐标系(y^1,y^2,y^3)下沿坐标线的速度分量。

显然，当选取$\varphi=1,S=0$时，则得到连续方程；当$\varphi=u_k$，$S=S_k$（k=1～3）并且$\Gamma=\mu$时可以得到沿y^k坐标方向的运动方程，这里S_k的表达式为

$$S_k=\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial y^k}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y^k}(\mu\nabla\cdot\boldsymbol{V})-\frac{\partial P}{\partial y^k} \tag{5-2-7}$$

式中，$i=1\sim3$。作为课后作业，请读者推导一下当φ,Γ与S分别等于多少时，式（5－2－6）可以代表（5－2－2）式中的能量方程。另外，如果令(y^1,y^2,y^3)代表直角坐标系(x,y,z)并且



令

$$q^0 = U,\quad q^1 = E - E_v,\quad q^2 = F - F_v,\quad q^3 = G - G_v,\quad y^0 = t \tag{5-2-8}$$

则式（5-2-2）便可以改写为（这里采用求和规约）

$$\frac{\partial q^i}{\partial y^i} = 0 \quad (i = 0,1,2,3) \tag{5-2-9}$$

5.2.2　曲线坐标系下守恒型方程组的微分形式

令 (y^1, y^2, y^3) 与 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) 分别代表直角笛卡儿坐标系与任意曲线坐标系，令 $\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$ 分别表示沿 y^1, y^2, y^3 的单位矢量，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为坐标系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) 的基矢量。参照本书 § 1.2 节介绍的有关张量计算方法，于是连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i\right) = 0 \tag{5-2-10}$$

或者

$$\frac{\partial\left(\rho\sqrt{g}\right)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\rho v^i \sqrt{g}\right) = 0 \tag{5-2-11}$$

式中

$$\sqrt{g} = \frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)} \tag{5-2-12}$$

运动方程为

$$\boldsymbol{e}_i \frac{\partial\left(\rho v^i\right)}{\partial \tau} + \boldsymbol{e}_i \nabla_k \left(\rho v^i v^k - \tau^{ik} + P g^{ki}\right) = 0 \tag{5-2-13}$$

或者

$$\frac{\partial\left(\rho \boldsymbol{V}\sqrt{g}\right)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left[\sqrt{g}\left(\rho v^k \boldsymbol{V}\right) + \sqrt{g}\left(P g^{ki} - \tau^{ki}\right)\boldsymbol{e}_i\right] = 0 \tag{5-2-14}$$

这里 τ^{ik} 由式（1-4-44）定义。

当然也可引进应力张量 $\boldsymbol{\pi}$（见（1-4-10）式），并定义一个新的张量 $\boldsymbol{\lambda}$，其分量 λ^{ik} 为

$$\lambda^{ik} = \rho v^i v^k - \tau^{ik} + g^{ik} P \tag{5-2-15}$$

式中，v^1, v^2, v^3 代表速度 $\boldsymbol{V}$ 在坐标系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) 中的逆变分速度。

于是运动方程可写为

$$\frac{\partial\left(\rho \boldsymbol{V}\sqrt{g}\right)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\lambda^{ik} \boldsymbol{e}_i \sqrt{g}\right) = 0 \tag{5-2-16}$$

令$\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$为直角坐标系$(y^1,y^2,y^3)$的单位矢量，并且有$\boldsymbol{V}=u^\beta \boldsymbol{i}_\beta$，这里$u^1,u^2,u^3$代表速度$\boldsymbol{V}$在$(y^1,y^2,y^3)$坐标系中的分速度，于是在$\boldsymbol{i}_\beta$方向上的运动方程为

$$\frac{\partial\left(\rho u^\beta\sqrt{g}\right)}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\xi^k}\left(\lambda^{ik}\sqrt{g}\,\frac{\partial y^\beta}{\partial\xi^i}\right)=0 \quad . \qquad (\beta=1\sim 3) \tag{5-2-17}$$

对于能量方程，可写为

$$\frac{\partial\left(\varepsilon\sqrt{g}\right)}{\partial\tau}+\frac{\partial\left(b^i\sqrt{g}\right)}{\partial\xi^i}=0 \tag{5-2-18}$$

式中

$$b^i\equiv(\varepsilon+P)v^i-\tau^{\beta i}v_\beta-kg^{i\beta}\frac{\partial T}{\partial\xi^\beta} \tag{5-2-19}$$

这里T为温度。将式（5－2－11）、式（5－2－17）与式（5－1－18）展开，便有

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial\tau}+\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial\xi^1}+\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{F}}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{G}}}{\partial\xi^3}=0 \tag{5-2-20}$$

$$\left[\tilde{\boldsymbol{U}},\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{F}},\tilde{\boldsymbol{G}}\right]=\sqrt{g}\begin{bmatrix} \rho & \rho v^1 & \rho v^2 & \rho v^3 \\ \rho u^1 & \lambda^{i1}\dfrac{\partial y^1}{\partial\xi^i} & \lambda^{i2}\dfrac{\partial y^1}{\partial\xi^i} & \lambda^{i3}\dfrac{\partial y^1}{\partial\xi^i} \\ \rho u^2 & \lambda^{i1}\dfrac{\partial y^2}{\partial\xi^i} & \lambda^{i2}\dfrac{\partial y^2}{\partial\xi^i} & \lambda^{i3}\dfrac{\partial y^2}{\partial\xi^i} \\ \rho u^3 & \lambda^{i1}\dfrac{\partial y^3}{\partial\xi^i} & \lambda^{i2}\dfrac{\partial y^3}{\partial\xi^i} & \lambda^{i3}\dfrac{\partial y^3}{\partial\xi^i} \\ \varepsilon & b^1 & b^2 & b^3 \end{bmatrix} \tag{5-2-21}$$

需要特别强调的是式（5－2－20）中的运动方程是分别沿$\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$方向列出的，这使得方程组具有强守恒型式，并且方程组不出现 Christoffel（克里斯托菲）符号。采用类似的方法，文献[44]给出了旋转相对坐标系中 N–S 方程组的通用形式，感兴趣者可参考。如果将运动方向沿$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$方向列出（即使用式（5－2－13）），则 N–S 方程组可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^1 \\ \rho v^2 \\ \rho v^3 \\ \varepsilon \end{bmatrix}+\nabla_\beta\begin{bmatrix} \rho v^\beta \\ \rho v^\beta v^1-\sigma^{\beta 1} \\ \rho v^\beta v^2-\sigma^{\beta 2} \\ \rho v^\beta v^3-\sigma^{\beta 3} \\ \varepsilon v^\beta-\sigma^{\beta j}v_j-kg^{\beta j}\dfrac{\partial T}{\partial\xi^j} \end{bmatrix}=0 \tag{5-2-22}$$

式中，$\beta,j=1\sim 3$；∇_β为协变导数；k与T分别代表热传导系数与温度；$\sigma^{\beta j}$为应力张量的逆变分量，它与粘性应力张量$\tau^{\beta j}$间满足下列关系



$$\sigma^{\beta j}=\tau^{\beta j}-Pg^{\beta j} \tag{5-2-23}$$

式（5-2-22）又可改写为

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau}+\frac{\partial \bar{E}^i}{\partial \xi^i}-\frac{\partial \bar{F}^i}{\partial \xi^i}=\bar{N} \tag{5-2-24}$$

式中

$$\bar{U}=\sqrt{g}\left[\rho,\rho v^1,\rho v^2,\rho v^3,\varepsilon\right]^{\mathrm{T}} \tag{5-2-25a}$$

$$\bar{E}^i=\sqrt{g}\begin{bmatrix}\rho v^i\\ \rho v^i v^1+g^{1i}P\\ \rho v^i v^2+g^{2i}P\\ \rho v^i v^3+g^{3i}P\\ (\varepsilon+P)v^i\end{bmatrix} \tag{5-2-25b}$$

$$\bar{F}^i=\sqrt{g}\begin{bmatrix}0\\ \mu\left(\nabla^i v^1+\frac{1}{3}g^{i1}\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)\\ \mu\left(\nabla^i v^2+\frac{1}{3}g^{i2}\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)\\ \mu\left(\nabla^i v^3+\frac{1}{3}g^{i3}\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)\\ \mu\tilde{M}^i+kg^{i\beta}\frac{\partial T}{\partial \xi^\beta}\end{bmatrix} \tag{5-2-25c}$$

$$\bar{N}=\left[0,\tilde{N}_1,\tilde{N}_2,\tilde{N}_3,0\right]^{\mathrm{T}} \tag{5-2-26}$$

上面两式中 v^i 为速度 $\boldsymbol{V}$ 的逆变分速度，∇^i 为逆变导数；k 为热传导系数，μ 为粘性系数。式（5-2-24）是一种弱守恒形式，由于运动方程是沿 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 方向列出的，因此不可避免的在右端项 $\bar{N}$ 中含有克里斯托菲符号。文献[45,46]中较详细的给出了上述两组 N–S 方程在曲线坐标系下不同形式的表达，可供参考。作为课后作业练习，读者可以自行推导出式（5-2-24）$\tilde{M}^i$ 与 $\bar{N}$ 的具体表达式。

5.2.3　守恒方程组坐标变换的重要特点

在直角笛卡儿坐标系 (y^1,y^2,y^3) 下，基本方程组（5-2-1）式可以写成守恒方程组（这里采用爱因斯坦求和规约），即

$$\frac{\partial q^i}{\partial y^i}=0\quad(i=0,1\sim 3) \tag{5-2-9}$$

式中

$$\begin{cases} q_0^0 = U = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \varepsilon]^{\mathrm{T}} \\ q^1 = E - E_v,\ q^2 = F - F_v,\ q^3 = G - G_v \\ y^0 = t \end{cases} \tag{5-2-27}$$

这里$E, E_v, \cdots, G, G_v$的定义同式（5－2－2）。为了说明一般的守恒方程组（今以式（5－2－9）为例）进行坐标变换时所具有的一些重要特点，首先讨论一下与函数行列式相关的数学工具。

一、函数行列式的七点重要性质

设(t, y^1, y^2, y^3)为物理空间的坐标系统（下文称作旧坐标系统），$(\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$为计算空间的坐标系统（下文称作新坐标系统），并假定新旧坐标系统间的变换关系为

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= y^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) \\ y^2 &= y^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) \\ y^3 &= y^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) \\ t &= t(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = t(\tau) = \tau \end{aligned}\right\} \tag{5-2-28}$$

为便于讨论，本节约定

$$\left.\begin{aligned} y^0 = t, y^j = y^j (j = 1 \sim 3) \\ \xi^0 = \tau, \xi^j = \xi^j (j = 1 \sim 3) \end{aligned}\right\} \tag{5-2-29}$$

引进函数行列式$\partial(y^0, y^1, y^2, y^3)/\partial(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$，在式（5－2－29）的条件下有

$$J(y^0, y^1, y^2, y^3) = \frac{\partial(y^0, y^1, y^2, y^3)}{\partial(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)} = \frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)} \equiv \sqrt{g} \tag{5-2-30}$$

这里$\sqrt{g}$的定义类似于（1－2－11）式，其表达式为

$$\frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial y^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial y^1}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial y^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial y^3}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \equiv \sqrt{g} \tag{5-2-31}$$

借助于函数行列式的基本知识[47]有如下几点性质（对一般的n阶函数行列式而言）

（1）任意交换一对(ξ^i, ξ^{i+1})或者(y^i, y^{i+1})而保持其它项不变时，则J的符号改变。



$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\left(y^1,\cdots,y^i,y^{i+1},\cdots,y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n\right)}=-\frac{\partial\left(y^1,\cdots,y^{i+1},y^i,\cdots,y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n\right)}\\\frac{\partial\left(y^1,y^2,\cdots y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\cdots,\xi^i,\xi^{i+1},\cdots,\xi^n\right)}=-\frac{\partial\left(y^1,y^2,\cdots y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\cdots,\xi^{i+1},\xi^i,\cdots,\xi^n\right)}\end{aligned}\right\} \tag{5-2-32}$$

（2）当 y^i 与 ξ^i 之间有公共变量时，则发生行列式的降阶，例如

$$\frac{\partial\left(\xi^1,y^2,\cdots,y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n\right)}=\left.\frac{\partial\left(y^2,\cdots,y^n\right)}{\partial\left(\xi^2,\cdots,\xi^n\right)}\right|_{\xi^1} \tag{5-2-33}$$

此时下标 ξ^1 也可省略不写，作为特例，还有

$$\frac{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{n-1},y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{n-1},\xi^n\right)}=\frac{\partial y^n}{\partial\xi^n} \tag{5-2-34}$$

上式是一阶的雅科比行列式，也就是说它仅仅是一个普遍的一阶导数。任一个偏导数都可以写成一个具有 $n-1$ 个公共变量的 n 阶雅科比函数行列式。

（3）设

$$\left.\begin{aligned}y^1&=y^1(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)\\y^2&=y^2(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)\\&\vdots\\y^n&=y^n(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)\end{aligned}\right\} \tag{5-2-35}$$

并令 $J=\dfrac{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^n)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)}$ 时，则式（5-2-35）逆变换存在的充要条件是 $J\neq0$。

（4）函数行列式具有替换特性即

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^n)}=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)/\partial(\zeta^1,\cdots,\zeta^n)}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^n)/\partial(\zeta^1,\cdots,\zeta^n)}=\frac{J(y^1,\cdots,y^n)}{J(\xi^1,\cdots,\xi^n)} \tag{5-2-36}$$

这里 $\zeta^1,\zeta^2,\cdots,\zeta^n$ 为中间变量。

（5）对于 n 阶函数行列式，当 i 与 k 均大于 1 并且小于 n 时恒有

$$\frac{\partial y^i}{\partial\xi^k}=(-1)^{i+k}J\left(y^1,y^2,\cdots,y^n\right)\frac{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots\xi^{k-1},\xi^{k+1},\cdots,\xi^n\right)}{\partial\left(y^1,y^2,\cdots y^{i-1},y^{i+1},\cdots,y^n\right)} \tag{5-2-37}$$ *

$$\frac{\partial\xi^k}{\partial y^i}J\left(y^1,y^2,\cdots,y^n\right)=(-1)^{i+k}\frac{\partial\left(y^1,y^2,\cdots,y^{i-1},y^{i+1},\cdots,y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{k-1},\xi^{k+1},\cdots,\xi^n\right)} \tag{5-2-38}$$ *

显然，这条性质可以使用性质④、性质②与性质①后直接得到。在下文中，特将 $\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{k-1},\xi^{k+1},\cdots,\xi^n\right)$ 简记为 ∂（不含 ξ^k）；而将 $\partial\left(y^1,y^2,\cdots,y^{i-1},y^{i+1},\cdots,y^n\right)$ 简记为 ∂（不含 y^i）；将 $J\left(y^1,y^2,\cdots,y^n\right)$ 简记作 $J(y^n)$。将于是式（5-2-37）*与式（5-2-38）*可写为

$$\frac{\partial y^i}{\partial \xi^k}=(-1)^{i+k}J(y^n)\frac{\partial(\text{不含}\xi^k)}{\partial(\text{不含}y^i)} \tag{5-2-37}$$

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial y^i}J(y^n)=(-1)^{i+k}\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}\xi^k)} \tag{5-2-38}$$

（6）对任意的整数 n（当然 $n\geqslant1$）及整数 i（当然要求 $i\leqslant n$）用数学归纳法很容易证明恒有下式成立，即

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^k\frac{\partial}{\partial\xi^k}\left[\frac{\partial\left(\text{不含}y^i\right)}{\partial\left(\text{不含}\xi^k\right)}\right]\right\}\equiv0 \tag{5-2-39}$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial\xi^k}\left[J(y^n)\frac{\partial\xi^k}{\partial y^i}\right]\equiv0 \qquad \text{（注意对 } k \text{ 求和）} \tag{5-2-39*}$$

这里

$$J(y^n)=\frac{\partial\left(y^1,y^2,\cdots,y^n\right)}{\partial\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n\right)}$$

（7）对任意大于1的整数及整数 i 与 k（$i\leqslant n$，$k\leqslant n$），则恒有

$$\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}y^k)}=\delta_k^i \tag{5-2-40}$$

这里 δ_k^i 为 kronecker（克罗奈克）符号，即当 $i\neq k$ 时，$\delta_k^i=0$，当 $i=k$ 时，$\delta_k^i=1$。

二、守恒方程组的坐标变换

在旧坐标系 (y^0,y^1,y^2,y^3) 中，存在着守恒方程组式（5-2-9），现在讨论在新坐标系 $(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ 中（5-2-9）式的变换问题，这里新旧坐标系间满足（5-2-28）式的变换关系。今定义一个新变量 $Q^k(k=0\sim3)$，其表达式为（以下均采用爱因斯坦求和规约）

$$Q^k\equiv J(y^n)q^i\frac{\partial\xi^k}{\partial y^i} \tag{5-2-41}$$

将上式对 ξ^k 求偏导，注意对 k 作和，并且使用式（5-1-38）得



$$\frac{\partial Q^k}{\partial \xi^k}=(-1)^{i+k}q^i\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left[\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}\xi^k)}\right]+(-1)^{i+k}\left[\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}\xi^k)}\right]\frac{\partial q^i}{\partial \xi^k} \tag{5-2-42}$$

首先计算式（5－2－42）右边第 2 项（简记作 R_2），为清晰地说明求和的过程这里带上求和符号，这时 R_2 为

$$R_2=\sum_{k=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}\left\{(-1)^{i+k}\left[\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}\xi^k)}\right]\frac{\partial q^i}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial \xi^k}\right\}$$

将式（5－2－37）代入上式并注意使用式（5－2－40），可得

$$R_2=\sum_{k=0}^{3}\left[J(y^n)\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial q^i}{\partial y^i}\right)\right] \tag{5-2-43}*$$

再将式（5－2－9）代入上式，于是式（5－2－42）变为

$$R_2=0 \tag{5-2-43}$$

现在计算式（5－2－42）右边第 1 项（简记作 R_1），同样的，为清晰说明求和过程，这里也带上求和符号，这时 R_1 为

$$\begin{aligned}R_1&=\sum_{k=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}\left\{(-1)^{i+k}q^i\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left[\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}\xi^k)}\right]\right\}\\&=\sum_{k=0}^{3}\left\{(-1)^k\sum_{i=0}^{3}(-1)^i q^i\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left[\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}\xi^k)}\right]\right\}\\&=\sum_{i=0}^{3}\left\{(-1)^i q^i\sum_{k=0}^{3}\left[(-1)^k\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\frac{\partial(\text{不含}y^i)}{\partial(\text{不含}\xi^k)}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{5-2-44}$$

将式（5－2－39）代入上式便得到

$$R_1=0 \tag{5-2-45}$$

于是将式（5－2－43）与式（5－2－45）代入到式（5－2－42）便得到（这里采用爱因斯坦求和规约）

$$\frac{\partial Q^k}{\partial \xi^k}=0 \qquad (k=0\sim 3) \tag{5-2-46}$$

式（5－2－46）表明：如果按照式（5－2－41）定义的新变量 Q^k，那么任意一种变换关系（见式（5－2－28）），只要逆变换存在（即 $J\neq 0$），则其结果总是守恒的，这是一个非常重要的特点。另外有

$$\frac{\partial q^i}{\partial y^i}=0 \quad (i=1\sim n) \tag{5-2-47}$$

$$Q^k = J(y^1, y^2, \cdots, y^n) q^i \frac{\partial \xi^k}{\partial y^i} \qquad (i = 1 \sim n, k = 1 \sim n) \tag{5-2-48}$$

$$y^i = y^i(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n) \qquad (i = 1 \sim n) \tag{5-2-49}$$

$$\frac{\partial Q^k}{\partial \xi^k} = 0 \ (k = 1 \sim n) \tag{5-2-50}$$

式中，$J\left(y^1, y^2, \cdots, y^n\right)$为 Jacobian 函数行列式，其定义为

$$J(y^1, y^2, \cdots, y^n) = \frac{\partial(y^1, y^2, \cdots, y^n)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n)} \tag{5-2-51}$$

还需要指出的是，在上面的推导中并没有用到 q^i 中的元素，因此所得结果具有极大的通用性，它可以适用于满足式（5-2-47）的任何方程，只要使用式（5-2-48）所定义的变量 Q^k，那么对于任何一种逆变换存在的变换关系式（5-2-49），所得结果总是守恒的，即满足式（5-2-50）。式（5-2-47）～式（5-2-50）的具体表达式为（这里采用爱因斯坦求和规约）。

例 1 已知 Navier-Stokes 方程在（t, x, y, z）笛卡儿坐标系统中具有如下的守恒形式，即

$$\frac{\partial q^0}{\partial t} + \frac{\partial q^1}{\partial x} + \frac{\partial q^2}{\partial y} + \frac{\partial q^3}{\partial z} = 0 \tag{5-2-52}$$

式中，q^0, q^1, q^2 与 q^3 的关系为

$$\left[q^0, q^1, q^2, q^3\right] = \begin{bmatrix} \rho & \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u & (\rho uu + P) - \tau_{xx} & \rho vu - \tau_{xy} & \rho wu - \tau_{xz} \\ \rho v & \rho uv - \tau_{yx} & (\rho vv + P) - \tau_{yy} & \rho wv - \tau_{yz} \\ \rho w & \rho uw - \tau_{zx} & \rho vw - \tau_{zy} & (\rho ww + P) - \tau_{zz} \\ \varepsilon & (\varepsilon + P)u - a_1 & (\varepsilon + P)v - a_2 & (\varepsilon + P)w - a_3 \end{bmatrix} \tag{5-2-53}$$

今有一个新的曲线坐标系统(τ, ξ, η, ζ)，它与(t, x, y, z)间存在着如下变换关系，即

$$\begin{cases} t = \tau \\ x = x(\tau, \xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\tau, \xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\tau, \xi, \eta, \zeta) \end{cases} \tag{5-2-54}$$

试求式（5-2-52）在(τ, ξ, η, ζ)坐标系统下的具体形式。

解： 借助于式（5-2-41），引进新变量 $Q^k (k = 0 \sim 3)$，经整理后得

$$Q^0 = Jq^0 \tag{5-2-55}$$



$$Q^1 = J\begin{bmatrix} \rho\tilde{U} \\ \left(\rho u\tilde{U}+\xi_x P\right)-\left(\xi_x\tau_{xx}+\xi_y\tau_{xy}+\xi_z\tau_{xz}\right) \\ \left(\rho v\tilde{U}+\xi_y P\right)-\left(\xi_x\tau_{yx}+\xi_y\tau_{yy}+\xi_z\tau_{yz}\right) \\ \left(\rho w\tilde{U}+\xi_z P\right)-\left(\xi_x\tau_{zx}+\xi_y\tau_{zy}+\xi_z\tau_{zz}\right) \\ \left[(\varepsilon+P)\tilde{U}-\xi_t P\right]-\left(a_1\xi_x+a_2\xi_y+a_3\xi_z\right) \end{bmatrix} \tag{5-2-56}$$

$$Q^2 = J\begin{bmatrix} \rho\tilde{V} \\ \left(\rho u\tilde{V}+\eta_x P\right)-\left(\eta_x\tau_{xx}+\eta_y\tau_{xy}+\eta_z\tau_{xz}\right) \\ \left(\rho v\tilde{V}+\eta_y P\right)-\left(\eta_x\tau_{yx}+\eta_y\tau_{yy}+\eta_z\tau_{yz}\right) \\ \left(\rho w\tilde{V}+\eta_z P\right)-\left(\eta_x\tau_{zx}+\eta_y\tau_{zy}+\eta_z\tau_{zz}\right) \\ \left[(\varepsilon+P)\tilde{V}-\eta_t P\right]-\left(a_1\eta_x+a_2\eta_y+a_3\eta_z\right) \end{bmatrix} \tag{5-2-57}$$

$$Q^3 = J\begin{bmatrix} \rho\tilde{W} \\ \left(\rho u\tilde{W}+\zeta_x P\right)-\left(\zeta_x\tau_{xx}+\zeta_y\tau_{xy}+\zeta_z\tau_{xz}\right) \\ \left(\rho v\tilde{W}+\zeta_y P\right)-\left(\zeta_x\tau_{yx}+\zeta_y\tau_{yy}+\zeta_z\tau_{yz}\right) \\ \left(\rho w\tilde{W}+\zeta_z P\right)-\left(\zeta_x\tau_{zx}+\zeta_y\tau_{zy}+\zeta_z\tau_{zz}\right) \\ \left[(\varepsilon+P)\tilde{W}-\zeta_t P\right]-\left(a_1\zeta_x+a_2\zeta_y+a_3\zeta_z\right) \end{bmatrix} \tag{5-2-58}$$

式中，J 为坐标变换的 Jacobian 函数行列式；$\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}$ 称为广义逆变分速度，其表达式为

$$\left[\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \xi_t & \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_t & \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_t & \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{5-2-59}$$

这里 ξ_t,ξ_x,ξ_y 等分别表示 $\partial\xi/\partial t,\partial\xi/\partial x,\partial\xi/\partial y$ 等。在 (τ,ξ,η,ζ) 坐标系下，N–S 方程变为

$$\frac{\partial Q^0}{\partial\tau}+\frac{\partial Q^1}{\partial\xi}+\frac{\partial Q^2}{\partial\eta}+\frac{\partial Q^3}{\partial\zeta}=0 \tag{5-2-60}$$

5.2.4　有限体积法中粘性项的计算

有限体积法是以积分型守恒方程为出发点，将求解域离散为有限个小的控制体单元，这

些小单元体可以是通过结构网格生成的六面体，也可以是非结构网格生成的四面体、五面体等。每一个网格单元就是有限体积法中的一个小单元体，因此积分型的守恒方程直接在这个单元体上作积分。下面仅以一般六面体单元为例，讨论气动计算时将要用到的最基础的知识。

令 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为直角笛卡儿坐标系 (x,y,z) 的单位基矢量，令

$$\boldsymbol{W}\equiv\begin{bmatrix}\rho\\ \rho\boldsymbol{V}\\ \varepsilon\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{F}_{\text{inv}}\equiv\begin{bmatrix}\rho\boldsymbol{V}\\ \rho\boldsymbol{VV}+P(\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk})\\ (\varepsilon+P)\boldsymbol{V}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{F}_{\text{vis}}\equiv\begin{bmatrix}0\\ \Pi\\ \Pi\cdot\boldsymbol{V}+\lambda\nabla T\end{bmatrix}\tag{5-2-61}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}_{\text{inv}}-\boldsymbol{F}_{\text{vis}}\tag{5-2-62}$$

$$\boldsymbol{n}=n_x\boldsymbol{i}+n_y\boldsymbol{j}+n_z\boldsymbol{k}\equiv n_1\boldsymbol{i}_1+n_2\boldsymbol{i}_2+n_3\boldsymbol{i}_3\tag{5-2-63}$$

$$[F,G,H]=\begin{bmatrix}\rho u & \rho v & \rho w\\ \rho uu+P & \rho vu & \rho wu\\ \rho uv & \rho vv+P & \rho wv\\ \rho uw & \rho vw & \rho ww+P\\ (\varepsilon+P)u & (\varepsilon+P)v & (\varepsilon+P)w\end{bmatrix}\tag{5-2-64}$$

$$\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}\tag{5-2-65}$$

$$\boldsymbol{S}=S_x\boldsymbol{i}+S_y\boldsymbol{j}+S_z\boldsymbol{k}=S_1\boldsymbol{i}+S_2\boldsymbol{j}+S_3\boldsymbol{k}\tag{5-2-66}$$

式中，$\boldsymbol{S}$ 为单元体表面的外法矢，它是该面面积 S 与该面单位外法矢量 $\boldsymbol{n}$ 的乘积，即 $\boldsymbol{S}=S\boldsymbol{n}$；$\lambda$为热传导系数；这里约定：单元体以该单元体心的网格编号命名，例如体心为 (i,j,k) 时，则包含该体心的单元体也称为 (i,j,k)，相应的这个单元体的体积记作Ω_{ijk}；单元体 (i,j,k) 与单元体 $i+1,j,k$ 所夹的那个面命名为 $\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)$，并且对单元体 (i,j,k) 而言，这个面的外法矢为 $(\boldsymbol{S})_{i+\frac{1}{2},j,k}$ 可简记为 $(\boldsymbol{S})_{i+\frac{1}{2},j,k}$；相应的该面上的 F，G，H 等也分别简记作 $F_{i+\frac{1}{2}}$，$G_{i+\frac{1}{2}}$，$H_{i+\frac{1}{2}}$ 等。由三维非定常 N–S 方程组的守恒积分形式，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\boldsymbol{W}\mathrm{d}\Omega+\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}_{\text{inv}}\mathrm{d}s=\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}_{\text{vis}}\mathrm{d}s\tag{5-2-67}$$

将它用于单元体 (i,j,k)，便有

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho\boldsymbol{V}\\ \varepsilon\end{bmatrix}\mathrm{d}\Omega+\sum_{\beta=1}^{6}\begin{pmatrix}\rho\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{V}\\ \rho\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{VV}+P\boldsymbol{S}\\ (\varepsilon+P)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{V}\end{pmatrix}_{\beta}-\sum_{\beta=1}^{6}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{S}\cdot\Pi\\ \boldsymbol{S}\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{V}+\lambda\boldsymbol{S}\cdot\nabla T\end{pmatrix}_{\beta}=0\tag{5-2-68}$$

下面分三个方面说明（5－2－68）式的计算过程。



1. 关于 $\sum_{\beta=1}^{6}(\boldsymbol{S}\cdot\Pi)_\beta$ 项的计算[48]

$$\sum_{\beta=1}^{6}(\boldsymbol{S}\cdot\Pi)_\beta=\sum_{\beta=1}^{6}\left[\mu\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\boldsymbol{V}+(\nabla\boldsymbol{V})_c)-\frac{2}{3}\mu\boldsymbol{S}(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\right]_\beta \tag{5-2-69}$$

注意到

$$\left.\begin{aligned}\nabla\mathbf{V}&=(\nabla u)\boldsymbol{i}+(\nabla v)\boldsymbol{j}+(\nabla w)\boldsymbol{k}\\(\nabla\mathbf{V})_c&=\boldsymbol{i}(\nabla u)+\boldsymbol{j}(\nabla v)+\boldsymbol{k}(\nabla w)\end{aligned}\right\} \tag{5-2-70}$$

另外，为计算 β 面上的 $\nabla\boldsymbol{V}$ 值，可采用相邻单元体体心上的 $\nabla\boldsymbol{V}$ 值作算术平均；同样地，为计算 β 面上的 $(\nabla\boldsymbol{V})_c$ 与 $(\nabla\cdot\boldsymbol{V})$ 值，也可采用相邻单元体体心上的相应值作算术平均。因此，得到各个体心点处 $\nabla u,(\nabla u)_c$ 与 $(\nabla\cdot\boldsymbol{V})$ 的值是完成式（5-2-69）计算的重要步骤。由高等数学关于梯度的基本定义得到

$$\begin{aligned}(\nabla u)\big|_{\text{体心}}&=\lim_{\Omega\to0}\frac{\oiint_{\partial\Omega}u\boldsymbol{n}\mathrm{d}s}{\Omega}=\left[\frac{1}{\Omega}\sum_{\beta=1}^{6}(uS_1)_\beta\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{1}{\Omega}\sum_{\beta=1}^{6}(uS_2)_\beta\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{1}{\Omega}\sum_{\beta=1}^{6}(uS_3)_\beta\right]\boldsymbol{k}\\&=(\alpha_1\boldsymbol{i}+\alpha_2\boldsymbol{j}+\alpha_3\boldsymbol{k})_{\text{体心}}\end{aligned} \tag{5-2-71}$$

同样地有

$$\left.\begin{aligned}(\nabla v)\big|_{\text{体心}}&=(\beta_1\boldsymbol{i}+\beta_2\boldsymbol{j}+\beta_3\boldsymbol{k})_{\text{体心}}\\(\nabla w)\big|_{\text{体心}}&=(\gamma_1\boldsymbol{i}+\gamma_2\boldsymbol{j}+\gamma_3\boldsymbol{k})_{\text{体心}}\end{aligned}\right\} \tag{5-2-72}$$

引进定义在体心上的符号 b_{ij}，其表达式为

$$b_{ij}\big|_{\text{体心}}=\frac{1}{\Omega}\sum_{\beta=1}^{6}(u_iS_j+u_jS_i)_\beta \tag{5-2-73}$$

这里 u_i 与 S_i 分别由（5-2-65）与（5-2-66）式定义。类似的，面上的 b_{ij} 值也可由相邻单元体体心上 b_{ij} 值的算术平均得到。于是可引进定义在面上的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵，其表达式为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix} \tag{5-2-74}$$

显然 $\boldsymbol{B}$ 是个对称矩阵。这里 $\boldsymbol{B}$ 的任一元素 b_{ij} 定义在面上。另外，体心上的 $(\nabla\cdot\boldsymbol{V})$ 为

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\big|_{\text{体心}}=\frac{1}{\Omega}\sum_{\beta=1}^{6}(uS_1+vS_2+wS_3)_\beta=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22}+b_{33})_{\text{体心}} \tag{5-2-75}$$

基于上面的推导，于是式（5-2-69）可以写为

$$\sum_{\beta=1}^{6}(\boldsymbol{S}\cdot\Pi)_{\beta}=\sum_{\beta=1}^{6}\left\{\mu[S_1,S_2,S_3]B[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{S}\right\}_{\beta} \tag{5-2-76}$$

2\. 关于$\sum_{\beta=1}^{6}(\boldsymbol{S}\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{V})_{\beta}$项的计算

$$\sum_{\beta=1}^{6}(\boldsymbol{S}\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{V})_{\beta}=\sum_{\beta=1}^{6}\left\{\left(\mu[S_1,S_2,S_3]B[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}\right)\cdot\boldsymbol{V}-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{V}\right\}_{\beta} \tag{5-2-77}$$

注意在β面上定义a_{ij}，其表达式为

$$a_{ij}=\left(u_iS_j+u_jS_i\right) \tag{5-2-78}$$

显然由a_{ij}所构成的辅助矩阵也是对称的。于是式（5-2-77）可写为

$$\sum_{\beta=1}^{6}(\boldsymbol{S}\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{V})_{\beta}=\sum_{\beta=1}^{6}\left\{\frac{\mu}{6}[a_{11},a_{22},a_{33}]\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{22}\\b_{33}\end{bmatrix}+\mu\left(a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}+b_{23}b_{23}\right)\right\}_{\beta} \tag{5-2-79}$$

3\. 关于$\sum_{\beta=1}^{6}(\lambda\boldsymbol{S}\cdot\nabla T)_{\beta}$项的计算

因为

$$P=(\gamma-1)\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\rho V^2\right)$$

所以在迭代计算中，一旦得到了ρ与ε值便可直接获得P值；有了ρ与P，则由$T=P/(\rho R)$式便得到了温度T值。另外，注意在体心上定义C_i，其表达式为

$$C_i\big|_{体心}=\frac{1}{\Omega}\sum_{\beta=1}^{6}\left(\frac{P}{\rho}S_i\right)_{\beta} \tag{5-2-80}$$

于是体心上$\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)$为

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{体心}=(C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k})_{体心} \tag{5-2-81}$$

另外，β面上的C_i值可由相邻单元体体心上值的算术平均得到。基于上面的推导，则有

$$\sum_{\beta=1}^{6}(\lambda\,\boldsymbol{S}\cdot\nabla T)_{\beta}=\sum_{\beta=1}^{6}\left\{\frac{\lambda}{R}(S_1C_1+S_2C_2+S_3C_3)\right\}_{\beta} \tag{5-2-82}$$

式中，R为气体常数；



可以看出，使用式（5-2-76）、式（5-2-79）和式（5-2-82）去计算式（5-2-68）中的粘性项与热传导项，还是十分方便的，极大地减少了计算工作量，而且便于编程和完成三维流场的数值计算。

§ 5.3* 粘性流体力学方程组的数学性质及定解条件

5.3.1 一阶拟线性方程组分类的一般方法

对于一阶拟线性偏微分方程组，仍采用分析特征方程根的办法进行方程的分类。考虑如下一阶拟线性方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\beta}=f \tag{5-3-1}$$

这里采用了 Einstein 求和规约，其中 $U=[U_1,U_2,\cdots,U_n]^{\mathrm{T}}$； A_β 为 $n\times n$ 的方阵，$(\beta=1\sim n)$，其元素是关于 $t,x_i,U_i(i=1\sim n)$ 的函数；列矢量 $f=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^{\mathrm{T}}$ 也都是关于 $t,x_i,U_i(i=1\sim n)$ 的函数。令 $\lambda_j^{(A_\beta)}$ 为矩阵 A_β 的特征值（$j=1\sim n$），即特征方程 $\left|A_\beta-\lambda^{(A_\beta)}I\right|=0$ 的根（$\lambda^{(A_\beta)}$ 为标量，I 为 $n\times n$ 的单位矩阵），则

（1）若这 n 个特征值全为复数，则方程式（5-3-1）在 $t-x_i$ 平面上为纯椭圆型。

（2）若这 n 个特征值为互不相等且不等于零的实数，则方程式（5-3-1）在 $t-x_i$ 平面上为纯双曲型。

（3）若这 n 个特征值全为零，则方程式（5-3-1）在 $t-x_i$ 平面上为纯抛物型。

（4）若这 n 个特征值部分为实数，部分为复数，则方程式（5-3-1）在 $t-x_i$ 平面上为双曲一椭圆型。

（5）若这 n 个特征值全为实数，且其中部分为零，则方程式（5-3-1）在 $t-x_i$ 平面上为双曲抛物型或抛物双曲型。

5.3.2 方程分类的实例（用一阶的方法）

今考虑二维流动。二维非定常 Navier-Stokes 方程的守恒形式可由方程式（5-2-2）简化为二维时得到，其表达式为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial\left(E-E_v\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(F-F_v\right)}{\partial y}=0 \tag{5-3-2}$$

式中

$$U=[\rho,\rho u,\rho v,\varepsilon]^{\mathrm{T}} \tag{5-3-3}$$

$$[\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}]=\begin{bmatrix}\rho u & \rho v\\ \rho uu+P & \rho vu\\ \rho uv & \rho vv+P\\ (\varepsilon+P)u & (\varepsilon+P)v\end{bmatrix} \tag{5-3-4}$$

$$\boldsymbol{E}_v=\left[0,\tau_{xx},\tau_{yx},a_1\right]^{\mathrm{T}} \tag{5-3-5}$$

$$\boldsymbol{F}_v=\left[0,\tau_{xy},\tau_{yy},a_2\right]^{\mathrm{T}} \tag{5-3-6}$$

a_1 与 a_2 分别为

$$a_1=u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-3-7}$$

$$a_2=u\tau_{yx}+v\tau_{yy}+k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{5-3-8}$$

而 $\tau_{xx},\tau_{yx},\tau_{yy}$ 为

$$\begin{bmatrix}\tau_{xx}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{bmatrix} \tag{5-3-9}$$

这里 μ 为动力粘性系数，λ 为第二粘性系数。μ 与 λ 之间由下式联系着

$$\mu'=\lambda+\frac{2}{3}\mu \tag{5-3-10}$$

μ' 称为膨胀粘性系数[49]；1845 年，Stokes 提出假定[50]，取

$$\lambda=-\frac{2}{3}\mu \tag{5-3-11}$$

这就是著名的 Stokes 假设，本书在大多数情况下也采纳这一假定。对于原始变量表达的粘性力学方程组，可由式（1-4-25）、式（1-4-26）和式（1-4-27）省略体积力后得到如下表达式（当 μ,λ 与 k 取为常数时）

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\rho)+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{V})=0 \tag{5-3-12}$$



$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\boldsymbol{V})=\frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}-\nabla P) \tag{5-3-13}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\gamma P\theta=(\gamma-1)\left\{\phi+k\left[\frac{1}{R\rho}\nabla^2 P-\frac{P}{R\rho^2}\nabla^2\rho+b_1\right]\right\} \tag{5-3-14}$$

式中，ϕ 为耗散函数；Π 为粘性应力张量；θ 为胀量；∇^2 为拉普拉斯（Laplace）算子。符号 b_1 的定义为

$$b_1\equiv\frac{2P}{R\rho^3}(\nabla\rho)\cdot(\nabla\rho)-\frac{2}{R\rho^2}(\nabla P)\cdot(\nabla\rho) \tag{5-3-15}$$

在直角笛卡儿坐标系中，如果令 $\boldsymbol{V}=u_\beta\boldsymbol{i}_\beta$（$u_\beta$ 为分速度，$\boldsymbol{i}_\beta$ 为直角笛卡儿坐标系的单位矢量），则 $\nabla\cdot\Pi$ 可表达为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{i}_\beta\left\{\mu\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k\partial x_\beta}+\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_k\partial x_k}\right)+\lambda\frac{\partial(\theta\delta_{k\beta})}{\partial x_k}\right\} \tag{5-3-16}$$

这里 μ,λ 与 θ 分别为动力粘性系数，第二粘性系数与胀量；(x_1,x_2,x_3) 为直角笛卡儿坐标系，$\delta_{k\beta}$ 为 Kronecker（克罗内克）记号。另外，耗散函数 ϕ 可由粘性应力张量 Π 与变形速度张量 D 的双点积得到，即

$$\phi=\boldsymbol{\Pi}:\boldsymbol{D} \tag{5-3-17}$$

因此使用原始变量 $\rho,\boldsymbol{V}$ 与 P 便可以通过式（5-3-12）～式（5-3-14）很方便地得到粘性流体力学基本方程组。下面仅对二维、不可压缩、定常、粘性流动的一阶拟线性方程组进行类型判别。在二维、定常、不可压缩条件下，式（5-3-12）与式（5-3-13）在直角笛卡儿坐标系中被简化为

$$\partial u_i/\partial x_i=0\qquad(i=1,2) \tag{5-3-18a}$$

$$u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_k}-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}\right)=0\qquad(i,k=1,2) \tag{5-3-18b}$$

这里采用了 Einstein 求和规约。另外，式中 $x_1=x,x_2=y$；令 $u=u_1,v=u_2$ 并引进辅助参量 g_1,g_2 与 h，即

$$\begin{cases}g_i\equiv\partial u/\partial x_i\qquad(i=1,2)\\h\equiv\partial v/\partial x\end{cases} \tag{5-3-19}$$

如果将式（5-3-18b）中的 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 项分别用连续方程取代，则可得如下相应的一组方程，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial h}{\partial x_2}=0\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}=0\\ \dfrac{\partial h}{\partial x_1}-\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial x_2}=\dfrac{\rho}{\mu}(uh-vg_1)\\ \dfrac{\partial P}{\partial x_1}-\mu\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}+\mu\dfrac{\partial h}{\partial x_2}=-\rho(ug_1+vg_2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}=g_1\\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1}=h\end{cases} \tag{5-3-20}$$

将上式写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=\boldsymbol{C} \tag{5-3-21}$$

式中

$$\boldsymbol{U}=[g_1,g_2,h,P,u,v]^{\mathrm{T}} \tag{5-3-22}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\-1&0&0&-\dfrac{1}{\mu}&0&0\\0&-\mu&\mu&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \dfrac{\rho}{\mu}(uh-vg_1)\\-\rho(ug_1+vg_2)\\g_1\\h\end{bmatrix} \tag{5-3-23}$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 为 6×6 阶的方阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^2(\lambda^2+1)^2=0$$

故有六个根：$\lambda_1^{(A)}=0,\lambda_2^{(A)}=0,\lambda_3^{(A)}=\mathrm{i},\lambda_4^{(A)}=\mathrm{i},\lambda_5^{(A)}=-\mathrm{i},\lambda_6^{(A)}=-\mathrm{i}$。显然，$\lambda_1^{(A)},\lambda_2^{(A)}$ 是由于引进两个新变量 g_1 与 h 而增加出来的，其余四个虚特征值则是对应于不可压缩定常 N-S 方程的。可见，定常不可压缩 N-S 方程组（它由式（5-3-18a）与式（5-3-18b）组成）是纯椭圆型的。

5.3.3 二阶拟线性方程组分类的一般方法及方程定解条件

1. 单个二阶拟线性偏微分方程的类型判别

对于只有一个因变量的二阶拟线性偏微分方程，例如

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=D \tag{5-3-24a}$$

这里系数 A,B,C 和 D 可以是 $x,y,\phi,\partial\phi/\partial x$ 和 $\partial\phi/\partial y$ 的非线性函数，但不包含有 ϕ 的二阶偏导数。这时方程在某一点及其领域的性质便完全可由判别式 B^2-4AC 在该点的符号决定：

如果
$$B^2-4AC\begin{cases}<0,\ 则方程为椭圆型\\=0,\ 则方程为抛物型\\>0,\ 则方程为双曲型\end{cases} \tag{5-3-24b}$$

作为实例，考虑具有单变量系数的 Tricomi 方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 \tag{5-3-24c}$$

由判别式（5-3-24b）可知，在 $x>0$ 的区域里，方程式（5-3-24c）属于椭圆型；而在 $x<0$ 的区域，方程式（5-3-24c）式变为双曲型。对椭圆型方程，则求解域的边界必须封闭；在边界上应给定因变量的值（即 Dirichlet 问题）或者它的法向导数（即 Neuman 问题）。但对于双曲型问题，正如本书 § 4.4 节所讨论的那样要涉及初边值问题。

对于二阶拟线性偏微分方程组怎么办？下面介绍一种分类的常用方法。

2. 二阶拟线性偏微分方程组分类的一般方法及方程定解条件

现考虑具有一般形式的粘性气体动力学基本方程组。

连续方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{5-3-25}$$

动量方程为

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{\pi})=0 \tag{5-3-26}$$

这里 $\boldsymbol{\pi}$ 为应力张量，在笛卡儿直角坐标系中应力张量的分量表达式为

$$\pi_{ik}=-P\delta_{ik}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\theta\delta_{ik}\right)+\mu'\theta\delta_{ik} \tag{5-3-27}$$

式中，θ 为胀量，δ_{ik} 为克罗内克（kronecker）记号；μ' 由式（5-3-10）定义。

利用连续方程，动量方程式（5-3-26）可改写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}+\nabla P-\nabla\left[\theta(\mu'-\frac{2}{3}\mu)\right]-2\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{D})=0 \tag{5-3-28}$$

这里 $\boldsymbol{D}$ 为应变速率张量（见（1-4-8）式定义）。在笛卡儿直角坐标系中，将上式展开便为

$$\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta(\mu'-\frac{2}{3}\mu)\right]-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]=0 \quad (i=1\sim3) \tag{5-3-29}$$

能量方程为

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+P\nabla\cdot\boldsymbol{V}-\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-(\mu'-\frac{2}{3}\mu)\theta^2=\nabla\cdot(k\nabla T) \tag{5-3-30}$$

为便于下面的讨论，将连续方程式（5－3－25）改写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=f_0 \tag{5-3-31}$$

其中

$$f_0\equiv-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{5-3-32}$$

动量方程式（5－3－29）改写为

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}-\mu\nabla^2u_i-(\mu'+\frac{1}{3}\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=\tilde{f}_i \qquad (i=1\sim3) \tag{5-3-33}$$

其中 ∇^2 为拉氏算子；符号 $\tilde{f}_i$ 的定义为

$$\tilde{f}_i\equiv-a^2\frac{\partial\rho}{\partial x_i}-\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_i}-\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}T}\frac{\partial T}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)+\frac{\mathrm{d}\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)}{\mathrm{d}T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\theta \qquad (i=1\sim3) \tag{5-3-34}$$

这里已用上了适当的状态方程，例如 $P=P(\rho,T),e=e(\rho,T)$，并且假定 μ 与 μ' 都是温度 T 的函数。显然，当状态方程 $P=\rho RT$ 和 $\mu=\text{const}$，$\mu'=\text{const}$ 时仅是特例。将式（5－3－33）在三个方向展开便为

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\left[\left(\mu'+\frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2u_1}{\partial x_3^2}\right]-\frac{1}{\rho}\left(\mu'+\frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{\rho}\left(\mu'+\frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1\partial x_3}=f_1 \tag{5-3-35}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\left(\mu'+\frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{\rho}\left[\mu\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2}+\left(\mu'+\frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2u_2}{\partial x_3^2}\right]-\frac{1}{\rho}\left(\mu'+\frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_3}{\partial x_2\partial x_3}=f_2 \tag{5-3-36}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\left(\mu'+\frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{1}{\rho}\left(\mu'+\frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_2}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{1}{\rho}\left[\mu\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2u_3}{\partial x_2^2}+\left(\mu'+\frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_3}{\partial x_3^2}\right]=f_3 \tag{5-3-37}$$



式中，$f_i=\tilde{f}_i/\rho$。现在讨论能量方程。由状态方程 $e=e(\rho,T)$，并利用连续方程式（5-3-25），便有

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial e}{\partial \rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial e}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial e}{\partial \rho}\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\frac{\partial e}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{5-3-38}$$

将其代入到式（5-3-30），便有

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}-\left(\rho\frac{\partial e}{\partial T}\right)^{-1}\nabla\cdot(k\nabla T)=\tilde{f}_5 \tag{5-3-39}$$

式中

$$\tilde{f}_5=\left\{\left(\rho\frac{\partial e}{\partial \rho}-\frac{P}{\rho}\right)\theta+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\theta^2\right\}\Bigg/\frac{\partial e}{\partial T} \tag{5-3-40}$$

式（5-3-39）又可写为

$$\frac{\partial T}{\partial t}-k\left(\rho\frac{\partial e}{\partial T}\right)^{-1}\nabla^2 T=f_4 \tag{5-3-41}$$

这里 k 为热传导系数；符号 f_4 的定义为

$$f_4\equiv\tilde{f}_5-u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}+\left(\rho\frac{\partial e}{\partial T}\right)^{-1}(\nabla k)\cdot(\nabla T) \tag{5-3-42}$$

式（5-3-41）给出的能量方程考虑了热传导系数 k 在全流场的变化，因此 $k=\text{const}$ 仅为特例。至此，连续方程式（5-3-31）、动量方程式（5-3-35）～式（5-3-37）以及能量方程式（5-3-41）这五个方程便构成了针对三维、粘性、非定常、可压缩、变 μ、变 μ'、变 k 时的气体动力学方程组。该方程组允许状态方程具有 $e=e(\rho,T)$，$P=P(\rho,T)$ 的形式，因此完全气体仅是特例。它适用于较高温度下（例如涡轮喷气发动机考虑燃气热力性质变化时）的气体动力学问题。

下面讨论除连续方程之外其余四个方程的分类问题。令 $\boldsymbol{U}=[u_1,u_2,u_3,T]^{\mathrm{T}}$，则式（5-3-35）～式（5-3-37）与式（5-3-41）的左端只包含 $\boldsymbol{U}$ 对 t 的一阶偏导数以及对 x_i 的二阶偏导数，因此可将它们写为如下矩阵形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}-\boldsymbol{A}_{ij}\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial x_i\partial x_j}=\boldsymbol{C} \tag{5-3-43}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\operatorname{diag}\left[\frac{\mu'+\frac{4}{3}\mu}{\rho},\frac{\mu}{\rho},\frac{\mu}{\rho},k\left(\rho\frac{\partial e}{\partial T}\right)^{-1}\right] \tag{5-3-44}$$

$$\boldsymbol{A}_{22}=\operatorname{diag}\left[\frac{\mu}{\rho},\frac{\mu'+\frac{4}{3}\mu}{\rho},\frac{\mu}{\rho},k\left(\rho\frac{\partial e}{\partial T}\right)^{-1}\right] \tag{5-3-45}$$



$$A_{33}=\mathrm{diag}\left[\frac{\mu}{\rho},\frac{\mu}{\rho},\frac{\mu'+\frac{4}{3}\mu}{\rho},k\left(\rho\frac{\partial e}{\partial T}\right)^{-1}\right] \tag{5-3-46}$$

$$A_{12}=A_{21}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&b&0&0\\b&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{5-3-47}$$

$$A_{23}=A_{32}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&b&0\\0&b&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{5-3-48}$$

$$A_{13}=A_{31}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&b&0\\0&0&0&0\\b&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{5-3-49}$$

$$b\equiv\frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho} \tag{5-3-50}$$

显然，A_{11}，A_{22}，A_{33}，A_{12}，A_{23}，A_{13} 它们都是 4×4 阶的对称阵。此外，对任何给定的 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 以及 $|\eta|=1$，则 $A_{ij}\eta_i\eta_j$（这里注意对 i，j 作和）均为对称正定阵。事实上，

$$A_{ij}\eta_i\eta_j=\begin{bmatrix}a\eta_1^2+a_1&a\eta_1\eta_2&a\eta_1\eta_3&0\\a\eta_1\eta_2&a\eta_2^2+a_1&a\eta_2\eta_3&0\\a\eta_1\eta_3&a\eta_2\eta_3&a\eta_3^2+a_1&0\\0&0&0&a_2\end{bmatrix} \tag{5-3-51}$$

$$a=\frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho},\quad a_1=\frac{\mu}{\rho},\quad a_2=k\left(\rho\frac{\partial e}{\partial T}\right)^{-1} \tag{5-3-52}$$

这里注意对 i,j 作和；由于 $\mu>0,\mu'\geqslant 0$，在 $\rho>0$（即不出现真空）时，a 及 a_1 均为正数。因而矩阵式（5-3-51）的主子式

$$a\eta_1^2+a_1>0$$

$$\begin{vmatrix}a\eta_1^2+a_1, & a\eta_1\eta_2\\a\eta_1\eta_2, & a\eta_2^2+a_1\end{vmatrix}=aa_1\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)+a_1^2>0$$



$$\begin{vmatrix} a\eta_1^2+a_1 & a\eta_1\eta_2 & a\eta_1\eta_3 \\ a\eta_1\eta_2 & a\eta_2^2+a_1 & a\eta_2\eta_3 \\ a\eta_1\eta_3 & a\eta_2\eta_3 & a\eta_3^2+a_1 \end{vmatrix} = aa_1^2 > 0$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}\eta_i\eta_j$ 为正定矩阵。所以方程组（5-3-43）为对称抛物型的。一般地说，一个方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} - \boldsymbol{A}_{ij}\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial x_i \partial x_j} = \boldsymbol{C} \qquad (\text{对 } i,\ j \text{ 作和；} i,\ j=1\sim m)$$

其中 $\boldsymbol{U} \equiv [u_1,\cdots,u_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $n\times n$ 阵，若满足

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \boldsymbol{A}_{ij}(i,j=1\sim m)\text{ 为对称阵；} \\ (2)\ \text{对任意给定的 } \boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m),\text{ 且 } |\boldsymbol{\eta}|=1,\text{ 矩阵 } \boldsymbol{A}_{ij}\eta_i\eta_j \\ \quad (\text{对 } i,j \text{ 作和})\text{ 均为对称正定阵} \end{array}\right\} \tag{5-3-53}$$

则称该方程组属于彼得罗夫斯基（I.G.Petrovsky）意义下的对称抛物型方程。可以看出，上面讨论的粘性气体动力学方程组中的式（5-3-43）属于 $n=4, m=3$ 时的特殊情形。

综上所述，粘性流体力学方程组的后四个方程组成了一个新的方程组，它以 (u_1,u_2,u_3,T) 为未知函数，该方程组属于二阶对称抛物型方程组；连续方程（即式（5-3-31））可以看作以 ρ 为未知函数的一阶对称双曲型方程，因此将这个方程与前面所述的二阶对称抛物型方程组相互耦合，便构成了一个拟线性对称双曲—抛物耦合方程组，这就是粘性流体力学方程组的数学结构。通常对这类问题可以提柯西问题，即给定初始状态[51]。除了初始条件外，有时还可能有边界条件，例如物面边界条件

$$\boldsymbol{V}\big|_{\Gamma}=0 \tag{5-3-54}$$

这里 Γ 为绕流的物体表面。对温度的边界条件，则可以采用通常的三类边界条件之一。这三类边界条件为

$$\left\{\begin{array}{l} ①\text{在边界 }\Gamma\text{ 上给定温度 } T \text{ 的分布}\quad(\text{第一类边界条件}) \\ ②\text{在边界 }\Gamma\text{ 上给定 } \dfrac{\partial T}{\partial n} \text{ 的分布（这里 } \boldsymbol{n} \text{ 为 }\Gamma\text{ 上的单位外法矢量）} \\ \quad(\text{第二类边界条件}) \\ ③\text{在边界 }\Gamma\text{ 上给定 } \alpha T+\dfrac{\partial T}{\partial n}(\alpha>0)\quad(\text{第三类边界条件}) \end{array}\right. \tag{5-3-55}$$

关于定解条件和定解问题适定性的详细讨论，这里不作展开，文献[1，50]中已给出了较细致的论述。

§ 5.4 N–S 方程的几个精确解

在流体力学及气体动力学中，所谓精确解具有两类含义：一类是解析解，即未知函数完全由自变量解析地描述，且描述关系中不再包含导数或积分号；另一类是相似解，即对于未知函数的多维问题可以化成某个变量的一维问题，然后再通过求解常微分方程或常微分方程组的解去完成。在所得出的常微分方程或常微方程组中，有些至今也未得到解析解，而只有数值解。正如文献[1]所指出的，对于粘性流动其精确解几乎都是对不可压缩、层流、低雷诺数时做出的。文献[52]给出了几十种精确解，文献[1，53]也给出了许多有意义的，有助于加深认识粘性运动重要现象的特解，这对学习粘性气体力学很重要。下面仅讨论三个精确解。

5.4.1 有运动边界的非定常流动——Stokes 第一问题

设有一无限长、无限宽的平板，其上部半无限空间中充满不可压缩的粘性静止气体。如果平板在某一瞬时（不妨取 $t=0$）以等速度 U_e 沿本身平面向右突然起动，之后便保持 U_0 沿 x 方向作等速运动。由于粘性作用，平板上侧流体将随之产生运动，若不考虑重力作用，试分析 $t>0$ 时的流动。现在分析该流场的基本特征：

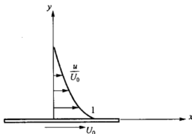


图 5.2 突然加速平板时其附近气体的流动

① 由于平板在 x 方向无限长，因此在任意一个平行于 yOz 平面上的流动情况是一样的，故可认为 $\frac{\partial}{\partial x}=0$。

② 由于平板在 z 方向无限宽，又平板沿 x 方向移动，因此流场可以看成是 xOy 平面上的流场，如图 5.2 所示，故可认为 $w=0;\frac{\partial}{\partial z}=0$。

③ 由于不考虑重力，故质量力为零。

由不可压缩非定常粘性气体动力学方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad (i=1\sim 3) \tag{5-4-1}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_k}-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (k=1\sim 3) \tag{5-4-2}$$

这里采用了 Einstein 求和规约。于是，将本问题的上述条件代入到基本方程组后便得到



$$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5-4-3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-4-4}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{5-4-5}$$

相应的边界条件如下

$$\left.\begin{aligned}
&① \text{ 初始条件 } t=0:\ u=0, v=0, P=P_\infty && (\text{当 } y\geqslant 0 \text{ 时})\\
&② \text{ 边界条件 } y=0:\ u=U_0, v=0, && (\text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时})\\
&\qquad y\to\infty:\ u=0, v=0, P\big|_{y\to\infty}=P_\infty && (\text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时})
\end{aligned}\right\} \tag{5-4-6}$$

显然，将式（5-4-3）对 y 积分并注意定解条件，则有 $v=0$；也就是说，在任意时刻，流场沿 y 向没有分速度。相应的式（5-4-5）变为 $\partial P/\partial y=0$，将该式对 y 积分，便有 $P=P_\infty$，它表示在任意时刻流场中任意点处的压强均为 P_∞。又由 $v=0$，则式（5-4-4）变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-4-7}$$

这是个典型的扩散方程，对于它可以提初、边值定解条件，其具体形式为

$$\left.\begin{aligned}
&t=0, y\geqslant 0: && u=0\\
&y=0, t>0: && u=U_0\\
&y\to\infty, t>0: && u=0
\end{aligned}\right\} \tag{5-4-8}$$

引进变换，也就是说由 (t,y) 变为 (ξ,η)，其变换关系为

$$\begin{cases}\xi=t\\ \eta=\dfrac{y}{2\left(t\mu\rho^{-1}\right)^{1/2}}=\dfrac{y}{2\sqrt{\tilde{v}t}}\end{cases} \tag{5-4-9}$$

这里 $\tilde{v}=\mu/\rho$ 。于是

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}-\dfrac{\eta}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\\
\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}=\dfrac{1}{2\sqrt{\tilde{v}\xi}}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{\partial \eta}{\partial y}=\dfrac{1}{4\tilde{v}\xi}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{cases} \tag{5-4-10}$$

将式（5－4－10）代入到式（5－4－7），得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}=4\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} \tag{5-4-11}$$

利用变换关系，则边界条件式（5－4－8）变为

$$\begin{cases}\eta=0,\xi>0: & u=U_0\\ \eta\to\infty,\xi>0: & u=0\end{cases} \tag{5-4-12}$$

由此定解条件可见，它与ξ无关，于是可以假设式（5－4－11）的解与ξ无关，即可假定 u 仅是η 的函数，因此式（5－4－11）可以变成

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\eta^2}+2\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}=0 \tag{5-4-13}$$

令

$$u=U_0 f(\eta) \tag{5-4-14}$$

则方程式（5－4－13）以及边界条件式（5－4－12）分别变为

$$f''+2\eta f'=0 \tag{5-4-15}$$

$$f(0)=1, f(\infty)=0 \tag{5-4-16}$$

式中，f'表示f对η 求导数。

这样，便将一个偏微分方程的求解问题变一个常微分方程的边界问题了，因此这时的解称为相似解。积分式（5－4－15）得

$$f=C_1\int_0^{\eta}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta+C_2$$

由边界条件式（5－4－16）可定出 C_1 与 C_2 为

$$C_1=-\frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad C_2=1$$

于是可得到f的具体表达式，而后再利用式（5－4－14）便得到 u，即

$$u^*\equiv\frac{u}{U_0}=1-\mathrm{erf}(\eta)=\mathrm{erfc}(\eta) \tag{5-4-17}$$

这里 $\mathrm{erf}(\eta)$ 称为关于η 的高斯误差函数，而 $\mathrm{erfc}(\eta)$ 称为关于η 的补尝误差函数，它们的定义分别为

$$\mathrm{erf}(\eta)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta \tag{5-4-18}$$

$$\mathrm{erfc}(\eta)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{0}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta \tag{5-4-19}$$



这两个函数在王竹溪与郭敦仁先生合写的专著（见文献[54]）中有介绍。式（5－4－17）可画成曲线，图 5.3（a）给出了无量分解为 1 速度 u^* 随相似变量 η 的变化曲线。可见，利用变换式（5－4－9）（这里应称相似变换式），可以将 $u-y$ 平面内各个不同时刻的一族速度分布曲线，如图 5.3（b）所示，变成在 $u^*-\eta$ 平面内的同一条曲线，如图 5.3（a）所示。从图 5.3（a）上可以看出，η 愈大，则 u^* 值愈小；当 $\eta\approx 2$ 时，则 $u^*\approx 0$，即 $u\approx 0$，这就是说粘性作用局限在 $\eta=2$ 以内。当 $\eta=1.82$ 时，$u^*=0.01$，故可以把 $\eta=1.82$ 作为边界层的名义厚度 δ，即[55]

$$\delta = 3.64\sqrt{\tilde{\nu}t} \tag{5-4-20}$$

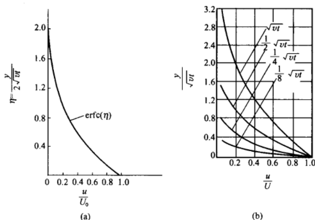


图 5.3　速度分布曲线

对空气来说，在 15℃时，$\tilde{\nu}=14.6\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，平板移动 1 min 之时，剪切层的厚度为 $\delta\approx 108$ mm，可见，粘性扩散范围与 $\sqrt{\tilde{\nu}t}$ 成正比。另外，在同一时刻 t，如果 y 值愈大（即离开平板愈远），η 值也愈大，即 u^*值愈小，也就是说气体由于粘性被带动的速度愈小。下面简单地分析一下涡量的扩散。显然，这里仅有惟一的涡量分量 ω_z，由式（5.1.4）及式（5－4－17）可以获得它的值，即

$$\omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0}{\sqrt{\pi\tilde{\nu}t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4\tilde{\nu}t}} \tag{5-4-21}$$

在平板表面的涡量为

$$\omega|_w = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_w}{\mu} \approx 0.5642\frac{U_0}{\sqrt{\tilde{\nu}t}} \tag{5-4-22}$$

这里τ_W为平板表面的摩擦应力。从式（5－4－21）与式（5－4－22）可以看出，在板启动的瞬时（$t=0$），板面处涡量ω_z为无穷大，而当t趋于无穷大时，整个流场的内涡量ω_z为零值。从物理上可以这样来解释：初时刻$t=0$时，板突然以速度U_0启动，但流体尚处于静止状态，所以板面上速度梯度无穷大即涡量也就无穷大，这恰说明了涡量在固壁产生的情况[1]。随着时间的推延，由于粘性的作用气体逐层被带动，涡量向外扩散。如果在流场内划这样的一条线，在这条线上$u^*=0.01$，从上面的分析可以知道，在这条线的一侧（即$u^*<0.01$）可以认为气体几乎尚未受到影响而处于静止状态；在这条线的另一侧（即$u^*>0.01$）可认为气体已受到影响而运动。很显然，这条线所对应的η值为1.82，而对应的δ由式（5－4－20）给出。该式说明：所划的线不是固定不变的，而是随时间的增加向外推进的，也就是说涡量扩散距离按$3.64\sqrt{\tilde{\nu}t}$增长，其增长率为

$$\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=1.82\sqrt{\tilde{\nu}/t} \tag{5-4-23}$$

设想速度为U_0的均匀来流流过固定的无穷大平板的上方。当坐标系建立在均匀的来流上时，这时相对坐标系下的观察者所看到的规律就是上面所述的情况。如果采用静止坐标系去分析上面设想的问题，这时涡量扩散规律仍应该不变。令均匀来流流过l距离所需时间为$t_1=l/U_0$，同时涡扩散距离为

$$\delta=3.64\sqrt{\tilde{\nu}t_1}=3.64\sqrt{\tilde{\nu}\frac{l}{U_0}} \tag{5-4-24}$$

将涡扩散距离δ与质点流过的距离l相比较，即

$$\frac{\delta}{l}=3.64\sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{U_0 l}}=\frac{3.64}{\sqrt{R_{el}}} \tag{5-4-25}$$

式中

$$R_{el}=U_0 l/\tilde{\nu} \tag{5-4-26}$$

式（5－4－25）表明涡扩散距离与质点流过的距离之比具有$1/\sqrt{R_{el}}$的量级。因此，如果来流速度很大以至于$R_{el}\gg 1$时，则$\delta\ll l$，这说明涡量集中在离板面很近的距离之内。显然，这样一个结论对讨论边界层流动时很有意义。现在我们来考察涡通量，计算单位长度（沿x方向）平板上从$y=0$到$y=\infty$区间内涡通量的值。由涡通量J定义

$$J\equiv\oiint_\sigma \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \tag{5-4-27}$$

在本问题中，J变为

$$J=\int_0^\infty \omega_z \mathrm{d}y=-\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=U_0 \tag{5-4-28}$$

这表明当$\eta\to\infty$时，上述单位长度平板上的半无限区域内的涡通量为常数。这个结果还说明，如果区域内无新的涡源，单纯的涡量扩散不会改变无限大区域内总的涡通量。另外，有了速



度分布式（5－4－17），便可计算板面上的局部摩擦阻力系数 C_f，即

$$C_f=\frac{\tau_W}{\rho U_0^2}=\frac{-\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}}{\rho U_0^2}=\frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{\bar{v}}{\pi t}} \tag{5-4-29}$$

以上我们讨论了 Stokes 第一问题，它是 1851 年首先由 Stokes 提出并加以讨论的；1911 年 Rayleigh 作了进一步探讨，1930 年 E.Becket 又把这个问题加以进一步的推广，使它包括一般的加速度变化率以及考虑可压缩性之类的情况，可见这个问题是很值得研究的。

5.4.2　驻点附近的二维与三维流动

如图 5.4 所示，平板放在 xOz 坐标面上，不可压缩气体在远上方垂直流向平板，并在 $x=0, y=0$ 处形成滞止点。用维数指数 n 来讨论平面流动（n=2）和轴对称流动（n=3）；对于轴对称流动，则 x 为径向坐标。采用上述约定后，不可压缩流动的连续方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-2}u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{n-2}v\right)=0 \tag{5-4-30}$$

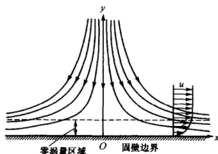


图 5.4　驻点附近的流动

动量方程变为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{n-2}}{x^{n-2}}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{5-4-31}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{x^{n-2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(v^{n-2}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \tag{5-4-32}$$

引进一个辅助待定函数 $f(y)$，令其满足如下关系

$$u=\frac{Bx}{n-1}f'(y),\quad v=-Bf(y) \tag{5-4-33}$$

边界条件为

$$\begin{cases} y=0: & f(y)=0, f'(y)=0 \\ y\to\infty: & f'(y)=1 \end{cases} \tag{5-4-34}$$

在式（5－4－33）中 B 为任意常数。可以验证式（5－4－33）满足连续方程式（5－4－30）。将式（5－4－33）代入到式（5－4－32）后得到

$$ff' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho}f'' \tag{5-4-35}$$

可以证明满足上式的压强 P 表达为

$$P_0 - P = \frac{1}{2}\rho B^2\left[\left(\frac{x}{n-1}\right)^2 + F(y)\right] \tag{5-4-36}$$

式中，P_0 为滞止压力；$F(y)$ 是辅助待定函数。

将式（5-4-33）和式（5-4-36）代入到式（5-4-31）后得到

$$f''' + \frac{B}{\mu/\rho}ff'' + \frac{B}{(n-1)\mu/\rho}\left[1-(f')^2\right] = 0 \tag{5-4-37}$$

式中，f' 表示 f 对 y 求导数。

将式（5-4-36）代入式（5-4-35）得到

$$ff' = \frac{1}{2}B^2F' - \frac{\mu}{\rho}f'' \tag{5-4-38}$$

与上边两个方程相对应的边界条件为

$$\begin{cases} y=0: & f=0, f'=0, F=0 \\ y\to\infty: & f'=1 \end{cases} \tag{5-4-39}$$

式（5-4-37）中只包含有函数 $f(y)$，所以由此方程及相应的边界条件可以先求得 $f(y)$，然后再由方程式（5-4-38）求得

$$F'(y) = \frac{2}{B^2}\left(ff' + \frac{\mu}{\rho}f''\right) \tag{5-4-40}$$

积分上式得到 $F(y)$。于是整个流场便可由式（5-4-33）与式（5-4-36）完全确定了。应该指出的是，历史上许多学者一直研究与改进这项工作，如 Hiemenz（1911 年）、Howarth（1934 年）、Homann（1936 年），Frossling（1940 年）、Smith（1954 年）和 Evans（1968 年）等人。这是一项很有价值的工作，文献[53]的作者、著名教授 White 先生认为："驻点附近流动的研究可能是 Navier-Stokes 方程精确解的最重要例子"。

5.4.3 可压缩 Couette 流动

今考虑间距为 h 的两无限大平行平板，其间充满着可压缩粘性气体，压强 P 为常数，流动为定常流。底板固定，顶板以恒速 U_e 在自身所在的平面内平移，如图 5.5 所示。板间流体的运动全部是由于顶板的拖动作用而造成的，这里不考虑沿 y 向的自然对流。顶板与底板面上的参数分别用下注脚 e 与 W 予以区别，例如ρ_e，T_e，μ_e 为顶板面上的相应参数值；



而ρ_W，T_W，μ_W，为底板面上的参数值。对于所选定的坐标系，可以认为平板是无限大的，并且假定不考虑质量力的作用，于是边界条件应为

$$\begin{cases} y=-h: & u=0, T=T_W \\ y=h: & u=U_e, T=T_e \end{cases} \tag{5-4-41}$$

在上述条件下，该流动为定常、平行流动并且 P 为常数，即

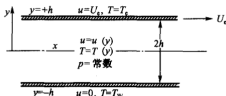


图 5.5 可压缩库埃特流动

$$\begin{cases} v=0, \quad w=0, \quad u=u(y), \quad P=\text{const}, \quad T=T(y) \\ \dfrac{\partial \Diamond}{\partial t}=0, \quad \dfrac{\partial \Diamond}{\partial x}=0, \quad \dfrac{\partial \Diamond}{\partial z}=0 \end{cases} \tag{5-4-42}$$

这里◊代表 u，P，T 等中的任一物理量。显然，这时自动满足连续方程，而且所有的对流变化率为零，因此动量方程和能量方程被简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}y}=0 \tag{5-4-43}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}\right)+\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}\right)+\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0 \tag{5-4-44}$$

在一般情况下，粘性系数μ 和热传导系数 k 都只是温度的函数

$$\mu=\mu(T), \qquad k=k(T) \tag{5-4-45}$$

又由于 T 仅是 y 的函数，故有

$$\mu=\mu(y), \qquad k=k(y) \tag{5-4-46}$$

注意到

$$\tau=\tau_e=\tau_W=\text{const}=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{5-4-47}$$

对能量方程式（5-4-44）作一次积分，得到

$$k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}+\tau u=C \tag{5-4-48}$$

式中积分常数由底板面上的边界条件（即 $T=T_W, u=0$）确定，C 为

$$C=\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}\right)_W=-q_W \tag{5-4-49}$$

其中 q_W 为底板面的热流[56,57,58]，即单位时间内通过单位面积壁面传给气体的热量（或称热流密度[59]）。于是式（5-4-48）可改写为

$$\frac{k}{\mu}\mathrm{d}T+u\mathrm{d}u=-\frac{q_W}{\tau_W}\mathrm{d}u \tag{5-4-50}$$

将上式由底板积分到两板之间的任意一点处，可得

$$\frac{1}{2}u^2+\int_{T_W}^{T}\frac{k}{\mu}\mathrm{d}T=-\frac{q_W}{\tau_W}u \tag{5-4-51}$$

如果上式积分到顶板处，则有

$$q_W=-\frac{\tau_W}{U_e}\left(\frac{1}{2}U_e^2+\int_{T_W}^{T_e}\frac{k}{\mu}\mathrm{d}T\right) \tag{5-4-52}$$

虽然，μ 和 k 都随 T 变化，但在许多情况下 k/μ 值却几乎不变，因此假定 $k/\mu=\text{const}$ 是一个很好的近似，这相当于假设了 C_p/Pr 为常数。引进此假设后，式（5-4-52）变为

$$q_W=\frac{\tau_W C_p}{PrU_e}\left(T_W-T_e-\frac{Pr}{2}\frac{U_e^2}{C_p}\right) \tag{5-4-53}$$

特别是当底板绝热，即热流 $q_W=0$ 时，称此时壁温为绝热壁温（又称作恢复温度），记作 T_{aW}，其表达式可由式（5-4-53）得到

$$T_{aW}=T_e+\frac{U_e^2}{2C_p}Pr \tag{5-4-54}$$

引进埃克特（E.R.G.Eckert）数 E_C，其定义为

$$E_C\equiv\frac{u^2}{C_pT} \tag{5-4-55}$$

对于完全气体并且状态方程取 $P=R\rho T$ 时，则上式又可进一步改写为

$$E_C=(\gamma-1)M^2 \tag{5-4-56}$$

这里 M 为马赫数。于是式（5-4-54）可变为

$$\frac{T_{aW}}{T_e}=1+\frac{1}{2}PrE_C=1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2Pr \tag{5-4-57}$$

对于顶板壁面处气体的滞止温度为

$$T_{ae}=T_e+\frac{U_e^2}{2C_p}$$

引进温度恢复因子 r，其定义为[57]

$$r\equiv\frac{T_{aW}-T}{T_0-T}=\frac{T_{aW}-T}{\dfrac{V^2}{2C_p}}\quad\text{或者}\quad r\equiv\frac{T_{aW}-T_\infty}{T_{0\infty}-T_\infty} \tag{5-4-58}$$

这里 T_∞ 与 $T_{0\infty}$ 分别代表自由流的静温与总温；V 是气流的速度。对于 Couette 流，则温度恢复因子 r 可认为具有如下关系，即



$$r \equiv \frac{T_{aW} - T_e}{T_{ae} - T_e} = \frac{T_{aW} - T_e}{\frac{U_e^2}{2C_p}} \tag{5-4-59}$$

因此有

$$T_{aW} = T_e + r\frac{U_e^2}{2C_p} \tag{5-4-60}$$

将上式与式（5-4-54）比较可知，对于库埃特流则有 $r = Pr$，很显然，Pr 数是反映粘性效应与热传导效应比值的一种度量，若 $Pr < 1$，说明热传导的散热作用超过粘性应力的输运作功作用，因而底壁滞止温度低于顶壁滞止温度；相反，若 $Pr > 1$，则这时散热作用小于粘性应力作功的作用，于是底壁滞止温度高于顶壁的滞止温度。另外，壁面传给流体的热量应由式（5-4-53）决定，考虑到式（5-4-54），则式（5-4-53）变为

$$q_W = \frac{\tau_W C_p}{PrU_e}(T_W - T_{aW}) \tag{5-4-61}$$

值得注意的是，壁面传给流体的热量 q_W 与 $(T_W - T_{aW})$ 成正比而与 $(T_W - T_e)$ 无正比例关系；引进壁面摩阻系数 C_f，其定义为[57]

$$C_f \equiv \frac{\tau_W}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} \tag{5-4-62}$$

对于 Couette 流，则壁面摩阻系数 C_f 可为

$$C_f = \frac{\tau_W}{\frac{1}{2}\rho_e U_e^2} \tag{5-4-63}$$

引进斯坦顿（Stanton）数 St，其定义为

$$St \equiv \frac{Nu}{PrRe} = \frac{\alpha}{\rho V C_p} \tag{5-4-64}$$

其中 Nu，Pr 与 Re 分别为 Nusselt 数，Prandtl 数与 Reynold 数；α 为换热系数；V, ρ 与 C_p 分别为流体的速度、密度与定压比热容。对于 Couette 流，则 St 数也可以认为具有如下形式的关系，即

$$St = \frac{q_W}{\rho_e U_e C_p (T_W - T_{aW})} \tag{5-4-65}$$

显然，将式（5-4-65）代入到式（5-4-61）便推出

$$\frac{C_f}{St} = 2Pr \tag{5-4-66}$$

这里 St 是下板面上的 Stanton 数。值得注意的是，这里上、下板面的 C_f 是相等的，但一般

来说，上、下板面的 St 数并不相同。另外，式（5-4-66）是针对可压缩气体的 Couette 流动得到的，对于其他情况下的流动，例如层流边界层流动，则上式要作修正[1,60,61]。

§5.5 剪切层与边界层的概念以及相似解存在的条件

5.5.1 剪切层的概念以及它的主要力学与物理特性

由流体力学的基础知识知道，流体运动时可以发生两种性质的变形，一种是线变形（它对应于拉伸和压缩），另一种是角变形（它对应于剪切）。如果流层具有大的角应变（即剪切变形率）则称该流层为剪切层。在剪切层中速度的梯度较大，而且强的剪切通常发生在薄层中，这是高雷诺数流动的特点。剪切层的例子很多，图 5.6 给出了几种典型的剪切层。图中之所以把尾迹、射流和管流也都作为剪切层的例子，是因为它们的物理过程在本质上是一样的。通常，如果根据边界的几何特点，剪切层可以分为两大类：一类是自由剪切层（如混合层、尾迹和射流等），另一类是非自由剪切层（例如边界层）。边界层是强剪切层的例子，它是我们后面章节要讨论的重点。

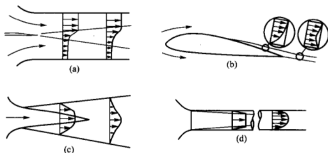


图 5.6 各种典型的剪切层

（a）混合层；（b）边界层及尾迹；（c）射流；（d）管流

首先以二维定常不可压缩粘性流为例分析一下粘性项对流体运动所带来的一些特点。在直角笛卡尔坐标系下其 N-S 方程为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{5-5-1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{5-5-2}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5-5-3}$$

由式（5-5-1）与式（5-5-2）可以看出，粘性应力对运动的影响主要取决于上述两方程的最后一项。为便于分析，将上述方程量纲化为 1，因此有

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial P^*}{\partial x^*}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\right) \tag{5-5-4}$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial P^*}{\partial y^*}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{5-5-5}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \tag{5-5-6}$$

式中

$$\begin{cases} x^*=\dfrac{x}{L},\quad y^*=\dfrac{y}{L},\quad u^*=\dfrac{u}{U},\quad v^*=\dfrac{v}{U} \\ P^*=\dfrac{P}{\rho U^2},\quad Re=\dfrac{\rho UL}{\mu},\quad \rho=\text{const},\quad \mu=\text{const} \end{cases} \tag{5-5-7}$$

这里 L 为特征长度；U 为特征速度。可以证明在大雷诺数流动的情况下，剪切层流动具有如下几点力学与物理的特征：

（1）在粘性项中，正应力项通常不大，所以沿流向的粘性应力梯度通常是不重要的（通过激波时的情况除外）。沿与流动垂直的方向（以下简称沿跨流方向）切应力梯度很大。以边界层为例，在很薄的厚度δ内，发生了很大的剪切变形率，也就是说这时粘性项起着重要作用。

（2）在剪切层中通常都要发生强的动量交换，也可能存在着强的热传导。为便于描述剪切层的这些特征，定义了各种厚度（例如边界层名义厚度δ，位移厚度δ^*，动量厚度（又称动量亏损厚度）θ，能量厚度（又称能量耗散厚度）δ_3 等）以及它们的组合量（例如形状因子 H 等），它们都是剪切层的重要特征参数。下面给出上述有关参数的定义。

边界层名义厚度δ：它是速度达到自由流速度的某个百分数时离壁面的距离，例如这个百分数可以取 99%或者 99.5%。

位移厚度δ^*定义为

$$\delta^*=\int_0^h\left(1-\frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right)\mathrm{d}y \tag{5-5-8}$$

动量厚度θ定义为

$$\theta=\int_0^h\frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)\mathrm{d}y \tag{5-5-9}$$

能量厚度δ_3定义为

$$\delta_3=\int_0^h\frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1-\frac{u^2}{u_e^2}\right)\mathrm{d}y \tag{5-5-10}$$

形状因子H定义为

$$H=\frac{\delta^*}{\theta} \tag{5-5-11}$$

在上面几式中，u_e，ρ_e 为自由流速度与密度；h 是略比 δ 大的常数。关于这些特征参数的物理含义与详细解释，读者可参阅已学过的流体力学基础课程（例如文献[2,3,4, 9,13,24]等），这里不再讲述。

（3）对于边界层问题，在边界层内粘性力与惯性力具有同阶大小。根据这些特点，很容易将式（5-5-4）、式（5-5-5）和式（5-5-6）组成的方程组作进一步简化。先估计一下方程中每一项的数量级大小。当 x 从 0 变到 L，y 从 0 变到 h（它略大于δ）时，相应地 x^* 由 0 变到 1，y^*由 0 变到ε（这里 $\varepsilon=\delta/L$），所以 y^*与ε 同量级，即 $y^*\sim\varepsilon$；因此很容易分析出

$$\left.\begin{array}{l}\left(u^*,\dfrac{\partial u^*}{\partial x^*},\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}},\dfrac{\partial v^*}{\partial y^*},\dfrac{\partial P^*}{\partial x^*}\right)\sim 1\\ \left(v^*,\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}},\dfrac{\partial P^*}{\partial y^*},\dfrac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\sim\varepsilon,\dfrac{1}{Re}\sim\varepsilon^2\\ \left(\dfrac{\partial u^*}{\partial y^*},\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)\sim\dfrac{1}{\varepsilon},\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\sim\dfrac{1}{\varepsilon^2}\\ \dfrac{\delta}{L}\sim\dfrac{1}{\sqrt{Re}}\end{array}\right\}\tag{5-5-12}$$

借助于上面分析的结果，对量纲为 1 的基本方程组采用忽略关于ε的一次方及其一次方以上的小量，并将简化后的量为 1 的纲方程变为有量纲形式，即

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\tag{5-5-13}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=0\tag{5-5-14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\tag{5-5-15}$$

上述方程组就是二维不可压缩流动的薄剪切层方程组，也称边界层方程组。边界层方程组与 N-S 方程组相比，从数学上看方程的类型发生了重大变化。对于定常流动，N-S 方程为椭圆型，而边界层方程为抛物型。由于沿边界层垂直于主流 x 方向上的压强可认为是常数，因此压强的分布 $P(x)$ 在边界层分析中可以认为是已知的，它是由边界层外部的无粘分析提供的。这就是说，对于不可压缩流动，边界层外的自由流动速度 $u_e=u_e(x)$（这里认为 x 是主流方向，也可以认为它是平行于壁面的坐标）可以借助于 Bernoulli（伯努利）方程与 $P(x)$联系起来。例如，对于定常流动

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\rho u_e\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\tag{5-5-16}$$

因此，规定 $P(x)$相当于规定边界层外的 $u_e(x)$分布。对于能量方程，如果是可压缩完全气体，则为



$$\rho C_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \phi + k\nabla^2 T \tag{5-5-17}$$

或者

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \nabla \cdot (k\nabla T) + \phi - P\nabla \cdot \boldsymbol{V} \tag{5-5-18}$$

对于不可压缩流体，则能量方程为

$$\rho C_V \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi + k\nabla^2 T \tag{5-5-19}$$

因此对于二维不可压缩流动在笛卡儿直角坐标系中便可写为

$$\rho\, C_V \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{5-5-20}$$

注意到边界层的特点，上式又可简化为

$$\rho\, C_V \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \right) = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \tag{5-5-21}$$

因此式（5－5－13）、式（5－5－15）以及式（5－5－21）便构成了以 u,v 和 T 为未知量的边界层方程组。这个方程组的边界条件是

$$\begin{cases} y=0:\ \ u=0,\ \ T=T_{\mathrm{w}}\ \text{或者}\ \dfrac{\partial T}{\partial y}=g(x) \\ y=\delta:\ \ u=u_{\mathrm{e}}(x),\ \ T=T_{\mathrm{e}} \end{cases} \tag{5-5-22}$$

5.5.2　层流边界层方程存在相似性解的条件

相似性解是一个非常有用的概念。下面以二维、定常、不可压缩、层流边界层方程为例来说明这个概念。在上述条件下边界层基本方程和边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = u_{\mathrm{e}}\dfrac{du_{\mathrm{e}}}{dx} + \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ y=0:\quad u=0, v=0 \\ y\to\infty:\ u=u_{\mathrm{e}}(x) \end{cases} \tag{5-5-23}$$

在一般情况下，上述方程组的解 u 和 v 应该是 x 与 y 的函数（即 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$）。如

果在某些特殊情况下，式（5－5－23）的解可以写为

$$u/u_e=\varphi(\eta) \tag{5-5-24}$$

其中η是x,y的某一特定组合函数，而函数$\varphi(\eta)$仅仅是与η有关的一个任意函数。因此称式（5－5－24）为方程式（5－5－23）的相似性解，并称η为相似性变量。也就是说相似性解的存在，要求速度剖面仅与η有关。显然，在方程具有相似性解的情况下，自变量的数目由两个（这里为x和y）减少为一个（这里为η），而关于u与v的偏微分方程这时可化为关于 u，v的常微分方程来求解。然而并不是所有层流边界层方程都有相似性解。那么，存在相似性解究竟应该具备什么条件呢？为了回答这个问题下面分三个小问题进行讨论。

一、用无量纲函数f表达的边界层动量方程

引进有量纲的流函数$\psi(x,y)$，它满足

$$u=\partial\psi/\partial y,\qquad v=-\partial\psi/\partial x \tag{5-5-25}$$

将它代入到式（5－5－23）中的第二式子后变为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=u_e\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{5-5-26}$$

根据相似性解的概念，取组合变量η并定义量纲为 1 的量ξ，它们分别定义为

$$\eta=\frac{y}{g(x)},\qquad \xi=\frac{x}{L} \tag{5-5-27}$$

这里$g(x)$称为尺度因子。令流函数为

$$\psi(x,y)=u_e(x)g(x)f(\xi,\eta) \tag{5-5-28}$$

借助于著名的 Falkner-Skan（法沃克纳–斯坎）变换[62]式（5－5－27），将各物理量由(x,y)坐标系变换到(ξ,η)坐标系，于是在(x,y)坐标系中这时对x和对y的导数为

$$\frac{\partial()}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial()}{\partial\xi}-\frac{\eta g'}{g}\frac{\partial()}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial()}{\partial y}=\frac{1}{g}\frac{\partial()}{\partial\eta} \tag{5-5-29}$$

由式（5－5－25）及式（5－5－29）并注意到式（5－5－27）与式（5－5－28），便可得

$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=u_e f' \\ v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\eta u_e g'f'-f(gu_e)'-\dfrac{u_e g}{L}f' \end{cases} \tag{5-5-30}$$

进而得到



$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\dfrac{u_e}{g}f''\\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=u_e'f'+\dfrac{u_e}{L}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\eta u_e}{g}g'f''\\ \dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=\dfrac{u_e}{g^2}f'''\end{cases}\tag{5-5-31}$$

上面几个式中

$$\begin{cases}g'\equiv\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x},\quad f'\equiv\dfrac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial\eta},\quad (gu_e)'=\dfrac{\mathrm{d}(gu_e)}{\mathrm{d}x},\\ f''\equiv\dfrac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial\eta^2},\quad f'''\equiv\dfrac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial\eta^3},\quad u_e'=\dfrac{\mathrm{d}u_e(x)}{\mathrm{d}x}\end{cases}\tag{5-5-32}$$

令

$$\begin{cases}\alpha\equiv\dfrac{g(x)}{\tilde{\nu}}\left[u_e(x)g(x)\right]'=\dfrac{g}{\tilde{\nu}}(u_e g)'\\ \beta\equiv\dfrac{g^2(x)}{\tilde{\nu}}u_e'(x)=\dfrac{g^2}{\tilde{\nu}}u_e'\end{cases}\tag{5-5-33}$$

这里 $\tilde{\nu}=\mu/\rho$。将式(5－5－30)与式(5－5－31)代入到式(5－5－26)中并注意到式(5－5－33)，于是得到

$$f'''+\alpha ff''+\beta\left[1-(f')^2\right]=\frac{u_e g^2}{\tilde{\nu}L}\left(f'\frac{\partial f'}{\partial\xi}-f''\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)\tag{5-5-34}$$

二、存在相似性解的条件

由前面的分析以及式（5－5－24）这个相似性解必须满足的条件可知，相似性解仅当 f 和 f' 与 ξ 无关时才能够存在，所以方程式（5－5－34）右边的项必须等于零，同时方程左边的系数 α 和 β 也必须是与 ξ（即 x）无关的常数，于是便得到了存在相似性解的两个条件，即

条件 1： $\partial f/\partial\xi=0$

条件 2：

$$\left.\begin{aligned}&\partial f/\partial\xi=0\\ &\alpha=\frac{g(x)}{\tilde{\nu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u_e(x)g(x)\right]=\text{const}\\ &\beta=\frac{g^2(x)}{\tilde{\nu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u_e(x)\right]=\text{const}\end{aligned}\right\}\tag{5-5-35}$$

这里 $\tilde{\nu}=\mu/\rho$。条件 1 表明，f 与 ξ 无关，即 $f(\xi,\eta)$ 应该变为 $f(\eta)$；$\partial f/\partial\eta$ 应变为 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\eta$；条件 2 表明：$\alpha$ 和 β 也与 ξ（或者 x）无关。显然，当具备这两个条件时，偏微分方程式（5－5－26）转化为式（5－5－36）所表达的常微分方程和相应的边界条件

$$\begin{cases} f'''+\alpha ff''+\beta\left[1-(f')^2\right]=0 \\ \eta=0: \quad f=0, f'=0 \\ \eta\to\infty: \quad f'=1, f''=0 \end{cases} \tag{5-5-36}$$

5.5.3 平板边界层的 Blasius 解

考察粘性来流流过无限长平板的边界层流动。选取 x 轴沿平板方向，并且坐标原点取为平板的前缘；假定外部势流场是均匀流场，这时边界层方程为

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ y=0 \text{ 且 } x>0 \text{ 处}: u=0, v=0 \\ y\to\infty \text{ 时}, \quad u=u_\infty \end{cases} \tag{5-5-37}$$

因 $u_e=u_\infty=\text{const}$，故 $\beta=0$，取

$$g(x)=\sqrt{\frac{2\mu x}{\rho u_e}} \tag{5-5-38}$$

容易验证这时 $\alpha=1$，相似性变量 η 为

$$\eta=\frac{y}{g(x)}=y\sqrt{\frac{\rho u_e}{2\mu x}} \tag{5-5-39}$$

将 $\alpha=1$ 与 $\beta=0$ 代入到（5－5－36）式中的第一个式子得

$$\left.\begin{aligned} f'''+ff''=0 \\ \text{边界条件} \quad f(0)=0, f'(0)=0, f'(\infty)=1 \end{aligned}\right\} \tag{5-5-40}$$

应该说明的是，平板边界层问题首先是由 Blasius 于 1908 年解决的，其解称为 Blasius 解；Topfer 在 1912 年就已经采用数值积分的办法对式（5－5－40）进行了具体的计算。作为课后作业，读者可用现代数值方法，（例如高精度差分方法或数值积分方法）在计算机上完成式（5－5－40）的数值解。

5.5.4 非耦合层流温度边界层的相似性解

对于密度变化很小的流动，可以先由连续方程和动量方程解出速度分布，然后再由能量方程求解温度场。利用边界层连续方程和动量方程求解速度场的过程，常称作求解速度边界



层问题（简称解速度边界层）；在已解出的速度场基础上，用边界层能量方程求温度分布的过程常称作求解温度边界层问题（简称解温度边界层或热边界层）。对于可压缩流动，由于密度不能作常数处理，因此应将连续方程、动量方程和能量方程联立求解。所以，如果采用边界层方法求解流场，便存在着边界层的速度场与温度场的耦合[1]。为便于说明温度边界层的相似解，这里先讨论非耦合情况下层流的温度边界层。首先对两种边界层的厚度作数量级分析。容易证明

$$\frac{\delta_u}{L}\sim\frac{1}{\sqrt{Re}},\qquad \left(\frac{\delta_t}{L}\right)^2\sim\frac{1}{PrRe} \tag{5-5-41}$$

这里 L 为特征长度，δ_u 与 δ_t 分别代表速度边界层名义厚度与温度边界层厚度；Pr 与 Re 分别为普朗特数与雷诺数。显然

$$\frac{\delta_t}{\delta_u}\sim\frac{1}{\sqrt{Pr}} \tag{5-5-42}$$

这表明，温度边界层厚度 δ_t 与速度边界层厚度 δ_u 之比与 Pr 有关。也就是说当 $Pr>1$ 时，$\delta_t<\delta_u$；当 $Pr<1$ 时，$\delta_t>\delta_u$。事实上，Pr 数是表征气体热扩散率与粘性扩散率之比的准则数。通常，大多数流体 Pr 数的数量级为 1 或 1 以上，因此 δ_u/δ_t 的数量级一般大于 1。下面讨论温度边界方程。对于二维、不可压缩、定常、温度边界层，常有如下的两种形式

$$\rho C_P\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=u\frac{\partial P}{\partial x}+k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{5-5-43}$$

$$\rho C_V\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{5-5-21}$$

它们分别是两种形式的能量方程式（5－5－17）与式（5－5－19）在边界层情况下的简化。以式（5－5－43）式为例，该式左边两项表示对流热传输项，右边三项依次代表压缩功项、热传导项和粘性耗散项。如果忽略压缩功项和粘性耗散项，则式（5－5－43）被简化为

$$\rho C_P\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5-5-44}$$

这是许多工程传热问题中常用的一种形式。对于上述两个方程的边界条件即壁面条件，显然它较速度边界层问题要复杂，今分别说明如下。

一、温度边界层的壁面情况

速度边界层所关注的是物体的粘性摩擦阻力问题（例如求 τ_w 与 C_f 等），而温度边界层则主要侧重于研究流体与物体表面间的热交换、热流通量。所以弄清壁面情况至关重要。由傅立叶定律

$$q_w(x)=-k\left(\partial T/\partial y\right)_{y=0} \tag{5-5-45}$$

其中 $(\partial T/\partial y)_{y=0}$ 为壁面法线方向上的气体温度梯度，因此只要知道了边界层的温度分布 $T(x,y)$，$q_W(x)$ 的分布便确定了。根据气体与壁面之间的热交换情况，壁面可分为

（1）等温壁面：$y=0$ 处，$T=T_W=\text{const}$ （5-5-46a）

（2）壁面上给定温度分布：$y=0$ 处，$T=T_W(x)$ （5-5-46b）

（3）绝热壁面：$(\partial T/\partial y)_{y=0}=0,\ \ q_W(x)=0$ （5-5-46c）

（4）冷壁面：$(\partial T/\partial y)_{y=0}>0$，$q_W(x)<0$（壁面吸热） （5-5-46d）

（5）热壁面：$(\partial T/\partial y)_{y=0}<0$，$q_W(x)>0$（壁面放热） （5-5-46e）

对于后两种壁面（即物体与流体之间以一定的热流量进行交换），有

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{1}{k}q_W=-\frac{T_W-T_e}{L}Nu \text{（给定壁面热流量）} \tag{5-5-46f}$$

这里 Nu（努塞尔）数是给定的。

二、平板层流温度边界层的相似性解

二维、不可压缩、定常、沿流向无压强梯度的边界层方程组（其中包括动量与能量方程）为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5-5-47}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-5-48}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\mu/\rho}{Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu/\rho}{Cp}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{5-5-49}$$

其边界条件是

$$\begin{cases} y=0: & u=0,\quad v=0,\quad T=T_W \\ y=\delta_u: & u=u_e \\ y=\delta_t: & T=T_e \end{cases} \tag{5-5-50}$$

这里 δ_u 与 δ_t 分别为速度边界层与温度边界层名义厚度。虽然在一些工程问题中常可以省略粘性耗散项[63]，在这种情况下式（5-5-49）可变为

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5-5-51}$$

但我们这里仍想从式（5-5-49）出发，研究相似解存在的条件。引进 Falkner-Skan 变换式（5-5-27）并取



$$g(x)=\sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_e}} \quad 以及 \quad \xi = x \tag{5-5-52}$$

将式（5-5-29）作用于温度 T，以便求出式（5-5-51）所需要的导数项，然后再代入到式（5-5-51），注意使用式（5-5-30），可得到

$$\frac{1}{Pr}T''+\frac{m+1}{2}fT'=x\left(f'\frac{\partial T}{\partial x}-T'\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{5-5-53}$$

其中上标一撇与两撇分别表示对 η 求一次与二次导数；m 的定义为

$$m=\frac{x}{u_e}\frac{du_e}{dx} \tag{5-5-54}$$

引进温度量纲为 1 的 θ，它满足如下关系

$$T=T_e+T_e(1-\theta)B(x) \tag{5-5-55}$$

这里 T_e 为温度边界层外缘温度；$\theta=\theta(x,\eta)$；$B(x)$ 表示一个待定函数。在给定壁面热流时，即

$$y=0:\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_W=-\frac{q_W(x)}{k} \tag{5-5-56}$$

它又可写为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_W=-\frac{q_W(x)}{k}\sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_e}} \tag{5-5-57}$$

因此将式（5-5-55）代入到式（5-5-57），为简单起见，可以取 $\theta'_W=1$，则得到

$$B(x)=\frac{xq_W(x)}{kT_e\sqrt{R_{ex}}} \tag{5-5-58}$$

另外，将式（5-5-55）代入到式（5-5-53），便得到关于 θ 的二阶方程，即

$$\frac{1}{Pr}\theta''+\frac{m+1}{2}f\theta'+n(1-\theta)f'=x\left(f'\frac{\partial \theta}{\partial x}-\theta'\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{5-5-59}$$

这里 n 与 m 类似，也是一个量纲为 1 的参数。对于给定壁面热流的情况，则 n 的表达式为

$$n=\frac{x}{B}\frac{dB}{dx} \tag{5-5-60}$$

仿照讨论速度边界层相似性的办法去讨论温度边界层问题，所以要使 θ 仅与 η 有关而与 x 无关，则式（5-5-59）的右端必须为零，即

$$\frac{1}{Pr}\theta''+\frac{m+1}{2}f\theta'+n(1-\theta)f'=0 \tag{5-5-61}$$

显然上式仍含 f 项，因此速度边界层具有相似性解是温度剖面相似的前提条件。另外，由方

程式（5-5-59）的右端项为零并注意左端项系数 m 与 n 的特征，便可得到存在相似性解的两个条件，即

$$\left.\begin{array}{ll}\text{条件1:} & \dfrac{\partial\theta}{\partial x}=0 \\ \text{条件2:} & m=\text{const}, n=\text{const}\end{array}\right\} \tag{5-5-62}$$

条件 1 表明，θ 与 x 无关，仅是 η 的函数，所以式（5-5-61）应是关于 θ 的二阶常微分方程；条件 2 表明，在速度边界层与温度边界层非耦合的情况下，式（5-5-61）是关于 θ 的二阶线性常微分方程[64, 65]，显然这时常微分方程的求解比较容易。

§5.6 基于 I-S 变换的二维可压缩层流边界层求解方法

这里主要介绍基于 Illingworth（依林沃斯）-Stewartson（史蒂华生）变换（简称 I-S 变换）的边界层相似解法。在层流边界层的研究中，有许多非常优秀的微分型或者积分型的计算方法。这里之所以选择介绍它，是因为这种方法属于精确解，并且在某种情况下，可以从数学上证明[66]：在可压缩边界层中存在着相似性解[67]。这从本质上讲是件非常重要的事情，或许更重要的是：相似性解可以作为校验与鉴定目前计算流体力学中所发展的各种近似方法与差分格式的精度。正是由于这些缘故，本节想从 I-S 变换出发简明地说明一下导出相似性解的过程。首先，引进 I-S 变换，将 (x, y) 坐标平面上的物理量变换到 (ξ,η) 坐标平面上，其变换式为

$$\begin{cases}\mathrm{d}\xi=\dfrac{\rho_e\mu_e a_e}{\rho_0\mu_0 a_0}\mathrm{d}x & \xi\equiv\xi(x) \\ \mathrm{d}\eta=\dfrac{a_e\rho}{a_0\rho_0}\mathrm{d}y & \eta\equiv\eta(x,y)\end{cases} \tag{5-6-1}$$

式中，下标 e 为边界层外缘的流动参数；下标 0 表示边界层外部势流的等熵滞止参数；a 为声速。借助于式（5-6-1）将各物理量由 (x, y) 坐标系变换到 (ξ,η) 坐标系，于是在 (x, y) 坐标系中对 x 和对 y 的导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Diamond}{\partial x}=\dfrac{\rho_e\mu_e a_e}{\rho_0\mu_0 a_0}\dfrac{\partial\Diamond}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial\Diamond}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial\Diamond}{\partial y}=\dfrac{a_e\rho}{a_0\rho_0}\dfrac{\partial\Diamond}{\partial\eta}\end{cases} \tag{5-6-2}$$

这里 $\Diamond$ 代表流体的任意物理量。定义流函数 $\psi(x, y)$，使其满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0}u,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho_0}v \tag{5-6-3}$$



将式（5－6－2）作用于流函数 ψ 上，得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\tilde{u},\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi}=-\tilde{v} \tag{5-6-4}$$

这里

$$\begin{cases}\tilde{u}=\dfrac{a_0}{a_e}u\\ \tilde{v}=\dfrac{\rho_0\mu_0a_0}{\rho_e\mu_ea_e}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}+\tilde{u}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)\end{cases} \tag{5-6-5}$$

于是将式（5－6－2）用于连续方程

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{5-6-6}$$

可变为

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}=0 \tag{5-6-7}$$

另外，又由于边界层动量方程与能量方程分别为

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{5-6-8}$$

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}=u\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{5-6-9}$$

或者

$$u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(1-\frac{1}{Pr}\right)u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial H}{\partial y}\right] \tag{5-6-10}$$

其中 h 与 H 分别代表静焓与总焓。假定外部势流是等熵的，并注意到如下关系式

$$u\frac{\partial()}{\partial x}+v\frac{\partial()}{\partial y}=\frac{\rho_e\mu_e}{\rho_0\mu_0}\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2\left(\tilde{u}\frac{\partial()}{\partial\xi}+\tilde{v}\frac{\partial()}{\partial\eta}\right) \tag{5-6-11a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{a_e}{a_0}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{u}{a_e}\frac{\mathrm{d}a_e}{\mathrm{d}\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{a_e}{a_0}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta} \tag{5-6-11b}$$

$$u_e\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}\xi}=\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2\tilde{u}_e\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_e}{\mathrm{d}\xi}+\frac{u_e^2}{a_e}\frac{\mathrm{d}a_e}{\mathrm{d}\xi} \tag{5-6-11c}$$

$$\frac{1}{a_e}\frac{\mathrm{d}a_e}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{\gamma-1}{2}\frac{u_e}{a_e^2}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}\xi} \tag{5-6-11d}$$

$$\tilde{u}_e\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_e}{\mathrm{d}\xi}=\left(\frac{a_0}{a_e}\right)^4 u_e\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}\xi} \tag{5-6-11e}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{\rho_e}{\rho}\frac{\rho_e\mu_e}{\rho_0\mu_0}\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^5\tilde{u}_e\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_e}{\mathrm{d}\xi} \tag{5-6-11f}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=v_0\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^3\frac{\mu_e\rho_e}{\mu_0\rho_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[N\frac{\partial\tilde{u}_e}{\partial\eta}\right] \tag{5-6-11g}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{u^2}{2H_e}\right]=G(M_e)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e}\right)^2 \tag{5-6-11h}$$

这里

$$\begin{cases}N\equiv\dfrac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}, \qquad v_0\equiv\dfrac{\mu_0}{\rho_0},M_e\equiv\dfrac{u_e}{a_e}\\ G(M_e)\equiv\dfrac{\dfrac{\gamma-1}{2}M_e^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_e^2}\end{cases} \tag{5-6-12}$$

令

$$\Theta\equiv\frac{H}{H_e}-1 \tag{5-6-13}$$

借助于关系式（5-6-11a）～式（5-6-11h），将式（5-6-8）与式（5-6-10）变换，便可得到如下形式

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=(1+\Theta)\tilde{u}_e\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_e}{\mathrm{d}\xi}+v_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left(N\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right) \tag{5-6-14}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}+\tilde{v}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}=\frac{v_0}{Pr}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(N\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right)+\left(1-\frac{1}{Pr}\right)v_0G(M_e)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[N\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e}\right)^2\right] \tag{5-6-15}$$

至此便得到了由式（5-6-7）、式（5-6-14）和式（5-6-15）组成的变换后新方程组。这个方程组的边界条件是

$$\begin{cases}\eta=0: \quad \tilde{u}=0,\tilde{v}=0,\Theta=\Theta_W\\ \eta=\infty: \quad \tilde{u}=\tilde{u}_e,\Theta=0\end{cases} \tag{5-6-16}$$

显然，当 N 取为 1 并且 Pr 也取为 1（这相当于 μ 随温度 T 线性变化并且壁面为绝热壁面）



时，动量方程变成了与不可压缩流完全一样的形式，而且能量方程也变得相当简单。因此，这时的速度剖面与温度剖面可以单独求解，即该问题变成非耦合的边界层问题了。

§ 5.7　不可压缩与可压缩湍流流动的基本方程

5.7.1　两种平均运算方法

一、物理量 f 对时间取平均（简称时间平均）

$$\bar{f}(x,y,z,t)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x,y,z,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5-7-1}$$

其中 T 为平均周期。这种平均化（常称作雷诺平均）运算所遵循的主要法则是

$$\begin{cases}
\bar{\bar{f}}=\bar{f},\quad \overline{f'}=0,\quad \overline{\bar{f}\bar{g}}=\bar{f}\bar{g} & (5-7-2\text{a})\\
\overline{\bar{f}g}=\bar{f}\bar{g},\quad \overline{fg}=\bar{f}\bar{g}+\overline{f'g'},\quad \overline{\bar{f}g'}=0,\quad \overline{fg'}=\overline{f'g'} & (5-7-2\text{b})\\
\overline{fgh}=\bar{f}\bar{g}\bar{h}+\bar{f}\,\overline{g'h'}+\bar{g}\,\overline{f'g'}+\bar{h}\,\overline{f'g'}+\overline{f'g'h'} & (5-7-2\text{c})\\
\overline{f+g}=\bar{f}+\bar{g} & (5-7-2\text{d})\\
\overline{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}=\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x_i},\quad \overline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}}=\dfrac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_i^2},\quad \overline{\dfrac{\partial f'}{\partial x_i}}=\dfrac{\partial \overline{f'}}{\partial x_i}=0,\quad \overline{\dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_i^2}}=0 & (5-7-2\text{e})\\
\overline{f\dfrac{\partial g}{\partial x_i}}=\bar{f}\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial x_i}+\overline{f'\dfrac{\partial g'}{\partial x_i}}, & (5-7-2\text{f})\\
\overline{\dfrac{\partial f}{\partial t}}=\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial t},\quad \overline{\dfrac{\partial f'}{\partial t}}=\dfrac{\partial \overline{f'}}{\partial t}=0 & (5-7-2\text{g})
\end{cases}$$

式中，f,g,h 均为标量。

在 N–S 方程组的时间平均中，除遇标量外还要遇到矢量与张量（例如粘性应力张量以及 ρVV 并矢张量），今分六种情况给出它们的时间平均

1. 对平均量的随体导数

$$\frac{D\bar{A}}{Dt}=\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}+(\bar{V}\cdot\nabla)\bar{A} \tag{5-7-3}$$

$$\frac{D\bar{f}}{Dt}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}+(\bar{V}\cdot\nabla)\bar{f} \tag{5-7-4}$$

2. 对随体导数的平均

$$\overline{\frac{DA}{Dt}}=\frac{D\bar{A}}{Dt}+\overline{(V'\cdot\nabla)A'} \tag{5-7-5}$$

$$\overline{\frac{Df}{Dt}}=\frac{D\bar{f}}{Dt}+\overline{(V'\cdot\nabla)f'} \tag{5-7-6}$$

3. 对含脉动的非线性物理量的平均

$$\overline{fgh'}=\bar{f}\ \overline{g'h'}+\bar{g}\ \overline{h'f'}+\overline{f'g'h'} \tag{5-7-7}$$

4. 对含随体导数的非线性物理量的平均（这里 A 与 f 分别为矢量与标量）

$$\overline{f\frac{DA}{Dt}}=\bar{f}\frac{D\bar{A}}{Dt}+\overline{f'\left[\frac{\partial A'}{\partial t}+(\bar{V}\cdot\nabla)A'\right]}+\overline{f'(V'\cdot\nabla)A} \tag{5-7-8}$$

5. 对矢量散度以及拉普拉斯算子 ∇^2 的平均

$$\overline{\nabla\cdot A}=\nabla\cdot\bar{A},\quad \overline{\nabla\cdot A'}=0 \quad （对矢量A） \tag{5-7-9}$$

$$\overline{\nabla^2 A}\equiv\overline{\Delta A}=\nabla^2\bar{A} \quad （对矢量A） \tag{5-7-10}$$

$$\overline{\nabla\cdot\Pi}=\nabla\cdot\bar{\Pi} \quad （对任意张量\Pi） \tag{5-7-11}$$

$$\overline{\nabla\cdot(\Pi\cdot A)}=\nabla\left(\overline{\Pi\cdot A}\right) \quad （\Pi 为张量，A为矢量） \tag{5-7-12}$$

$$\overline{\nabla\cdot(fAB)}=\overline{(\nabla f)\cdot AB}+\overline{f(\nabla\cdot A)B}+\overline{f(A\cdot\nabla B)} \quad （AB为并矢张量，f 为标量） \tag{5-7-13}$$

6. 对流项的平均

$$\overline{(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{A}}=\left(\bar{\mathbf{V}}\cdot\nabla\right)\bar{\mathbf{A}}+\overline{(\mathbf{V}'\cdot\nabla)\mathbf{A}'} \quad （对矢量A） \tag{5-7-14}$$

$$\overline{(V'\cdot\nabla)A'}=\overline{\nabla\cdot(V'A')}-\overline{(\nabla\cdot V')A'} \quad （对脉动矢量A'） \tag{5-7-15}$$

$$\overline{\left(\bar{V}\cdot\nabla\right)f'}=0 \quad （对脉动标量f'） \tag{5-7-16}$$

$$\overline{(V'\cdot\nabla)f'}=\nabla\cdot\left(\overline{V'f'}\right)-\overline{f'(\nabla\cdot V')} \quad （对脉动标量f'） \tag{5-7-17}$$

二、Favre（法富尔）质量加权平均[68]

在可压缩流中，常采用 Favre 平均，其定义为

$$\tilde{v}_i=\frac{\overline{\rho v_i}}{\bar{\rho}} \tag{5-7-18}$$

式中，符号“～”表示法富尔平均；“—”表示通常的雷诺平均。于是，在这两种平均下速度分量 v_i 可分别表示为

$$\begin{aligned} v_i&=\tilde{v}_i+v_i'' \quad (法富尔平均)\\ v_i&=\bar{v}_i+v_i' \quad (雷诺平均) \end{aligned} \tag{5-7-19}$$

这里 v_i' 为雷诺平均脉动分速度；v_i'' 是法富尔平均脉动分速度。对于压强 P 和密度 ρ 来讲，



只用雷诺平均

$$P=\bar{P}+P',\qquad \rho=\bar{\rho}+\rho' \tag{5-7-20}$$

下面介绍几种有用的关系式

① $$\overline{\rho v_i}=\bar{\rho}\tilde{v}_i \tag{5-7-21a}$$

② $$\overline{\rho v_i''}=0 \tag{5-7-21b}$$

③ $$\overline{\rho v_i v_j}=\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j+\overline{\rho v_i'' v_j''} \tag{5-7-21c}$$

④ $$\overline{v_i''}=-\frac{\overline{\rho' v_i'}}{\bar{\rho}} \tag{5-7-21d}$$

⑤ $$\tilde{v}_i-\bar{v}_i=-\overline{v_i''} \tag{5-7-21e}$$

⑥ $$\overline{\rho' v_i'}=\overline{\rho' v_i''} \tag{5-7-21f}$$

⑦ $$\bar{\tilde{v}}_i-\bar{v}_i=v_i'-v_i''=\frac{\overline{\rho' v_i''}}{\bar{\rho}}=\frac{\overline{\rho' v_i'}}{\bar{\rho}}=-\overline{v_i''} \tag{5-7-21g}$$

以上两种平均的主要区别是：在法富尔平均中 $\overline{u_i''}\neq 0$ 而 $\overline{\rho u_i''}=0$；在雷诺平均中 $\overline{u_i'}=0$，而 $\overline{\rho u_i'}\neq 0$。

5.7.2　不可压缩湍流运动的基本方程

1. 连续方程与动量方程

令
$$\boldsymbol{V}=\bar{\boldsymbol{V}}+\boldsymbol{V}' \tag{5-7-22}$$
$$P=\bar{P}+P' \tag{5-7-23}$$
$$\boldsymbol{\Pi}=\bar{\boldsymbol{\Pi}}+\boldsymbol{\Pi}' \tag{5-7-24}$$

这里 $\boldsymbol{V}$, P 与 $\boldsymbol{\Pi}$ 分别为速度、压强与粘性应力张量。将式（5-7-22）代到不可压缩流的连续方程后再取时间平均，得

$$\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{V}}=0 \tag{5-7-25}$$

并注意到
$$\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{V}}+\nabla\cdot\boldsymbol{V}'=0$$

于是推出
$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}'=0 \tag{5-7-26}$$

将式（5-7-22）与式（5-7-23）代到不可压缩流的动量方程，得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{\boldsymbol{V}}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{V}'}{\partial t}+\nabla\cdot(\bar{\boldsymbol{V}}\bar{\boldsymbol{V}})+\nabla\cdot(\bar{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}')+\nabla\cdot(\boldsymbol{V}'\bar{\boldsymbol{V}})+\nabla\cdot(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}')\\&=-\nabla\left(\frac{\bar{P}}{\rho}\right)-\nabla\left(\frac{P'}{\rho}\right)+\nu\nabla^2\bar{\boldsymbol{V}}+\nu\nabla^2\boldsymbol{V}'\end{aligned} \tag{5-7-27}$$

式中，$\nu=\mu/\rho$。将上式取时间平均，得

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}+\nabla\cdot(\overline{V}\ \overline{V})=-\nabla\left(\frac{\overline{P}}{\rho}\right)+\nu\nabla^2\overline{V}-\nabla\cdot\left(\overline{V'V'}\right) \tag{5-7-28}$$

于是将式（5－7－27）减去式（5－7－28），得到

$$\frac{\partial V'}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\overline{V}V'\right)+\nabla\cdot\left(V'\overline{V}\right)+\nabla\cdot\left(V'V'\right)=-\nabla\left(\frac{P'}{\rho}\right)+\nu\nabla^2V'+\nabla\cdot\left(\overline{V'V'}\right) \tag{5-7-29}$$

式中，$-\rho\overline{V'V'}$ 称作雷诺应力，它是二阶对称张量。如果取笛卡儿直角坐标系 $V'=u'i+v'j+w'k$ 时，用矩阵来表示雷诺应力张量便为

$$-\rho\overline{V'V'}=-\rho\begin{bmatrix}\overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'}\\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'}\\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2}\end{bmatrix} \tag{5-7-30}$$

相应的在直角笛卡儿坐标式式（5－7－25）与式（5－7－28）可表为（下面采用 Einstein 求和规约）

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j}=0 \tag{5-7-31}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2\overline{u}_i-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i'u_j'}\right) \tag{5-7-32}$$

式中，u_i 为 (x_1,x_2,x_3) 直角坐标系下速度分量，$\nu=\mu/\rho$；

2. 湍流脉动动能方程的三种形式

令
$$K\equiv\frac{1}{2}\overline{V'\cdot V'}=\frac{1}{2}\overline{q^2},\quad q^2\equiv V'\cdot V' \tag{5-7-33}$$

式中，K 代表单位质量流体的湍流动能。将（5－7－29）式点乘 V' 之后再取时间平均，并注意应用式（5－7－25）与式（5－7－26），可得到

$$\begin{aligned}&\overline{V'\cdot\frac{\partial V'}{\partial t}}+\overline{V'\cdot[\overline{V}\cdot(\nabla V')]}+\overline{V'\cdot[V'\cdot(\nabla\overline{V})]}+\overline{V'\cdot[V'\cdot(\nabla V')]}\\&=\overline{-V'\cdot\left[\nabla\left(\frac{P'}{\rho}\right)\right]}+\overline{\nu V'\cdot\left(\nabla^2V'\right)}\end{aligned} \tag{5-7-34}$$

将式（5－7－33）用于上式并适当整理可得到

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial K}{\partial x_j}=-\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left[u_j'\left(\frac{P'}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)\right]}+\overline{\nu u_i'\nabla^2u_i'} \tag{5-7-35}$$

式中，$\overline{u}_i$ 为速度分量的平均值；u_i' 为速度分量的脉动值。借助于式（5－7－26）上式最后一项还可以变为如下形式：



$$\overline{\nu u_i' \nabla^2 u_i'} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}\right]-\varepsilon_d \tag{5-7-36}$$

式中

$$\varepsilon_d = \overline{e}_d = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} \tag{5-7-37}$$

$$e_d \equiv \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\Pi}':D' \tag{5-7-38}$$

式中，$\boldsymbol{\Pi}'$ 与 D' 分别为粘性应力张量与变形速率张量的脉动值。另一种形式的湍流动能方程可以这样得到：因为

$$\frac{\partial K}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{(u_i')^2}\right]=\overline{u_i'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \tag{5-7-39}$$

于是有

$$\overline{u_i'\nabla^2 u_i'}=\nabla^2 K-\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}=\nabla^2 K-\varepsilon \tag{5-7-40}$$

$$\varepsilon \equiv \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \tag{5-7-41}$$

另外还有

$$\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\overline{u_i'u_j'}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{5-7-42}$$

将式（5-7-40）与式（5-7-42）代到式（5-7-35）中便得到

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial K}{\partial x_j}=-\frac{1}{2}\overline{u_i'u_j'}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_j'\left(\frac{P'}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)}\right]+\nu\nabla^2 K-\varepsilon \tag{5-7-43}$$

式中，ε 由（5-7-41）式定义。

最后，简单解释一下方程（5-7-35）式中各项的物理意义：该式左端第一项代表单位时间内湍流脉动动能的局部变化率；第二项表示沿平均流迹线的湍流脉动动能的迁移变化率；该式右端第一项表示雷诺应力在平均流场内的变形功项（又常称作湍流能量生成项），它具有源项的性质；另外从张量分析的角度来讲，它是雷诺应力张量与平均运动变形速率张量的双点积。该项大于零，则表示平均运动向脉动运动输入能量，反之若该项小于零则将使湍动能减小。右端第二项是表示在湍流脉动流场内通过微元体界面的脉动压力能和脉动动

能。这项还可借助于式（5-7-26）变为

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left[u_j'\left(\frac{P'}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)\right]}=\overline{u_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{P'}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)} \tag{5-7-44}$$

于是由上式看出该项又可表示沿脉动迹线的脉动压力能与脉动动能的迁移变化。另外，再看一下式（5-7-43）右端的最后三项，它们可变为

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left[u_j'\left(\frac{P'}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)\right]}+\nu\nabla^2K-\varepsilon=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\frac{P'u_j'}{\rho}+\frac{q^2}{2}u_j'}-\nu\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]-\varepsilon \tag{5-7-45}$$

显然，式（5-7-45）右端第一项是梯度形式项，它表示一种扩散过程，其中包括由压力速度相关部分而产生的扩散作用以及由湍流脉动三阶相关部分（即$\overline{u_i'u_i'u_j'}/2$）产生的扩散；另外，式（5-7-45）右端最后一项ε，表示了单位质量湍流运动的粘性耗散。对于均匀湍流ε可表为[69]

$$\varepsilon=\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}=\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \tag{5-7-46}$$

而且还有

$$\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}=\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}=\overline{\omega_k'\omega_k'} \tag{5-7-47}$$

式中，ω_k'为湍流的脉动涡量，其定义为

$$\omega_k'=-\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j},\quad \omega'=\nabla\times V' \tag{5-7-48}$$

这里ε_{ijk}为直角笛卡儿坐标系下的 Eddington 张量；ω'为湍流的脉动涡量。

3. 雷诺应力输运方程

在直角笛卡儿坐标系下式（5-7-29）可写为

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}+u_k'\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}+\bar{u}_k\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i'u_k'}\right) \tag{5-7-49}$$

上式称作 i 向的脉动方程。将 i 向的脉动方程乘u_j'再加上 j 向的脉动方程乘u_i'，然后将它们取时间平均，便得到

$$\frac{\partial\bar{\tau}_{ij}^{(t)}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial\bar{\tau}_{ij}^{(t)}}{\partial x_k}=P_{ij}+Q_{ij}+F_{ij}-\varepsilon_{ij}+\nu\frac{\partial^2\bar{\tau}_{ij}^{(t)}}{\partial x_k\partial x_k} \tag{5-7-50}$$

这里

$$\bar{\tau}_{ij}^{(t)}=\overline{u_i'u_j'} \tag{5-7-51}$$



$$P_{ij}=-\left(\overline{\tau}_{ik}^{(t)}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_k}+\overline{\tau}_{jk}^{(t)}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_k}\right) \tag{5-7-52}$$

$$Q_{ij}=\overline{\frac{P'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} \tag{5-7-53}$$

$$F_{ij}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_i'u_j'u_k'}+\overline{\frac{P'}{\rho}\left(u_j'\delta_{ik}+u_i'\delta_{jk}\right)}\right] \tag{5-7-54}$$

$$\varepsilon_{ij}=2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \tag{5-7-55}$$

下面简介一下式（5－7－50）中各项的物理意义：该式左端第一项为雷诺应力的局部变化；第二项是对流项，它是由于平均运动所引起的变化。该式右端 P_{ij} 表示雷诺应力生成项，它是雷诺应力在平均流场内产生的平均变形功率，对于湍流强产生区域，它是大项，如果没有平均运动变形率也就没有雷诺应力的生成项；Q_{ij} 项表示由于脉动压力在脉动流场内所引起的脉动变形所作的变形功；F_{ij} 项属于雷诺应力扩散项的一部分，其中式（5－7－54）右端第一项是由湍流脉动 u_k' 所携带的脉动雷诺应力 $u_i'u_j'$ 的平均输运项；式（5－7－54）右端第二项为由脉动压强和脉动速度产生的扩散项。在一般情况下，F_{ij} 是小项。ε_{ij} 为雷诺应力耗散项，在一般情形下，它是大项。很显然，雷诺应力耗散张量是二阶对称张量。式（5－7－50）右端最后一项是由分子粘性产生的雷诺应力输运项，在一般情况下，该项很小，常可略去；这一项也属于雷诺应力扩散项的一部分。另外，如果将张量 P_{ij},F_{ij} 与 ε_{ij} 分别对 i 和 k 指标缩并[70]，便得到（注意对下式求和）

$$P\equiv\frac{1}{2}P_{ii}=-\overline{\tau}_{jk}^{(t)}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_k}=-\frac{1}{2}\overline{\tau}_{jk}^{(t)}\left(\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_k}+\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial x_j}\right) \tag{5-7-56}$$

$$D\equiv\frac{1}{2}F_{ii}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_j'\left(\frac{P'}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)}\right] \tag{5-7-57}$$

$$\varepsilon\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{ii}=\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \tag{5-7-58}$$

借助于上面的几个符号，则式（5－7－43）便可简记为

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial K}{\partial x_j}=P+D-\varepsilon+\nu\nabla^2 K \tag{5-7-59}$$

式中，P 为湍流动能的产生项，在湍流强产生区，它是一个大项；D 为湍流扩散项，在一般情况下它为小项；$\nu\nabla^2 K$ 项为湍流动能的层流扩散项，一般情况下它是个很小的项，通常可

以略去；ε 是湍流能量的耗散项，它是个大项。

4. 湍流耗散率方程

将式（5－7－49）对 x_j 求偏导，然后在所得式子的两端乘 $\partial u_i'/\partial x_j$，之后对整个式子取时间平均，便得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}=&\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{-\left[\overline{\nu u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}}+\frac{2\nu}{\rho}\overline{\left(\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}\frac{\partial P'}{\partial x_l}\right)}\right]+\nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right\}-\\
&2\nu\left\{\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\left[\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}}+\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\right]+\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_l\partial x_k}\overline{\left(u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\right)}\right\}-\\
&2\nu\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}}-2\nu^2\overline{\left(\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_l\partial x_k}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{5-7-60}
$$

式中，左端两项分别是变形率项以及由平均运动产生的对流输运项；右端第一大项是湍流运动产生的扩散项；第二大项是耗散率产生项，即由于粘性力产生的脉动涡的耗散项；第三项是与串级（cascade）现象[71]有关的涡拉伸产生项。串级现象是湍流的一个显著特征，从大涡到小涡再到更小涡（Eddy）的能量串级输运过程，从本质上讲，该过程是靠涡管的不断拉伸来完成的[33,30,34,72]。式（5－7－60）右端最后一项为粘性耗散项。

5. 湍流平均运动的热焓方程

用总焓表示的能量方程由式（1.3.23）给出，即

$$
\frac{DH}{Dt}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+\dot{q}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\Pi\cdot\boldsymbol{V}) \tag{5-7-61}
$$

注意到 Fourier（傅里叶）定律及连续方程后，在直角笛卡儿坐标系中上式又可变为

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho H)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j H)=\frac{\partial P}{\partial t}+k\nabla^2 T+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\tau_{ji}) \tag{5-7-62}
$$

在直角坐标系下粘性应力张量 $\boldsymbol{\Pi}$ 的分量 τ_{ij} 为

$$
\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\delta_{ij} \tag{5-7-63}
$$

对于不可压缩流体，则上式简化为

$$
\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5-7-64}
$$

将诸瞬时物理量分解为时均量与脉动量之和，代入式（5－7－62）或者式（5－5－19）并注意到不可压缩流动及完全气体的特点，于是对不可压缩流可得到



$$\rho C_V \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}+\rho C_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{T}\overline{u}_j\right)=k\nabla^2\overline{T}+\overline{\phi}+\phi^{(t)}-\rho C_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{T'u'_j}\right) \tag{5-7-65}$$

式中，$\overline{\phi}$ 与 $\phi^{(t)}$ 分别为

$$\overline{\phi}=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)^2, \qquad \phi^{(t)}=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{5-7-66}$$

5.7.3　可压缩湍流运动的基本方程

1. 连续、动量和能量方程

现在先讨论两种平均法之间的关系。由质量加权平均的定义，于是

$$\tilde{u}_i=\frac{\overline{\rho u_i}}{\overline{\rho}},\quad \tilde{h}=\frac{\overline{\rho h}}{\overline{\rho}},\quad \tilde{T}=\frac{\overline{\rho T}}{\overline{\rho}},\quad \tilde{H}=\frac{\overline{\rho H}}{\overline{\rho}}$$

对于任意一个物理量 β，则 $\tilde{\beta}$ 被定义为

$$\tilde{\beta}\equiv\frac{\overline{\rho\beta}}{\overline{\rho}} \tag{5-7-67}$$

因此有

$$\overline{\rho\beta}=\overline{\rho}\tilde{\beta} \tag{5-5-68}$$

对于任意的 β，有 $\beta=\tilde{\beta}+\beta''$，将该式的两边同乘 ρ 后再取平均，并考虑到式（5－7－68），得到

$$\overline{\rho\beta''}=0 \tag{5-7-69}$$

又由 $\rho=\overline{\rho}+\rho'$ 代到式（5－7－69）便推出

$$\overline{\beta''}=-\frac{\overline{\rho'\beta''}}{\overline{\rho}} \tag{5-7-70}$$

由 $\beta=\tilde{\beta}+\beta''$，将它取平均并利用上式，可得

$$\tilde{\beta}-\overline{\beta}=-\overline{\beta''}=\frac{\overline{\rho'\beta''}}{\overline{\rho}} \tag{5-7-70a}$$

再由瞬时量的两种分解（$\beta=\overline{\beta}+\beta'=\tilde{\beta}+\beta''$），于是有

$$\beta''=\overline{\beta}+\beta'-\tilde{\beta} \tag{5-7-70b}$$

考虑到 $\overline{\beta}=\tilde{\beta}+\overline{\beta''}$，于是由上式又能得到

$$\beta''=\beta'+\overline{\beta''} \tag{5-7-70c}$$

利用式（5-7-70），则上式变为

$$\beta'' = \beta' - \frac{\overline{\rho'\beta''}}{\bar{\rho}} \tag{5-7-71}$$

将上式两边同乘 ρ 后再取时间平均，可得 $\overline{\rho\beta''} = \overline{\rho'\beta'} - \overline{\rho'\beta''}$，注意使用式（5-7-69），可得到

$$\overline{\rho'\beta'} = \overline{\rho'\beta''} \tag{5-7-72}$$

将上式代到式（5-7-71），有

$$\beta'' = \beta' - \frac{\overline{\rho'\beta'}}{\bar{\rho}} = \beta' + \overline{\beta''} \tag{5-7-73}$$

注意到 $\beta'' - \beta' = \bar{\beta} - \tilde{\beta}$，代到上式，便有

$$\tilde{\beta} = \bar{\beta} + \frac{\overline{\rho'\beta'}}{\bar{\rho}} \tag{5-7-74}$$

现在将质量加权平均用到连续方程、动量方程和能量方程式中。首先考察粘性应力张量 $\boldsymbol{\Pi}$、热流矢量 $\boldsymbol{q}$、总焓 H 的质量加权平均过程。注意到

$$\boldsymbol{\Pi} = \bar{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{\Pi}', \qquad \boldsymbol{q} = \bar{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}', \qquad \boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{5-7-75}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = 2\mu\boldsymbol{D} + \lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I} = \tau_{\alpha\beta}\boldsymbol{i}_\alpha\boldsymbol{i}_\beta \quad \text{（在直角笛卡儿坐标系）} \tag{5-7-76}$$

以及 $\boldsymbol{V} = \tilde{\boldsymbol{V}} + \boldsymbol{V}''$，　$\lambda = \tilde{\lambda} + \lambda''$，　$\mu = \tilde{\mu} + \mu''$，于是总焓 H 为

$$H = \tilde{h} + h'' + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{V}}\cdot\tilde{\boldsymbol{V}} + \tilde{\boldsymbol{V}}\cdot\boldsymbol{V}'' + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}''\cdot\boldsymbol{V}'' \tag{5-7-77}$$

将上式乘以 ρ 后取时间平均，然后再除以 $\bar{\rho}$ 便得到 $\tilde{H}$，即

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{V}}\cdot\tilde{\boldsymbol{V}} + \frac{1}{2}\frac{\overline{\rho\boldsymbol{V}''\cdot\boldsymbol{V}''}}{\bar{\rho}} \tag{5-7-78}$$

由于 $H = \tilde{H} + H''$，于是得到

$$H'' = h'' - \frac{1}{2}\frac{\overline{\rho\boldsymbol{V}''\cdot\boldsymbol{V}''}}{\bar{\rho}} + \tilde{\boldsymbol{V}}\cdot\boldsymbol{V}'' + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}''\cdot\boldsymbol{V}'' \tag{5-7-79}$$

同理可得

$$\overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \overline{\rho u_i'' u_j''}, \qquad \overline{\rho H u_j} = \bar{\rho}\tilde{H}\tilde{u}_j + \overline{\rho H'' u_j''},$$

$$\bar{\rho}\left(\widetilde{u_i'' u_j''}\right) = \overline{\rho u_i'' u_j''}, \quad \tilde{\tau}_{ij} = \tilde{\mu}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right),$$



因此，将 Favre 平均用于基本方程组式（5.3.25）、式（5.3.26）与式（1.3.23）并注意上面给出的有关结果，便有

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\tilde{V}\right)=0 \tag{5-7-80}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\tilde{V}\right)+\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\tilde{V}\tilde{V}\right)=-\nabla\bar{P}+\nabla\cdot\left(\bar{\Pi}-\overline{\rho V''V''}\right) \tag{5-7-81}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\tilde{H}\right)-\frac{\partial\bar{P}}{\partial t}+\nabla\cdot\left[\bar{\rho}\tilde{H}\tilde{V}+\bar{q}-\bar{\Pi}\cdot\tilde{V}-\overline{\Pi\cdot V''}+\overline{\rho H''V''}\right]=0 \tag{5-7-82}$$

为了更清晰的表达上述各项的具体形式，不妨给出笛卡尔直角坐标系的表达式为

连续方程

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\right)=0 \tag{5-7-80）*}$$

动量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\right)=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\tau}_{ij}-\overline{\rho u_i''u_j''}\right) \tag{5-7-81）*}$$

式中

$$\bar{\tau}_{ij}=\mu\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k}\right]+\mu\left[\left(\frac{\partial\overline{u''_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u''_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\overline{u''_k}}{\partial x_k}\right] \tag{5-7-81a}$$

能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\tilde{H}\right)-\frac{\partial\bar{P}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{H}-k\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_j}-\tilde{u}_i\bar{\tau}_{ij}-\overline{u_i''\tau_{ij}}+\overline{\rho u_j''H''}\right)=0 \tag{5-7-82）*}$$

如果能量方程（5－5－17）式用瞬时量表示，即

$$\frac{\partial(\rho C_P T)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho C_P TV)=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\phi-\nabla\cdot\boldsymbol{q} \tag{5-5-17）'}$$

则采用 Favre 平均，上式变为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}C_P\tilde{T}\right)+\nabla\cdot\left(\bar{\rho}C_P\tilde{T}\tilde{V}\right)=\frac{\partial\bar{P}}{\partial t}+\tilde{V}\cdot\nabla\bar{P}+\overline{V''\cdot\nabla P}+\\ \nabla\cdot\left[-\bar{q}+q''-C_P\overline{\rho V''T''}\right]+\bar{\phi}=0\end{aligned} \tag{5-5-17）*}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}C_P\tilde{T}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}C_P\tilde{T}\tilde{u}_j\right)=\frac{\partial\bar{P}}{\partial t}+\tilde{u}_j\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}+\overline{u_j''\frac{\partial P}{\partial x_j}}+\\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[k\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_j}+k\frac{\partial\overline{T''}}{\partial x_j}-C_P\overline{\rho T''u_j''}\right]+\bar{\phi}=0\end{aligned} \tag{5-5-17a}$$

式中

$$\bar{\phi}=\overline{\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\bar{\tau}_{ij}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\overline{\tau_{ij}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \tag{5-5-17b}$$

采用同样的办法处理式（1-4-41），便可得到关于 e_t 或 E_t 的表达式，即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}_t)+\nabla\cdot\left[(\bar{\rho}\tilde{e}_t+\bar{P})\tilde{V}-\bar{\boldsymbol{\Pi}}\cdot\tilde{V}+\bar{\boldsymbol{q}}+\overline{\rho e_t''V''}+\overline{PV''}-\overline{\boldsymbol{\Pi}\cdot V''}\right]=0 \qquad (5-7-83)$$

注意到

$$\begin{cases} e_t=e+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}, \\ E=\rho e_t \\ E=\rho(\tilde{e}_t+e_t''), \\ \bar{E}=\bar{\rho}\tilde{e}_t+\overline{\rho e_t''}=\bar{\rho}\tilde{e}_t, \\ E=\bar{E}+E'' \end{cases} \qquad (5-7-84)$$

因此式（5-7-83）又可变为

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}+\nabla\cdot\left[(\bar{E}+\bar{P})\tilde{V}-\bar{\boldsymbol{\Pi}}\cdot\tilde{V}+\bar{\boldsymbol{q}}+\overline{E''V''}+\overline{PV''}-\overline{\boldsymbol{\Pi}\cdot V''}\right]=0 \qquad (5-7-85)$$

2. 湍流脉动动能方程与雷诺应力方程

类似于不可压缩流的做法，定义

$$q^2\equiv\frac{\overline{\rho V''\cdot V''}}{\bar{\rho}} \qquad (5-7-86)$$

$$K\equiv\frac{1}{2}\overline{q^2}=\frac{\overline{\rho V''\cdot V''}}{2\bar{\rho}}=\frac{1}{2}(\widetilde{V''\cdot V''}) \qquad (5-7-87)$$

在直角笛卡儿坐标系中有

$$K=\frac{1}{2\bar{\rho}}\overline{\rho u_i''u_i''}=\frac{1}{2}(\widetilde{u_i''u_i''}) \qquad (5-7-88)$$

于是湍流脉动能方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}K\tilde{u}_j)=&-(\overline{\rho u_i''u_j''})\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\overline{\bar{\rho}q^2u_j''}\right)-\\ &\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j''P})+\overline{P\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i''\tau_{ij}})-\overline{\tau_{ij}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}\end{aligned} \qquad (5-7-89)$$

式中，τ_{ij} 为粘性应力张量。对于雷诺应力 $\tau_{ij}^{(t)}$，其定义为

$$\tau_{ij}^{(t)}\equiv u_i''u_j'' \qquad (5-7-90)$$

因此雷诺应力方程为



$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho\tau_{ik}^{(t)}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_j\overline{\rho\tau_{ik}^{(t)}}\right)=-\overline{\rho\tau_{ij}^{(t)}}\frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_j}-\overline{\rho\tau_{kj}^{(t)}}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho\tau_{ik}^{(t)}u_j''}\right)-$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{Pu_k''}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{Pu_i''}\right)+\overline{P\left(\frac{\partial u_k''}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}\right)}+$$
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ij}u_k''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{kj}u_i''}\right)-\overline{\tau_{ij}\frac{\partial u_k''}{\partial x_j}}-\overline{\tau_{kj}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \tag{5-7-91}$$

值得注意的是：在式（5-7-89）与式（5-7-91）中，压强 P 与粘性应力张量 τ_{ij} 用的都是瞬时值。注意到

$$P=\overline{P}+P',\qquad \tau_{ij}=\overline{\tau}_{ij}+\tau_{ij}' \tag{5-7-92}$$

将它们代入式（5-7-89）与式（5-7-91）中并注意使用前面已给出的式（5-7-73）等关系式，还可进一步整理化简，为节约篇幅，这些表达式不再给出。

§ 5.8　定常二维湍流边界层方程及动量积分关系式解法

5.8.1　可压缩二维湍流边界层方程

二维湍流边界层方程的建立过程与层流边界层方程相类似。为便于与层流类比，所以首先对基本方程组采用时间平均，最后再引入质量加权平均的概念。对于连续方程进行时间平均时要注意到 $\partial\overline{\rho'}/\partial t=0$，于是便有

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho v}\right)=0 \tag{5-8-1}$$

沿 x 方向的动量方程为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \tag{5-8-2}$$

令 $P=\overline{P}+P'$，$\tau_{yx}=\overline{\tau}_{yx}+\tau_{yx}'$，$u=\overline{u}+u'$，$v=\overline{v}+v'$ 代入式（5-8-2）后得

$$\overline{\rho}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\overline{\rho u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}=-\frac{\partial\overline{P}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\tau}_{yx}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho'u'}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{(\rho u)'u'}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{(\rho v)'u'}\right) \tag{5-8-3}$$

根据湍流边界层的特点，引进下面三点假设

（1）边界层很薄，因而 $\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\rho u')u'}\ll\frac{\partial}{\partial y}\overline{(\rho v')u'}$。

（2）对平均流来讲，流动是定常的，因而 $\frac{\partial\overline{\rho'u'}}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\overline{u}}{\partial t}=0$。

（3）经验证明：时均粘性应力和 $\overline{\rho(v)'u'}$ 相比是很小的量，因此

$$\bar{\tau}_{yx}=\overline{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\approx\bar{\mu}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\tag{5-8-4}$$

基于这些假设，动量方程式（5-8-3）简化为

$$\overline{\rho u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\overline{(\rho v)'u'}\right]\tag{5-8-5}$$

这里要说明的是，$\left[-\overline{(\rho v)'u'}\right]$项称雷诺应力。当然这仅仅是一种类比，但它毕竟不是一种应力，而是通过垂直于 y 方向放置的表面上脉动引起的动量通量（沿 x 方向）的时间平均值。对于 y 方向的动量方程，则可简化为

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial y}=0\tag{5-8-6}$$

对于能量方程的简化，所使用的基于假设仍是上面给出的三点，时间平均的（简称时均）能量方程为

$$\begin{aligned}\overline{\rho u}C_P\frac{\partial\bar{T}}{\partial x}+\overline{\rho v}C_P\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}=\bar{u}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}\right)+\bar{\mu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2+\\ \frac{\partial}{\partial y}\left[-C_P\overline{(\rho v)'T'}\right]-\overline{(\rho v)'u'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\end{aligned}\tag{5-8-7}$$

式中，$\left[C_P\overline{(\rho v)'T'}\right]$从性质上讲是时均运动的表观热流，而$\left[-\overline{(\rho v)'u'}\right]$仍是表观剪切应力。现在引入 Favre 平均，注意到式（5-7-67）以及使用平均流动为定常的假定，则连续方程式（5-8-1）变为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{u})+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\tilde{v})=0\tag{5-8-8}$$

同样地，动量方程式（5-8-5）也可变为

$$\bar{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\bar{\rho}\tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\approx-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\overline{\rho v''u''}\right]\tag{5-8-9}$$

类似地，能量方程在采用 Favre 平均时，也要作相应变化，这里就不再给出了。

5.8.2 不可压缩二维湍流边界层方程及边界条件

设 f 为不可压缩流动中的任意物理量，对于不可压缩流动，因 $\rho=\text{const}$，于是 $\bar{f}=\tilde{f}$，连续方程式（5-8-1）、动量方程式（5-8-5）以及能量方程式（5-8-7）变为

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}=0\tag{5-8-10}$$



$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}-\frac{\partial\left(\overline{u'v'}\right)}{\partial y} \tag{5-8-11}$$

$$C_P\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)=\bar{u}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)+\bar{\mu}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2-C_P\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'T'}\right)-\rho\left(\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \tag{5-8-12}$$

边界条件为

$$\begin{cases} y=0:\ \bar{u}=0,\bar{v}=0,\bar{T}=\bar{T}_{\mathrm{w}},\text{各脉动量为零} \\ y=\infty:\ \bar{u}=u_e,\bar{T}=T_e,\text{各脉动量为零} \end{cases} \tag{5-8-13}$$

在实际计算中，经常引入动量的湍流交换系数或称涡粘性系数ε_{m}，其定义是

$$-\overline{u'v'}\equiv\varepsilon_{\mathrm{m}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \tag{5-8-14}$$

ε_{m}与湍流动力粘性系数μ_{t}间的关系为

$$\mu_{\mathrm{t}}=\rho\varepsilon_{\mathrm{m}} \tag{5-8-15}$$

虽然从形式上讲ε_{m}和动力粘性系数μ类似，但二者本质上是不同的，后者是流体的一种属性，而前者取决于气流的动力学特性。在湍流中，ε_{m} 要比μ大得多，因此还时常可以把动量方程式（5－8－5）与能量方程式（5－8－7）中的粘性项省略。类似地，仿照傅里叶方程可以定义一个湍流热交换系数或涡热扩散系数ε_{h}

$$-\overline{T'v'}=\varepsilon_{\mathrm{h}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \tag{5-8-16}$$

显然ε_{h}与湍流热传导系数 K_{t}间的关系为

$$K_{\mathrm{t}}=\rho C_P\varepsilon_{\mathrm{h}} \tag{5-8-17}$$

并且有

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{h}}}=Pr_{\mathrm{t}}=\frac{\mu_{\mathrm{t}}C_P}{K_{\mathrm{t}}} \tag{5-8-18}$$

这里 Pr_{t} 称为湍流普朗特数。同样地，涡热扩散系数ε_{h} 有别于分子导热系数 K，前者主要受流体运动特性的制约而后者则依赖于流体的热力学状态及流体的属性。使用μ_{t} 与 K_{t} 后，上述方程组式（5－8－10）、式（5－8－11）和式（5－8－12）变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0 \\ \rho\left(\bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)=-\dfrac{\partial \bar{P}}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu_{\mathrm{c}}+\mu_{\mathrm{t}}\right)\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right] \\ \rho C_P\left(\bar{u}\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)=\bar{u}\dfrac{\partial \bar{P}}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(K_{\mathrm{c}}+K_{\mathrm{t}}\right)\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right]+\left(\mu_{\mathrm{c}}+\mu_{\mathrm{t}}\right)\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 \end{cases} \tag{5-8-19}$$

很显然，在μ_t与K_t已知的情况下，借助上述方程组连同边界条件式（5－8－13）便可以方便的得到平均运动的$\overline{u},\overline{v},\overline{T}$等气动参数值，然而$\mu_t$与$K_t$到底如何给出，这涉及到湍流模型的建立或者湍流脉动场的求解问题[1, 64, 65, 72～80]。

5.8.3 不可压缩湍流边界层的动量积分关系式解法

首先由不可压缩、定常、湍流二维边界层流动的x方向动量方程式（5－8－11）出发，将该方程右端第一项（即压强变化项）用外部势流的伯努利方程取代，该方程可变为

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}=u_e\frac{du_e}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial y} \tag{5-8-20}$$

式中

$$\overline{\sigma}=\mu_c\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}-\rho\overline{u'v'} \tag{5-8-21}$$

将式（5－8－10）乘$\overline{u}$加到式（5－8－20），得

$$\frac{\partial(\overline{u})^2}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u}\cdot\overline{v})}{\partial y}=u_e\frac{du_e}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial y} \tag{5-8-22}$$

边界条件为

$$\begin{cases}y=0: & \overline{u}=0,\overline{v}=0\\ y=\infty: & \overline{u}=u_e\end{cases}$$

将式（5－8－22）对y从0到h进行积分（$h>\delta$），得

$$\int_0^h\frac{\partial(\overline{u})^2}{\partial x}dy+u_e\overline{v}_h=\int_0^h u_e\frac{du_e}{dx}dy-\frac{\tau_W}{\rho} \tag{5-8-23}$$

式中，τ_W为壁面切应力（因为壁面上的$\overline{\sigma}$就是τ_W），这里$\overline{v}_h$为h处的$\overline{v}$值。

由连续方程式（5－8－10）得

$$\overline{v}_h=-\int_0^h\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}dy$$

将它代到式（5－8－23）后得

$$\int_0^h\left(\frac{\partial(\overline{u})^2}{\partial x}-u_e\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}-u_e\frac{du_e}{dx}\right)dy=-\frac{\tau_W}{\rho} \tag{5-8-24}$$

将上式重新整理为

$$\int_0^h\left\{-\frac{\partial}{\partial x}[\overline{u}(u_e-\overline{u})]-\frac{du_e}{dx}(u_e-\overline{u})\right\}dy=-\frac{\tau_W}{\rho} \tag{5-8-25}$$

由高等数学中“上下限含参变数的积分求导”法则[47]，即



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\eta=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\eta)\mathrm{d}\eta = \int_{\eta=y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,\eta)\mathrm{d}\eta + f(x,y_2)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - f(x,y_1)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} \quad (5-8-26)$$

借助于上式，可以这样的去选取 h，使得 h 与 x 无关。因此，如果选取的 h 与 x 无关（这里取 h 为大于δ且与 x 无关的数）时，则可以直接将式（5－8－25）中（对 x 的）偏导号与积分号交换。在这种情况下式式（5－8－25）才可变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(u_e)^2\int_0^h \frac{\overline{u}(u_e-\overline{u})}{u_e^2}\mathrm{d}y\right] + \left(u_e\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\right)\int_0^h\left(\frac{u_e-\overline{u}}{u_e}\right)\mathrm{d}y = \frac{\tau_W}{\rho} \quad (5-8-27)$$

仿照式（5－5－8）、式（5－5－9）与式（5－5－11），定义出湍流流动时平均运动的位移厚度δ^*、动量厚度θ与形状因子 H 为

$$\delta^* = \int_0^h\left(1-\frac{\overline{u}}{u_e}\right)\mathrm{d}y,\qquad \theta = \int_0^h \frac{\overline{u}}{u_e}\left(1-\frac{\overline{u}}{u_e}\right)\mathrm{d}y \quad (5-8-28)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (5-8-29)$$

于是，式（5－8－27）可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_e^2\theta) + \delta^* u_e\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} = \frac{\tau_W}{\rho} \quad (5-8-30)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\tau_W}{\rho u_e^2} - (H+2)\frac{\theta}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} \quad (5-8-30)^*$$

引进壁面摩擦阻力系数 C_f，其定义为

$$C_f \equiv \frac{\tau_W}{\rho u_e^2/2} \quad (5-8-31)$$

有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + (H+2)\frac{\theta}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} = \frac{C_f}{2} \quad (5-8-32)$$

在给定外部势流分布 $u_e(x)$ 的情况下，式（5－8－32）是关于θ、H 与 C_f 三个未知函数的方程。因此还需要再补充两个独立的关系式才能使方程式（5－8－32）可解。一个简单而精确的处理办法是 Head（赫德）方法。Head 方法从式（5－8－32）出发，提出了两个补充关系：

① 采用 Ludwieg（路德维格）和 Tillman（梯尔曼）的湍流表面摩擦系数公式决定 C_f 值，

即

$$C_f = 0.246\times10^{-0.678H}(Re_\theta)^{-0.268} \tag{5-8-33}$$

其中 $Re_\theta \equiv \dfrac{U_e\theta\rho}{\mu}$。

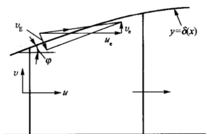


图 5.7　裹入速度 v_E 的定义

② 他提出了裹入方程，并用如下方法得到了这个方程。如图 5.7 所示，边界层外缘处的速度矢 $\boldsymbol{U}_e$ 可有两种分解：一种是沿 x 与 y 轴方向，将其分解为 u_e 与 v_e 两个分速度；另一种是按与外缘平行与垂直时两个方向的分解，因此后一个分量 v_E 便决定着边界层厚度增长的快慢，因此称 v_E 为裹入速度。因 $\int_0^\delta u\mathrm{d}y$ 表示流过 $y=0$ 到 $y=\delta$ 之间的容积流率，因此沿着流动方向增加 $\mathrm{d}x$ 距离时容积流率的增量 $\mathrm{d}\int_0^\delta u\mathrm{d}y$ 应等于由外缘流入的流率 $v_E(\mathrm{d}x/\cos\varphi)\approx v_E\mathrm{d}x$，故有

$$\overline{v}_E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \overline{u}\mathrm{d}y \tag{5-8-34}$$

借助式（5-8-29），上式可改写为

$$\overline{v}_E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \overline{u}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u_e\left(\delta-\delta^*\right)\right] \tag{5-8-35}$$

引进量纲为 1 裹入速度 $\overline{v}_E/u_e$，Head 认为它仅是形状因子 H_1 的函数，即

$$\frac{\overline{v}_E}{u_e} = f(H_1) \tag{5-8-36}$$

其中 H_1 的定义为

$$H_1 \equiv \frac{\delta-\delta^*}{\theta} \tag{5-8-37}$$

Head 还假设 H_1 仅仅是 H 的函数，其表达式为 $G(H)$。这里函数 $f(H_1)$ 与 $G(H)$ 的具体表达式是

$$\begin{cases} f(H_1) = 0.030\,6(H_1-3.0)^{-0.6169} \\ H_1 = G(H) = \begin{cases} 0.823\,4(H-1.1)^{-1.287}+3.3 & (H\leqslant1.6) \\ 1.550\,1(H-0.677\,8)^{-3.064}+3.3 & (H>1.6) \end{cases} \end{cases} \tag{5-8-38}$$

借助于式（5-8-35）以及 H_1 的定义，式（5-8-36）变为



$$\frac{d(u_e\theta H_1)}{dx}=u_e f(H_1) \tag{5-8-39}$$

因此，一旦给定了外部势流的速度分布 $u_e(x)$，则式（5－8－32）、式（5－8－33）、式（5－8－39）、式（5－8－38）连同边界条件，便构成了包含两个常微分方程和一个代数方程的封闭方程组。显然，这种处理方法使用简便，且有一定精度，所以在工程实践中获得了较广泛的应用。

另外，对于可压缩湍流流动，Green（格林）发展的延迟裹入法[81]以及 East（易斯特）的解边界层问题的逆方法[82]都是较为成功的方法之一，并且在工程实践中已得到较好的结果[74,83～85]。

§5.9　湍流模型基础

对于湍流流动，通常是将 N–S 方程取时间平均（或 Favre 平均），然而这时所得到的方程组并不封闭。为了求解上述得到的时均化方程组，还必须去找出足够的关系式，以便使方程组在数学上封闭，于是就提出了建立所谓的湍流模型问题。换句话说，湍流模型就是建立脉动关联量与平均量之间的相互关联关系，也就是建立高阶关联量与低阶关联量之间的关系，使湍流平均运动的方程组能够封闭。

5.9.1　一阶封闭模型（零方程模型）

湍流时均化的方程组与层流方程组在本质上的区别是，湍流时均化方程组中含有脉动量的二阶相关项 $\overline{u_i'u_j'}$ 和 $\overline{u_i'T'}$；湍流模型的核心就是寻找这些二阶相关量的表达关系式。所谓一阶封闭模型从实质上讲，就是假设这些二阶相关量只是时均量的函数，也就是说，用简单的代数式去描述它们之间的函数关系式，从而达到使方程组封闭。正因为一阶封闭方法中不需要建立脉动量的微分方程，因此一阶封闭问题通常称为零（阶微分）方程模型。下面给出零方程模型的三个例子。

1. Boussinesq（布辛涅斯克）的涡粘性系数模型

1877 年，Boussinesq 仿照粘性流动中剪切粘性力与速度梯度成正比的关系，提出了湍流中雷诺应力与时均速度梯度成正比的假定，在二维流动时有

$$\tau^{(t)}=-\rho\overline{u'v'}=\rho\nu_t\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} \tag{5-9-1}$$

式中，ν_t 为湍流运动粘性系数（又称涡粘性系数并常用 ε_m 表示）。

2. 普朗特的混合长度模型

1925 年，普朗特在 Boussinesq 假定的基础上，又进一步提出了湍流涡粘性系数 ν_t 的表达式。他仿照分子运动论中平均自由长度的概念提出了湍流中的涡团混合长度的概念，认为

ν_t可表示为

$$\nu_t = l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \qquad (5-9-2)$$

其中 l 为混合长度[2,4,5,13,24]。于是相应的雷诺应力为

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad (5-9-3)$$

3. 一般形式的涡团粘性系数模型

该模型仿照层流剪切应力张量和应变张量之间的一般关系

$$\frac{\tau_{ij}^{(l)}}{\rho} = \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right) \quad \text{（分子粘性应力）} \qquad (5-9-4)$$

并加以修正，提出了湍流应力张量和时均流应变率张量之间的一般关系为

$$\frac{\tau_{ij}^{(t)}}{\rho} = \nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}K\delta_{ij} \quad \text{（湍流粘性应力）} \qquad (5-9-5)$$

式中，K 为单位质量的湍流动能。而湍流粘性系数 ν_t则可由湍流动能 K 和湍流耗散率ε 来确定，其关系为

$$\nu_t = c_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \qquad (5-9-6a)$$

式中 c_μ由实验测定。在这个模型下，可压缩雷诺平均（Favre 平均）N–S 方程在直角笛卡儿坐标系下可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\right)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i\right)}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\tau_{ij}^{(l)} + \tau_{ij}^{(t)}\right] \\ \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\overline{\rho H}\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left[(k_c + k_t)\dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}\right] + \tilde{u}_i\left[\tau_{ij}^{(l)} + \tau_{ij}^{(t)}\right]\right\} \end{cases} \qquad (5-9-6b)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{\rho}\left(\tilde{e} + \dfrac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i + K\right) & (5-9-7a) \\ \overline{\rho H} = \bar{\rho}\left(\tilde{h} + \dfrac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i + K\right) & (5-9-7b) \end{cases}$$



5.9.2　二阶封闭模型

根据莫尔科文（Morkovin）的理论，当马赫数 $M<5$ 时压缩性对湍流的结构不起重要影响[1]。另外，现在的研究也表明：当 $M<5$ 时，将密度加权的平均方程和不可压缩流动下的雷诺应力模式相结合，可以较好地预测可压缩湍流的平均运动[30]。所以，这里只讨论不可压缩流动时湍流模式的情况。

一、雷诺应力方程的模化

关于 $\overline{u_i'u_j'}$ 的精确方程已由式（5-7-50）给出，现在讨论该式有关项的模化问题。

1. F_{ij} 项的模化

它属于雷诺应力扩散项的一部分。对于扩散项可采用梯度形式进行封闭，即

$$-\overline{u_i'u_j'u_k'}-\overline{\frac{P'}{\rho}\left(u_j'\delta_{ik}+u_i'\delta_{jk}\right)}=C_3\frac{K^2}{\varepsilon}\frac{\partial\left(\overline{u_i'u_j'}\right)}{\partial x_k} \tag{5-9-8}$$

2. 耗散项 ε_{ij} 的模化

考虑到湍流耗散主要发生在小尺度湍流涡团中，因此 ε_{ij} 被模化为

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}=\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{5-9-9}$$

3. 脉动压力–应变率项 Q_{ij} 的模化

按照 Rotta[86]、Launder[87]等人的做法，将 Q_{ij} 项分成两部分，即 $\phi_{ij,1}$ 与 $\phi_{ij,2}$，它们的表达式分别为

$$Q_{ij}=\phi_{ij,1}+\phi_{ij,2} \tag{5-9-10}$$

$$\phi_{ij,1}=-c_1\frac{\varepsilon}{K}\left(\overline{u_i'u_j'}-\frac{2}{3}K\delta_{ij}\right) \tag{5-9-10a}$$

$$\phi_{ij,2}=-c_2\left(P_{ij}-\frac{1}{3}P_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{5-9-10b}$$

为方便起见，引入符号 D_{ij}，即

$$D_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(c_3\frac{K^2}{\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial\left(\overline{u_i'u_j'}\right)}{\partial x_l}\right] \tag{5-9-11}$$

于是，式（5-7-50）经过上述模化之后，变为

$$\frac{\mathrm{d}\left(\overline{u_i'u_j'}\right)}{\mathrm{d}t}=D_{ij}+P_{ij}-\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}-c_1\frac{\varepsilon}{K}\left(\overline{u_i'u_j'}-\frac{2}{3}K\delta_{ij}\right)+c_2\left(P_{ij}-\frac{1}{3}P_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{5-9-12}$$

式中，常数 C_3，C_1 与 C_2 的取值范围一般是 $C_3=0.09\sim0.11$，$C_1=1.5\sim2.2$，$C_2=0.4\sim0.5$。

二、K 方程的模化

对于式（5－9－12），令 $i=j$ 时，方程变为

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(c_3\frac{K^2}{\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial K}{\partial x_l}\right]-\overline{u_i'u_l'}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_l}-\varepsilon \tag{5-9-13}$$

三、耗散率 ε 方程的模化

现在讨论式（5－7－60）的模化问题：

（1）ε 的湍流扩散项应与耗散率 ε 的梯度成正比，即

$$-\overline{\varepsilon u_i'}-\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial P'}{\partial x_j}}=c_4\frac{K^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} \tag{5-9-14}$$

（2）耗散率产生项的模化：产生项有两部分组成，先分析第一部分，即

$$\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_k}\left[\left(\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}}\right)+\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\right)\right]$$

当 $j=k$ 时，借助于连续方程 $\partial\overline{u}_j/\partial x_j=0$，故上式为 0。当 $j\neq k$ 时，注意到 $\left[\left(\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}}\right)+\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\right)\right]$ 为二阶张量，又由于耗散应该是各向同性的，因此该项也应该为 0。再分析第二部分，大多数学者认为[88]该项是个小量，可以忽略。因此，耗散率产生项在作模化时，可以近似认为等于零。

（3）耗散项的模化：对耗散项可以作如下处理[89]

$$-2\nu\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}}-2\nu^2\overline{\left(\frac{\partial^2u_j'}{\partial x_l\partial x_k}\right)^2}=-C_{\varepsilon1}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\overline{u_j'u_l'}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_l}-C_{\varepsilon2}\left(\frac{\varepsilon^2}{K}\right) \tag{5-9-15}$$

将上述结果代到式（5－7－60），于是式（5－7－60）被模化为

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(C_4\frac{K^2}{\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right]-C_{\varepsilon1}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\overline{u_j'u_l'}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_l}-C_{\varepsilon2}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\varepsilon \tag{5-9-16}$$

式中，常数 C_4、$C_{\varepsilon1}$、$C_{\varepsilon2}$ 的取值范围是：$C_4=0.07\sim0.09;C_{\varepsilon1}=1.41\sim1.45;\ C_{\varepsilon2}=1.90\sim1.92$。

四、$\overline{u_i'T'}$ 方程的模化

热流 $\overline{u_i'T'}$ 的精确输运方程，可以采用与推导 $\overline{u_i'u_j'}$ 方程相类似的办法去完成。其推导过程可分三步进行：①用 i 分量的瞬时动量方程减去 i 分量的时均动量方程；将所得的 i 分量的



脉动动量方程再乘以脉动温度 T'；②将瞬时能量方程与时均能量方程相减，得到脉动的能量方程；然后再乘以脉动分速度 u_i'；③将前面得到的两个方程相加后再取时间平均。于是便得到了关于 $\overline{u_i'T'}$ 的精确方程（$\rho = \text{const}$）

$$\frac{D\left(\overline{u_i'T'}\right)}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[-\overline{u_i'u_l'T'}-\delta_{il}\left(\frac{\overline{P'T'}}{\rho}\right)+\alpha\left(\overline{u_i'\frac{\partial T'}{\partial x_l}}\right)+\nu\left(\overline{T'\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}}\right)\right]-\left[\overline{u_i'u_l'}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_l}+\left(\overline{u_l'T'}\right)\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_l}\right]-(\alpha+\nu)\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_l}}\right)+\left(\overline{\frac{P'}{\rho}\frac{\partial T'}{\partial x_i}}\right)+\left(\overline{\phi' u_i'}\right)\frac{1}{\rho C_P} \tag{5-9-17}$$

这里

$$\begin{cases}\dfrac{D\Diamond}{Dt}\equiv\dfrac{\partial\Diamond}{\partial t}+\overline{u}_l\dfrac{\partial\Diamond}{\partial x_l}\\ \phi'\equiv\tau_{ij}'\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j},\tau_{ij}'\equiv\mu\left(\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right),\\ \alpha\equiv\dfrac{k}{\rho C_P}\quad（k\text{ 为热传导系数，}\alpha\text{为导温系数}）\end{cases} \tag{5-9-18}$$

值得注意的是：式（5－9－17）右边共有五项，按其物理意义分别称为：扩散项、产生项（又称源项）、耗散项、压强–温度梯度的相关项和摩擦项。下面对各项进行模化。

1. 扩散项的模化

在扩散项中前两项为湍流扩散项，因此应该用 $\overline{u_i'T'}$ 的梯度进行模化，即

$$-\overline{u_i'u_l'T'}-\delta_{il}\left(\frac{\overline{P'T'}}{\rho}\right)=C_T\left(\frac{K^2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\left(\overline{u_i'T'}\right)}{\partial x_l} \tag{5-9-19}$$

扩散项中的后两项有分子扩散项，考虑到实际应用中的流体大部分可近似认为 $\alpha\approx\nu$，于是

$$\alpha\left(\overline{u_i'\frac{\partial T'}{\partial x_l}}\right)+\nu\left(\overline{T'\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}}\right)=\alpha\frac{\partial\left(\overline{u_i'T'}\right)}{\partial x_l} \tag{5-9-20}$$

2. 耗散项的模化

湍流耗散受到小尺度涡团的控制，具有各向同性。而本项是矢量并且还要满足湍流耗散的各向同性的特性，故该项只能为零。

3. 压强–温度项的模化

该项的模化与雷诺应力方程中压强–应变项的模化相似，其模化为

$$\left(\overline{\frac{P'}{\rho}\frac{\partial T'}{\partial x_i}}\right)=-C_{T1}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\overline{u_i'T'}+C_{T2}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_l}\right)\overline{u_l'T'} \tag{5-9-21}$$

4. 产生项和摩擦项的模化

在一般情况下，摩擦项较其它项相比是一个相对小量，因此该项可以省略不计。另外，产生项的表达式已经符合湍流自变量的选取原则，因此也就不需要模化了。

综上所述，将上面有关模化项代入到式（5-9-17）中，于是便得到模化后的雷诺热流输运方程，即

$$\frac{D\left(\overline{u_i'T'}\right)}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{\left[C_T\left(\frac{K^2}{\varepsilon}\right)+\alpha\right]\frac{\partial\left(\overline{u_i'T'}\right)}{\partial x_l}\right\}-\left[\left(\overline{u_i'u_l'}\right)\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_l}+\left(\overline{u_l'T'}\right)\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_l}\right]-C_{T1}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\overline{u_i'T'}+C_{T2}\left(\overline{u_l'T'}\right)\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_l} \tag{5-9-22}$$

其中 C_T，C_{T1} 与 C_{T2} 为由实验确定的常数，通常选取 $C_T=0.07, C_{T1}=3.20, C_{T2}=0.50$。

参 考 文 献

1 陈懋章. 粘性流体动力学基础. 北京：高等教育出版社，2002
2 周光垌，严宗毅，许世雄，章克本. 流体力学（第二版）. 北京：高等教育出版社，2000
3 清华大学工程力学系. 流体力学基础. 北京：机械工业出版社，1980
4 庄礼贤，尹协远，马晖扬. 流体力学（修订版）. 合肥：中国科学技术大学出版社，1997
5 叶敬棠，柳兆荣，许世雄，吴正. 流体力学. 上海：复旦大学出版社，1989
6 茅春浦. 流体力学. 上海：上海交通大学出版社，1995
7 江宏俊，流体力学. 北京：高等教育出版社，1985
8 吴望一. 流体力学. 北京：北京大学出版社，1982
9 景思睿，张鸣远. 流体力学. 西安，西安交通大学出版社，2001
10 罗惕乾. 流体力学. 北京：机械工业出版社，1999
11 张兆顺，崔桂香. 流体力学. 北京：清华大学出版社，1999
12 王致清，流体力学基础. 北京：高等教育出版社，1987
13 孔珑. 工程流体力学（第二版）. 北京：水利电力出版社，1992
14 郑邦民. 流体力学. 北京：水利电力出版社，1989
15 孔祥海. 流体力学. 上海：上海交通大学出版社. 2000
16 许维德. 流体力学. 北京：国防工业出版社，1989
17 郑洽余，鲁钟琪. 流体力学. 北京：机械工业出版社，1980
18 李翼祺，马素贞. 流体力学基础. 北京：科学出版社，1983
19 余志豪，王彦昌. 流体力学. 北京：气象出版社，1982
20 姜兴华. 流体力学. 西南交通大学出版社，1999
21 张也影. 流体力学（第二版），北京：高等教育出版社，1999
22 王振华. 流体力学的基本理论. 上海：上海大学出版社，2002



23 朱一锟．流体力学基础．北京：北京航空航天大学出版社，1990

24 张亮，李云波．流体力学．哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2001

25 Streeter V L, Wylie E B. Fluid Mechanics (Eighth Edition). New York: McGraw-Hill, 1985

26 Serrin J. Mathematical Principles of classical fluid dynamics. In Handbuch der Physik. 8(1), ed. S.Flugge, Springer-Verlag, 1959

27 Batchelor G K. An introduction to fluid dynamics. London: Cambridge University Press, 1994

28 邢宗文．流体力学基础．西安：西北工业大学出版社，1992

29 是勋刚．湍流．天津：天津大学出版社，1994

30 张兆顺．湍流．北京：国防工业出版社，2002

31 Milne-Thomson L M. Theoretical hydrodynamics (5th ed.). London: Macmillan, 1979

32 Caswell B. Kinematics and stress on a surface of rest. Arch. Rat. Mech. &Anal, 26:385～399, (1967)

33 童秉纲，尹协远，朱克勤．涡运动理论．合肥：中国科学技术大学出版社，1994

34 吴介之，马晖扬，周明德．涡动力学引论．北京：高等教育出版社，1993

35 童秉纲，张炳暄，崔尔杰．非定常流与涡运动．北京：国防工业出版社，1993

36 Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. Phil. Trans. Roy. Soc. London　A186: 123～164,1895

37 Taylor G I. Diffusion by continuous movement. Proc. Royal Society London 2:196,1921

38 Kolmogorov A N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, Dokl. Akad. Nauk SSSR 30:9～13, 1941 (Reprinted in Proc. Royal Soc. Lond. A434:913, 1991)

39 Chou P Y(周培源). On velocity correlations and the solution of equation of turbulent vorticity fluctuations. Quaterly Applied Mathematics, 1(1):38～54, 1945

40 Kline S J, Reynold W C. The structure of turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 30:741,1967

41 Brown F M, Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layer. J. Fluid Mech., 64:775, 1974

42 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmospheric Sciences, 20: 130-141, 1963

43 Orszag S A, Patterson G S. Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. Phys. Review Lett. 28:76, 1972

44 王保国，黄虹宾．叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法．北京：国防工业出版社，2000

45 王保国．N-S 方程组的通用形式及近似因式分解．应用数学和力学，1988，9(2):165-172

46 王保国．跨声速主流与边界层迭代的稳定性分析与数值实验．工程热物理学报，1989，10(4):379～382

47 华罗庚．高等数学引论（第一卷第二分册）．北京：科学出版社，1963

48 王保国，卞荫贵．关于三维 Navier-Stokes 方程的粘性项计算．空气动力学学报，1994，12(4):375～382

49 钱学森．气体动力学诸方程．徐华舫译．北京：科学出版社，1966

50 Schlichting H. Boundary-layer theory. (7th ed.), New York: McGraw-Hill, 1979
51 Matsumura A, Nishida T. The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases. J. Math. Kyoto Univ., 1980. 20:67～104
52 Berker R. Handbuch der Physic. Vol.8, pt.2, Berlin: Springer, 1963
53 White F M. Viscous fluid flow. New York: McGraw-Hill, 1974
54 王竹溪，郭敦仁．特殊函数概论．北京：科学出版社，1965
55 张捷迁，章光华，陈允文．真实流体力学（上册）．北京：清华大学出版社，1986
56 卞荫贵，钟家康．高温边界层传热．北京：科学出版社，1986
57 Shapiro A H. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. New York: The Ronald Press, 1953
58 卞荫贵，徐立功．气动热力学．合肥：中国科学技术大学出版社，1997
59 王补宣．工程传热传质学（上、下册）．北京：科学出版社，1998
60 赵学端，廖其奠．粘性流体力学．北京：机械工业出版社，1983
61 徐文熙，徐文灿．粘性流体力学．北京：北京理工大学出版社，1989
62 Falkner V M, Skan S W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Phil. Mag. 12:865-896(1931); ARC RM 1314(1930)
63 南京工学院，华中工学院，天津大学，重庆大学．粘性流体力学．北京：高等教育出版社，1988
64 卞荫贵．边界层理论（上、下册）．合肥：中国科学技术大学出版社，1979
65 郭永怀．边界层理论讲义．北京：中国科学技术大学，1963
66 Li T Y, Nagamatsu H T. Similar solutions of compressible boundary layer equations. JAS, 22:607～616(1955)
67 Illingworth C R. Steady flow in the laminar boundary layer of a gas. Proc. Roy Soc. A 199:533～558 (1949)
68 Favre A. Equations des gaz turbulents compressibles: 1. Formes Generales, J. Mecanique., 4:361～390 (1965)
69 Hinze J O. Turbulence. New York: McGraw-Hill, 1975
70 Bowen R M, Wang C C. Introduction to vectors ad tensors. Vol.1,2. New York: Plenum Press, 1976
71 Richardson L F. Weather prediction by numerical process.? Cambridge University Press, 1922
72 蔡树棠，刘宇陆．湍流理论．上海：上海交通大学出版社，1993
73 窦国仁．紊流力学．（上、下册）北京：高等教育出版社，1981
74 陈懋章．粘性流体动力学理论及紊流工程计算．北京：北京航空学院出版社，1986
75 陈义良．湍流计算模型．合肥：中国科学技术大学出版社，1991
76 范维澄，陈义良，洪茂玲．计算燃烧学．合肥：安徽科学技术出版社，1987
77 张仲寅，乔志德．粘性流体力学（修订本）．北京：国防工业出版社，1989



78 徐华舫．空气动力学基础（上、下册），北京：国防工业出版社，1980

79 周力行．燃烧理论和化学流体力学．北京：科学出版社，1986

80 吴国钏．附面层理论．北京：航空工业出版社，1989

81 Green J E et al. Prediction of turbulent boundary-layer and wakes in compressible flow by a lag-entrainment method. ARC R&M 3791 (1971)

82 East L F et al. Prediction of the development of separated turbulent boundary-layer by the lag-entrainment method. ARC Paper 37435 (1977)

83 李根深，陈乃兴，强国芳．船用燃气轮机轴流式叶轮机械气动热力学（上、下册）．北京：国防工业出版社，1980

84 华耀南，王保国．The prediction of boundary layers with rotation and variation of stream filament thickness. ASME Paper 89-GT-227, (1989)

85 华耀南，王保国．有旋转效应和流片厚度变化的叶轮机械边界层的积分方程求解方法．工程热物理学报，1988， 9(4):327～330

86 Rotta J. Statistical theory of nonhomogeneous turbulence. Tech. Rep. TWF/TN/38, London: Imperical College, 1951

87 Launder B E, Reece G J and Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. Journal of Fluid Mechanics, 68(3): 537～566, (1975)

88 Ching-Jen Chen（陈景仁）, Shenq-Yuh Jaw. Fundamentals of turbulence modeling. New York: Taylor & Francis, 1998

89 Lumley J L. Toward a turbulent constitutive relation. Journal of Fluid Mechanics, 41(2): 413～434, (1970)

习　题

1. 给定流体运动的速度场$\boldsymbol{V}=(t^3+6t)\boldsymbol{i}+\left(y^2-3z^2-1\right)\boldsymbol{j}-\left(y^2+5yz\right)\boldsymbol{k}$,试计算在点（3，2，6）处$t=3$时如下各值：（1）流体运动的加速度；（2）涡量；（3）胀量。

2. 说明下面这种流动通常总是有旋的：$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=0\end{cases}$，在什么样的特殊情况下此流动无旋？

3. （1）从式（5.2.24）所表达的 N–S 方程组出发，试推导出二维极坐标系（这里ξ^1与ξ^2分别取为r与θ）时$\tilde{M}^i\,(i=1,2)$与$\bar{N}$的具体形式，并与直角笛卡儿坐标系下的 N–S 方程（运动方程分别取沿x方向与y方向）作比较，说明两种形式在运动方程方面的本质区别。

（2）假设流体是无粘的二维流动并遵循$u=u(x,y),v=0$的运动规律，试问：① 在这种情况下，连续性方程能够惟一确定吗？何种情况下连续方程才能确定？② 在这种情况下，动量方程能够惟一确定吗？再补充些什么规律后动量方程才能确定？并分别写出这时动量方程

在极坐标系以及直角笛卡尔坐标系下的形式。③ 在连续方程与动量方程都能确定之后（即①与②都确定了相应方程的形式之后），以热力学第一定律表达的能量方程其具体形式能够惟一确定吗？如果这里流体再进一步假定是完全气体并且服从 Clapeyron（克拉珀龙）方程，问这时能量方程的具体形式能惟一确定吗？为什么？

4. 在两平行平板之间有粘性流体。下平板固定，上平面以速度 U_e=常数沿平行于 x 轴的方向移动。夹在两平行板间的流体完全因粘性而拖动，设这时所导致的流动为二维、定常、不可压缩、层流流动，并忽略彻体力，速度场为

$$u=\frac{U_e}{2}\left(\frac{y}{h}+1\right),\quad v=0$$

而温度场为

$$\frac{T-T_W}{T_e-T_W}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)+\frac{PrE_c}{8}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right],\quad E_c\equiv\frac{U_e^2}{C_P\left(T_e-T_W\right)}$$

式中，T_e 和 T_W 分别为上板和下板的壁温。这里两板间距为 $2h$，Pr 为 Prandtl 数。试求出当熵方程采用下式时，即

$$T\frac{DS}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\frac{\phi}{\rho}$$

式中，右端各项的具体表达形式。讨论在这种粘性流动中熵沿流线的特点（式中 S，$\boldsymbol{q}$ 和 ϕ 分别为熵，热流矢量与耗散函数）。

5. 低雷诺数下的流动是流体力学与气体力学中一个活跃的分支领域，而 Stokes 流是它研究的主要对象。对于不可压缩牛顿流体的低雷诺数定常流动，假设流场中温度变化不大，认为流体粘度 $\mu=\text{const}$，特征雷诺数 Re 很小，流动近似为 Stokes 流动，于是 Stokes 方程组为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0\\ \nabla P=\rho\boldsymbol{f}+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}\end{cases}\tag{*1}$$

式中，$\boldsymbol{f}$ 为单位质量流体所受到的体积力；$P,\boldsymbol{V},\rho$ 分别为压强、速度与密度。

试证明：对于平面、定常、Stokes 流动，当 f=0 时，则 Stokes 流的流函数 ψ 满足双调和方程，即 $\nabla^4\psi=0$（注：$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla,\nabla^4\psi\equiv\nabla\cdot\nabla(\nabla\cdot\nabla\psi)$）。

6. 本题是习题 5 的继续，所研究的对象仍是不可压缩牛顿流体的低雷诺数定常流动问题，流动仍应服从 Stokes 方程组。在三维空间中，考察单个圆球沿 z 轴方向以常速度 U 平移，研究它所导致的无界空间中原来静止粘性流体的运动问题。选取绝对坐标系，并将某一瞬时球心的位置取作绝对坐标系的原点，为便于讨论，可以选用 (r,θ,φ) 球坐标系。显然，该问题的数学提法是：



$$
\begin{cases}
\nabla^4\psi = 0 \\
\text{球面条件（粘附条件）：}\quad v_r = U\cos\theta, v_\theta = -U\sin\theta \\
\text{远场条件（远离球处的流体静止，且压强给定）：}\begin{cases} r\to\infty:\ \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}=0, \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}=0 \\ r\to\infty:\ P=P_\infty \end{cases}
\end{cases} \quad (*2)
$$

试求该问题的 $\psi(r,\theta)$ 、速度 $v_r(r,\theta), v_\theta(r,\theta)$ 以及压强 $P(r,\theta)$ 的分布？（提示：由边界条件的启发，可设 $\psi(r,\theta)=F(r)\sin^2\theta$ ，这里 $F(r)$ 是待定的函数）。

7. 试证明：在薄剪切层的近似条件下，x 方向的薄剪切层方程（对二维流动）可以改写为

$$
\frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} \quad (*3)
$$

式中，S 为平均流线。

8. 假定平板边界层的速度分布为 $\dfrac{u}{u_e}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{\delta}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^3$ ，这里 δ 为边界层厚度，试计算 δ^*,θ 以及形状因子 H 的值。

9. 不可压缩流体绕二维翼型作定常流动，设边界层外缘的速度分布可近似表示为

$$
u_e = C_0 - C_1 x \qquad (C_0>0, C_1>0)
$$

式中，x 是沿翼型表面的边界层坐标。试写出决定边界层内速度分布的常微分方程，并说明此方程如何求解？

10. 对于不可压缩流体的定常层流热边界层，设 u_e 与 T_e 分别为边界层外缘的速度和温度，T_W 为物面温度，试问 u_e 和 T_W-T_e 分别为 x 的何种函数时，边界层的动量方程和能量方程有相似性解？又问在这种情况下的相似变量是什么？

11. 用现代数值方法（最好用高精度的格式）在计算机上完成式（5－5－40）的数值解并作出沿平板垂直方向速度剖面的分布曲线。

12. 不可压缩流体零攻角绕平板作定常流动，在板面上形成层流边界层。设边界层内的速度分布为

$$
u=(3y\delta^2-y^3)u_\infty
$$

式中，u_∞ 为无穷远均匀来流速度；$\delta(x)$ 为待定的边界层厚度；x 与 y 分别为平行与垂直于板面的边界层坐标。试用动量积分关系式方法确定边界层厚度 $\delta(x)$ 的分布。

13. 在上题所讨论的流动中，如果板面形成的是不可压缩湍流边界层。假设边界层外缘速度分布 $u_e(x)=\text{const}$，并且假定形状因子 H 始终取为 2 时，试计算这种特殊情况下边界层的动量厚度θ以及摩擦阻力系数 c_f 的值。

14. 为了计算高 M_e 时的热交换率问题，经常不采用 Pr=1 的假设而采用相对较精确估计的温度恢复因子γ值，例如：对于层流，可以取$\gamma\approx\sqrt{Pr}$；对于湍流，可以选取$\gamma\approx\sqrt[3]{Pr}$；试完成如下几个小问题的有关证明。

（1）由边界层外缘速度 u_e，绝热壁面温度 T_{aW} 与温度恢复因子γ间的关系式

$$T_{aW}=T_e+\gamma\frac{u_e^2}{2c_P} \tag{*4}$$

出发（T_e 为边界层外缘温度，c_P 为定压比热容），试问在什么样的近似条件下可以得到层流边界层内任一点温度 T，其值为

$$T=T_W+(T_{aW}-T_W)\frac{u}{u_e}-\gamma\frac{u^2}{2c_P} \tag{*5}$$

（2）对于湍流边界层，由平均温度$\bar{T}$，平均速度$\bar{u}$以及温度恢复因子γ间的如下关系式

$$\bar{T}=T_W+(T_{aW}-T_W)\frac{\bar{u}}{u_e}-\gamma\frac{(\bar{u})^2}{2c_P} \tag{*6}$$

出发，试证明：

$$\frac{\bar{T}}{T_W}=1+\left[\left(1+\gamma\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)\frac{T_e}{T_W}-1\right]\frac{\bar{u}}{u_e}-\gamma\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\frac{T_e}{T_W}\frac{(\bar{u})^2}{u_e} \tag{*7}$$

成立。

15. 由于流体的重力场作用产生了压力差，继而产生密度差形成浮力。具有浮力项的 N-S 方程组可以表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}=0\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}-\beta g_i\nabla T+\nu\nabla^2u_i\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\nabla\cdot(k\nabla T)+\dfrac{1}{\rho c_P}\tau_{ij}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\end{cases} \tag{*8}$$

取雷诺时均后有



$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i}=0 \\
\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}-\beta g_i \nabla \overline{T}+\nu \nabla^2 \overline{u}_i-\dfrac{\partial\left(\overline{u_i' u_j'}\right)}{\partial x_j} \\
\dfrac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}t}=\nabla\cdot\left(k\nabla \overline{T}\right)+\dfrac{1}{\rho c_P}\left[\overline{\tau_{ij}'\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j}}+\overline{\tau}_{ij}\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right]-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i' T'}\right)
\end{cases}
\tag{*9}
$$

式中， $g_i=0(i=1,2)$， $g_3=-g$, 这里 g 为重力加速度； $\nu=\mu/\rho$。试推出与方程组（*8）相对应的雷诺应力 $\overline{u_i' u_j'}$ 方程以及湍流脉动动能 K 方程，这里 $K\equiv\dfrac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$。

第6章　二维及三维亚声速定常流动

§6.1　流函数方程及势函数方程

6.1.1　二维、定常、有旋、非等熵流动的流函数方程

一、有粘、有旋、非等熵、二维定常流动的流函数方程

现在推导完全气体的二维、定常、有旋、非等熵、有粘时的流函数方程。取直角笛卡儿坐标系，u 与 v 分别为速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 沿 x 与 y 方向的分速度。引进流函数 ψ，使其满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=\rho u, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x}=-\rho v \tag{6-1-1}$$

由运动方程式（1－3－22），即

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=T\nabla S-\nabla H+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi} \tag{6-1-2}$$

式中，S、H 与 $\boldsymbol{\Pi}$ 分别表示单位质量气体所具有的熵、总焓与粘性应力张量。对于二维、定常、完全气体的二维流动，则上式变为

$$\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{i}+\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\left(T\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{k1}}{\partial x_k}\right)+\boldsymbol{j}\left(T\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{k2}}{\partial x_k}\right)\quad (k=1,2) \tag{6-1-3}$$

式中，τ_{ij} 为粘性应力张量 Π 的（协变）分量。

于是，$\boldsymbol{j}$ 方向的运动方程为

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{u}\left(T\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{k2}}{\partial x_k}\right)\ \text{（注意对 } k \text{ 作和，} k=1，2\text{）} \tag{6-1-4}^*$$

将式（6－1－4）*的右端项记作 b_3，于是上式可写为

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=b_3 \tag{6-1-4}$$



将式（1－5－23）用于完全气体，可得到

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x^i}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial h}{\partial x^i}-\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial x^i} \tag{6-1-5}$$

注意到 $h=H-\frac{1}{2}(V)^2$，并注意使用式（6－1－1），可得到

$$h=H-\frac{1}{2\rho^2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{6-1-6}$$

将上式对 x^i 求偏导，并注意使用式（6－1－5），于是得到

$$\frac{\partial h}{\partial x^i}=\frac{a^2}{a^2-(V)^2}\left\{\frac{1}{\rho}\left(v\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x}-u\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial y}\right)+\left[\frac{\partial H}{\partial x^i}-(V)^2\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial x^i}\right]\right\} \tag{6-1-7}$$

由式（6－1－1）求出 u，然后将 u 对 y 求偏导并注意使用式（6－1－5）与式（6－1－7），得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{a^2-v^2}{\rho(a^2-V^2)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-\frac{uv}{\rho(a^2-V^2)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}-b_1 \tag{6-1-8}$$

由式（6－1－1）求出 v，然后将 v 对 x 求偏导并注意使用式（6－1－5）与式（6－1－7），得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{uv}{\rho(a^2-V^2)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}-\frac{a^2-u^2}{\rho(a^2-V^2)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-b_2 \tag{6-1-9}$$

这里式（6－1－8）与式（6－1－9）中的 b_1 与 b_2 定义为

$$\begin{cases} b_i=(-1)^i\left[u_i\frac{\partial(\frac{S}{R})}{\partial x^i}-\frac{u_i}{a^2-V^2}\left(\frac{\partial H}{\partial x^i}-V^2\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial x^i}\right)\right] \\ u_1=u \qquad \text{（注意这里不对 } i \text{ 作和）} \\ u_2=v \end{cases} \tag{6-1-10}$$

于是，将式（6－1－8）与式（6－1－9）代入到式（6－1－4）便得到

$$\left(a^2-u^2\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-2uv\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}+\left(a^2-v^2\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\rho\left(a^2-V^2\right)\left(b_1+b_2+b_3\right) \tag{6-1-11}$$

式中，a 为当地声速。

借助于式（5－3－24b），于是式（6－1－11）的判别式为

$$B^2-4AC=4a^2\left(V^2-a^2\right) \tag{6-1-12}$$

当亚声速流动时，判别式 $B^2-4AC<0$，表明方程式（6－1－11）属于二阶拟线性椭圆型偏微分方程。另外，由式（6－1－1）及 $V^2=u^2+v^2$，可得到密流 ρV 的表达式为

$$\rho V=\sqrt{(\nabla\psi)\cdot(\nabla\psi)} \tag{6-1-13}$$

式中，$\nabla\psi$ 代表流函数 ψ 的梯度。

下面讨论非等熵流动的情况下，当全流场的流函数 ψ 得到后如何决定密度场与速度场的问题。积分式（1－5－23），可得

$$\frac{\rho}{\rho_1}=\left(\frac{h}{h_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}e^{-\left(\frac{S-S_1}{R}\right)} \tag{6-1-14}$$

式中，下注脚 1 代表任意参考点上的参数。

注意到 $h=H-\frac{1}{2}V^2$，并且令 Σ 与 ϕ 分别为

$$\begin{cases}\Sigma\equiv\left[\left(\frac{h_1}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}e^{\left(\frac{S-S_1}{R}\right)}\right]\frac{\rho}{\rho_1}\\ \phi\equiv\left[\frac{1}{2h_1\rho_1^2}\left(\frac{h_1}{H}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}e^{2\left(\frac{S-S_1}{R}\right)}\right](\nabla\psi)\cdot(\nabla\psi)\end{cases} \tag{6-1-15}$$

于是，式（6－1－14）可整理为

$$\Sigma=\left(1-\frac{\phi}{\Sigma^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{6-1-16}$$

或者

$$\Sigma^{\gamma+1}-\Sigma^2+\phi=0 \tag{6-1-16*}$$

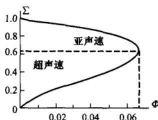


图 6.1　Σ－φ 曲线

显然，任给定一个 ϕ 值，由上式可以得到两个 Σ 值，其中一个对应于亚声速流动，另一个对应于超声速流动，这就是所谓流函数方法中出现密度的双值问题[1-5]。图 6.1 给出了 Σ 与 ϕ 间的关系曲线，文献[6]提出并最早使用这种方法用于亚声速流场的计算。

二、无粘、有旋、定常、二维流动的流函数方程

引进流函数后，连续方程可自动满足。对平面定常运动，旋度 $\boldsymbol{\omega}\equiv\nabla\times\boldsymbol{V}$ 只有一个分量，即 $\omega_z=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$；同时，即使流动是非均熵的，在无粘条件下沿着每条流线的熵值不变（即流动沿流线等熵），因此熵 S 只是 ψ 的函数，$S=S(\psi)$。于是，可以把 Crocco 方程两边的向量沿流线的垂直方向投影，并仅考虑均总焓流动（即 $\nabla H=0$）的情形，则



$$\boldsymbol{n}\cdot[V\times(\nabla\times V)]=-\boldsymbol{n}\cdot(T\nabla S) \tag{6-1-17}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是流线的单位法向量。

对于平面流动，上式可写为

$$V\omega_z=T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}n} \tag{6-1-18}$$

注意到流函数的定义，　　$\mathrm{d}\psi=\rho V\mathrm{d}n,\qquad \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}n=\rho V$

（6-1-19）

因此

$$\omega=\omega_z=\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\psi} \tag{6-1-20}$$

另一方面

$$\rho\omega=\rho\frac{\partial v}{\partial x}-\rho\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho u)}{\partial y}-\left(v\frac{\partial\rho}{\partial x}-u\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)=-\psi_{xx}-\psi_{yy}-\left(v\frac{\partial\rho}{\partial x}-u\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) \tag{6-1-21}$$

对于非均熵的有旋流动，$\rho=\rho(P,S)$，于是

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S\frac{\partial P}{\partial x}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_P\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S\frac{\partial P}{\partial y}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_P\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

而由运动方程

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

因此式（6-1-21）可变为

$$\rho\omega_z=-\psi_{xx}-\psi_{yy}+\left[\frac{u^2}{a^2}\psi_{xx}+\frac{v^2}{a^2}\psi_{yy}+\frac{2uv}{a^2}\psi_{xy}\right]+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_P\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\psi}\left(\psi_x^2+\psi_y^2\right) \tag{6-1-22}$$

或者

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{2uv}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\psi}\left[\rho^2T-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_P\left(\psi_x^2+\psi_y^2\right)\right] \tag{6-1-23}$$

对于完全气体，有

$$(\partial\rho/\partial S)_P=-\rho/C_P \tag{6-1-24}$$

所以对完全气体有

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{2uv}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\psi}\left[\frac{1}{C_P}\left(\psi_x^2+\psi_y^2\right)+T\rho^2\right] \tag{6-1-25}$$

这就是完全气体、平面、定常、无粘、有旋运动的流函数主方程。需要特别指出的是：该方程右边含有熵的梯度项，而熵的梯度值对于亚声速流来讲取决于边界条件（例如进口边界上熵的分布等）；对于跨声速和超声速流动，熵的梯度除与边界条件有关外，还与强间断的形状有关。

6.1.2 S_1 与 S_2 流面上的流函数主方程

为了求解三维流动问题，早在 20 世纪 50 年代初期吴仲华[1, 6]就提出了将三维问题化为两个沿 S_1 和 S_2 流面（如图 6.2 所示）的二维流动问题进行求解的思想。他的这一方法得到了国

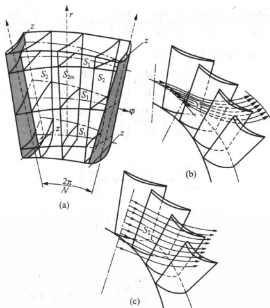


图 6.2 S_1 与 S_2 流面

内外学术界的认可与采纳。本节仅讨论这些流面中最简单的一种，即假定流面是任意回转的 S_1 流面并且假设流片厚度为 1 的特殊情况。假设流动是定常、绝热、无粘的，气体为完全气体，服从 Clapeyron 方程，于是基本方程组为

连续方程
$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{6-1-26}$$

运动方程
$$\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla H-T\nabla S \tag{6-1-27}$$



能量方程

$$V\cdot\nabla H=0 \tag{6-1-28}$$

设回转面母线的参数方程为

$$r=r(m),z=z(m) \tag{6-1-29}$$

式中，m 为母线的弧长。

在这个流面上，选取半测地坐标系 (x^1,x^2,x^3)，其中 x^1 与 x^2 张在该流面上。在这个坐标系下，连续方程式（6－1－26）变为

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{a}\rho\tau v^1\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{a}\rho\tau v^2\right)=0 \tag{6-1-30}$$

式中，τ 为流片厚度；a 为由度量张量所组成的 Jacobian 行列式；v^1 与 v^2 为速度矢量 V 的逆变分速度。

运动方程式（6－1－27）变为

$$e^1v^2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1}-\frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right)-e^2v^1\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1}-\frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right)=e^1\left(\frac{\partial H}{\partial x^1}-T\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)+e^2\left(\frac{\partial H}{\partial x^2}-T\frac{\partial S}{\partial x^2}\right) \tag{6-1-31}$$

将上式两边点乘 e_2 便得到

$$\frac{\partial v_1}{\partial x^2}-\frac{\partial v_2}{\partial x^1}=\frac{1}{v^1}\left(\frac{\partial H}{\partial x^2}-T\frac{\partial S}{\partial x^2}\right) \tag{6-1-32}$$

注意到

$$\begin{cases}v_1=v^1a_{11}+v^2a_{12}\\ v_2=v^1a_{12}+v^2a_{22}\end{cases} \tag{6-1-33}$$

于是式（6－1－32）变为

$$\frac{\partial\left(v^1a_{11}+v^2a_{12}\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial\left(v^1a_{12}+v^2a_{22}\right)}{\partial x^1}=b^* \tag{6-1-34}$$

这里 b^* 代表式（6－1－32）右端项。由（6－1－30）式引进流函数 ψ，使其满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^2}=\sqrt{a}\rho\tau v^1,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x^1}=-\sqrt{a}\rho\tau v^2 \tag{6-1-35}$$

将式（6－1－35）代到式（6－1－34）后，得

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{a_{11}}{\rho\tau\sqrt{a}}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}-\frac{a_{12}}{\rho\tau\sqrt{a}}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right]-\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{a_{12}}{\rho\tau\sqrt{a}}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}-\frac{a_{22}}{\rho\tau\sqrt{a}}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right]=b^* \tag{6-1-36}$$

这就是定常、无粘、坐标系取在流面上的流函数主方程，它是一个二阶的偏微分方程。作为特例，我们讨论坐标系 $x^1=m$，$x^2=\varphi$ 时，式（6－1－36）的具体表达式。由张量分析基础知识知道，a_{ij} 可由下式确定

$$a_{\alpha\beta}=\frac{\partial r}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial r}{\partial x^{\beta}}+r^{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial z}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial z}{\partial x^{\beta}} \tag{6-1-37}$$

这里 (r,φ,z) 为圆柱坐标系，注意到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial x^{1}}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}m}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^{1}}=0, & \dfrac{\partial z}{\partial x^{1}}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}m},\\ \dfrac{\partial r}{\partial x^{2}}=0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^{2}}=1, & \dfrac{\partial z}{\partial x^{2}}=0\end{cases} \tag{6-1-38}$$

于是，由式（6－1－37）得到

$$\begin{cases}a_{11}=1,\quad a_{12}=0,\quad a_{21}=0,\quad a_{22}=r^{2}\\ a=a_{11}a_{22}-(a_{12})^{2}=r^{2}\end{cases} \tag{6-1-39}$$

将式（6－1－39）代入到式（6－1－36），便有

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{r}{\rho\tau}\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho\tau r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)=b^{*} \tag{6-1-40}$$

这正是文献[1]在20世纪50年代所得到的结果。

6.1.3 三维定常与非定常速度势函数主方程

一、等熵、定常、无粘流动的两个基本方程

下面首先推导等熵、定常、无粘流动的两个基本方程。在定常、无粘情况下，运动方程为

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{6-1-41}$$

在定常、绝热情况下（沿流线）能量方程为

$$h+\frac{V^{2}}{2}=h_{\infty}+\frac{V_{\infty}^{2}}{2} \tag{6-1-42}$$

另外，在等熵流动中，声速的关系式为

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}=a^{2}\ （沿流线） \tag{6-1-43}$$

从式（6－1－41）和式（6－1－43）得

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)\nabla\rho=-\frac{a^{2}}{\rho}\nabla\rho$$

将上式两边点乘 $\boldsymbol{V}$，得



$$\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{a^2}{\rho}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho \tag{6-1-44}$$

注意到

$$\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}\cdot\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})\right]=(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

于是式（6－1－44）变为

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{a^2}{\rho}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho \tag{6-1-45}$$

注意到连续方程式（6－1－26）可变为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho \tag{6-1-46}$$

于是从上面两式中消去$\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\rho$，即得到定常、无粘、等熵流动下的基本方程之一（也可认为是连续方程的另一种表达形式）

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\left(\frac{V^2}{2}\right)=a^2\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{6-1-47}$$

式中，a 为当地声速。

这个方程适用于完全气体，它具有很大的通用性。基本方程之二可由能量方程式（6－1－42）在完全气体的条件下得到，即

$$a^2=a_\infty^2+\frac{\gamma-1}{2}\left(V_\infty^2-V^2\right) \tag{6-1-48}$$

这个方程也可以认为是能量方程的另一种表达形式。在直角坐标系下，令 $V^2=u^2+v^2+w^2$，则式（6－1－47）可写为

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial w}{\partial z}-\\&\frac{uv}{a^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{vw}{a^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{wu}{a^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0\end{aligned} \tag{6-1-49}$$

二、定常流动的速度势主方程

如果气体作无旋运动，则引进势函数 φ，使其满足

$$\boldsymbol{V}=\nabla\varphi \tag{6-1-50}$$

于是式（6－1－40）与式（6－1－39）可改写为

$$\left(1-\frac{\varphi_x^2}{a^2}\right)\varphi_{xx}+\left(1-\frac{\varphi_y^2}{a^2}\right)\varphi_{yy}+\left(1-\frac{\varphi_z^2}{a^2}\right)\varphi_{zz}-2\left(\frac{\varphi_x\varphi_y}{a^2}\varphi_{xy}+\frac{\varphi_y\varphi_z}{a^2}\varphi_{yz}+\frac{\varphi_z\varphi_x}{a^2}\varphi_{zx}\right)=0 \quad (6-1-51)$$

$$a^2=a_\infty^2+\frac{\gamma-1}{2}\left[V_\infty^2-\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)\right] \quad (6-1-52)$$

显然，式（6－1－51）是关于全速度势 φ 的二阶非线性偏微分方程。在亚声速流动时，利用中心差分格式可以较方便地得到该方程的三维数值解[7-12]，这里不再介绍。

三、非定常流动的速度势主方程

对于无粘、绝热的等熵势流，由流体力学基础知识知道，存在着 Bernoulli 积分（当略去重力时），即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}=f(t) \quad (6-1-53)$$

在等熵、定比热情况下，引进压强与密度间的关系（又称绝热关系）

$$P=C\rho^\gamma \quad (6-1-54)$$

于是

$$\tilde{P}\equiv\int\frac{\mathrm{d}P}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}=\frac{a^2}{\gamma-1} \quad (6-1-55)$$

将连续方程中的 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 项用速度势表示后为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla^2\varphi=0 \quad (6-1-56)$$

引进 $\tilde{P}$ 消去式（6－1－56）中的密度项，得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}t}+(\gamma-1)\tilde{P}\nabla^2\varphi=0 \quad (6-1-57)$$

式中，$\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla$ 为拉氏算子。

在 $f(t)=\text{const}$ 的假定下，由式（6－1－53）与式（6－1－57）中消去 $\tilde{P}$ 并将得到的方程整理为波动方程的形式，即

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\right]+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot\nabla\left[(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\right]\right\} \quad (6-1-58)$$

又借助于式（6－1－55），则式（6－1－53）可改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)+\frac{a^2}{\gamma-1}=f(t) \quad (6-1-59)$$

于是由上面两式消去声速 a 便可以得到仅含有速度势 φ 的偏微分方程。另外，考虑到远前方均匀来流条件，则式（6－1－53）可改写为



$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_\infty}{\rho_\infty}+\frac{1}{2}V_\infty^2 \tag{6-1-60}$$

借助于式（6－1－54），上式又可整理为

$$1-\frac{(V)^2}{V_\infty^2}-\frac{2}{V_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M_\infty^2}\left[\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right] \tag{6-1-61}$$

由压强系数（又称压力系数）C_P 的定义

$$C_P\equiv\frac{P-P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}=\frac{2(P-P_\infty)}{\gamma P_\infty M_\infty^2} \tag{6-1-62}$$

将式（6－1－61）代入到式（6－1－62）以便消去 P 项，得

$$C_P=\frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left\{\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2-\frac{2}{V_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right\} \tag{6-1-63}$$

由式（6－1－61）还可以得到压强 P 的表达式，即

$$P=P_\infty\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2-\frac{2}{V_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{6-1-64}$$

显然，对于定常流动，则式（6－1－58）便简化为式（6－1－47）；相应地将式（6－1－58）在定常二维流动下展开便得到式（6－1－49）。与此同时，在定常流动下式（6－1－63）与式（6－1－64）分别被简化为

$$C_P=\frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left\{\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right\} \tag{6-1-65}$$

$$P=P_\infty\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{6-1-66}$$

以上推导出在势流条件下的精确关系式。下面介绍小扰动的线性理论，它虽是简单近似，但十分有意义，尤其有助于对可压缩气体绕流特点的认识。

§ 6.2 小扰动线化理论

6.2.1 亚、跨、超声速流动的小扰动方程

设有均匀来流绕过一个细长物体的流动。我们可以选择这样的直角坐标系，使 x 轴与 V_∞ 方向一致，于是均匀流场的速度在 x,y,z 三个方向的分速为

$$u = V_\infty + u', \quad v = v', \quad w = w' \tag{6-2-1}$$

这里 u',v' 与 w' 称为扰动速度分量。令 $\boldsymbol{V} \equiv u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{V}' = u'\boldsymbol{i} + v'\boldsymbol{j} + w'\boldsymbol{k}$，于是

$$\boldsymbol{V} = V_\infty \boldsymbol{i} + \boldsymbol{V}' \tag{6-2-2}$$

将式（6-2-2）代入到式（6-1-40）与式（6-1-39），得

$$\left[(V_\infty \boldsymbol{i} + \boldsymbol{V}')\cdot\nabla\right]\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right) = a^2 \nabla\cdot(V_\infty \boldsymbol{i} + \boldsymbol{V}') \tag{6-2-3}$$

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\left[2V_\infty u' + (u')^2 + (v')^2 + (w')^2\right] \tag{6-2-4}$$

对于一般的亚声速或者 $M_\infty \leqslant 3$ 的超声速流动，如果取 M_∞ 是 1 的数量级，而且 $\left|1 - M_\infty^2\right|$ 不作小量对待时，则

$$\frac{|\boldsymbol{V}'|}{V_\infty} \ll 1, \frac{|\boldsymbol{V}'|}{a} \ll 1, \qquad \frac{u'}{V_\infty} \ll 1, \cdots \tag{6-2-5a}$$

并且

$$\left|\frac{\partial u'}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial v'}{\partial x}\right|, \cdots, \left|\frac{\partial w'}{\partial z}\right| \ll \frac{V_\infty}{L} \tag{6-2-5b}$$

于是可将式（6-2-3）整理为下列形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}' - M_\infty^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = M_\infty^2 \text{［二阶或二阶以上的非线性小量项］} \tag{6-2-6}$$

若略去上式中的二阶以上小量的话，则上式简化为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}' - M_\infty^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad 或 \quad (1 - M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{6-2-7}$$

对于无旋流动，存在着速度势 ϕ，同时可以定义扰动势 φ，它们之间的关系为

$$\phi = V_\infty x + \varphi \tag{6-2-8}$$

这里

$$\boldsymbol{V}' = \nabla\varphi, \quad u' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{6-2-9}$$

将它们代到式（6-2-7），得到扰动势 φ 所满足的方程，即



$$\nabla^2\varphi - M_\infty^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \quad 或 \quad (1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{6-2-10}$$

对于亚声速流，$M_\infty<1$，令 $\beta^2=1-M_\infty^2$，则上式可写为

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{6-2-11}$$

显然，该方程是一个线性的二阶椭圆型偏微分方程。对于一般超声速（例如 $1.3<M_\infty\leqslant 3$）的流动，令 $B^2=M_\infty^2-1$，则式（6-2-10）变为

$$B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{6-2-12}$$

这是双曲型的线性二阶偏微分方程。现在讨论跨声速流动的小扰动简化问题。所谓跨声速流动是指流场中既存在亚声速区又存在超声速区的流动，相应的方程类型是混合型的，即在亚声速区属椭圆型，而在超声速区属于双曲型。对于跨声速流动问题，在薄物体小攻角的条件下，$|1-M_\infty^2|$ 可认为是小量，可以证明，$|1-M_\infty^2|$ 与 $|(\gamma+1)M_\infty^2u'/V_\infty|$ 的量级相当。为此，考察 $(1-M^2)$ 这个量（这里 M 是流场中任一点的马赫数），借助于（6-2-2）与（6-2-4）式，有

$$\begin{aligned}1-M^2&=1-\frac{V^2}{a^2}=1-\frac{V_\infty^2+2u'V_\infty+(u')^2+(v')^2+(w')^2}{a_\infty^2-\frac{\gamma-1}{2}\left[2u'V_\infty+(u')^2+(v')^2+(w')^2\right]}\\&=1-M_\infty^2-(\gamma+1)M_\infty^2\frac{u'}{V_\infty}+\cdots\end{aligned}$$

当省略二阶以上小量时，则有

$$1-M^2\approx 1-M_\infty^2-(\gamma+1)M_\infty^2\frac{u'}{V_\infty} \tag{6-2-13}$$

由于跨声速流动时，在亚声速区 $1-M^2>0$ 而超声速区 $1-M^2<0$，于是相应的式（6-2-13）右端项可以是正的，也可以为负，这说明 $|1-M_\infty^2|$ 与 $\left|(\gamma+1)M_\infty^2\dfrac{u'}{V_\infty}\right|$ 的量级相当。因此，可以借助于小扰动条件，重新将式（6-2-3）整理，并省略高阶小量，得

$$\begin{aligned}&\left[1-M_\infty^2-(\gamma+1)M_\infty^2\frac{u'}{V_\infty}\right]\frac{\partial u'}{\partial x}+\left[1-(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{V_\infty}\right]\frac{\partial v'}{\partial y}+\left[1-(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{V_\infty}\right]\frac{\partial w'}{\partial z}\\&=M_\infty^2\left[\frac{v'}{V_\infty}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\frac{w'}{V_\infty}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)\right]\end{aligned} \tag{6-2-14}$$

按照文献[13，14]分析后所指出的，上式$(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{V_\infty}$项以及式（6-2-14）右端项均可省略，这样式（6-2-14）经省略简化后变成

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=(\gamma+1)\frac{M_\infty^2}{V_\infty}u'\frac{\partial u'}{\partial x} \tag{6-2-15}$$

对于无旋流动，则小扰动跨声速流动的扰动势方程为

$$\left(1-M_\infty^2-\frac{\gamma+1}{V_\infty}M_\infty^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{6-2-16}$$

可以看出，小扰动跨声速流的扰动势方程仍然是非线性的。

6.2.2 线化的物面边界条件及线化压力系数

1. 线化边界条件

假设物体的表面方程为$z=f(x,y)$，即

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0 \tag{6-2-17}$$

于是物面边界条件是：在壁面上，流动方向应与物体表面相切，即$\boldsymbol{V}\cdot\nabla F=0$，将式（6-2-2）代入，便有

$$(V_\infty+u')\frac{\partial F}{\partial x}+v'\frac{\partial F}{\partial y}+w'\frac{\partial F}{\partial z}=-\left[(V_\infty+u')\frac{\partial f}{\partial x}+v'\frac{\partial f}{\partial y}-w'\right]=0 \tag{6-2-18}$$

注意到在小扰动条件下，u'/V_∞与$v'/V_\infty<<1$，对于平薄型机翼（设x为弦向，y为展向）则有$\partial f/\partial x$与$\partial f/\partial y<<1$，于是略去二阶小量后式（6-2-18）变为

$$w'(x,y,z)\Big|_{物面}\approx V_\infty\frac{\partial f}{\partial x} \tag{6-2-19}$$

对于平面二维问题，设薄翼型面方程为$y=h(x)$，因此物面绕流条件为

$$\frac{v[x,h(x)]}{u[x,h(x)]}=\frac{v'[x,h(x)]}{V_\infty+u'[x,h(x)]}=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{6-2-20}$$

考虑小扰动条件后，上式变为

$$\frac{v'(x,h)}{V_\infty+u'(x,h)}\approx\frac{v'(x,0)}{V_\infty}=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{6-2-21}$$

式（6-2-21）常称为线化边界条件。

2. 线化压力系数

由流场内任一点处的压力系数C_p定义，



$$C_P \equiv \frac{P-P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{P}{P_\infty}-1\right) \tag{6-2-22}$$

由定常流的能量方程以及等熵关系可得

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{a^2}{a_\infty^2} = 1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left[1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2\right] = \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{6-2-23}$$

于是

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{V^2}{V_\infty^2}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{6-2-24}$$

将上式代到式（6-2-22）便有

$$C_P = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left\{\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{V^2}{V_\infty^2}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right\}$$

将上式方括号（或称中括号）内的项作二项式级数展开，略去$\left(1-\frac{V^2}{V_\infty^2}\right)$的三次方及三次方以上项之后得到

$$C_P \approx \left(1-\frac{V^2}{V_\infty^2}\right)+\frac{M_\infty^2}{4}\left(1-\frac{V^2}{V_\infty^2}\right)^2 \approx -\frac{2u'}{V_\infty}+\left(M_\infty^2-1\right)\left(\frac{u'}{V_\infty}\right)^2-\left(\frac{v'}{V_\infty}\right)^2-\left(\frac{w'}{V_\infty}\right)^2+\cdots$$

略去上式中的二阶以上小量后，得

$$C_P \approx -\frac{2u'}{V_\infty} \tag{6-2-25}$$

这就是定常、无粘、均能流在小扰动假设下的压力系数近似公式，它可用于全场内的任意一点。该式常称为压力系数的线化公式。另外，由于扰动很小，所以流场中任意点处的压强 P 与来流压强 P_∞ 之差很小，因此作为一级近似，则有

$$\mathrm{d}P = -\rho\,\mathrm{d}\left(\frac{V^2}{2}\right) \approx P-P_\infty \tag{6-2-26}$$

将式（6-2-2）以及 $\rho=\rho_\infty+\rho'$ 代入到上式，即

$$P-P_\infty = -(\rho_\infty+\rho')\left\{V_\infty u'+\frac{1}{2}\left[(u')^2+(v')^2+(w')^2\right]\right\}$$

省略上式等号右边的二阶以上小量，便有

$$P-P_\infty = -\rho_\infty V_\infty u' \tag{6-2-27}$$

将上式代到式（6－2－22）中也可得到式（6－2－25）。

§6.3　沿波形壁流动的二维精确解

6.3.1　亚声速流动

设波形壁的形状为　$y=\varepsilon\cos\left(\dfrac{2\pi x}{l}\right)$　（6－3－1）

式中，ε 为波形壁波幅；l 为波长并且 $\varepsilon \ll l$（如图 6.3 所示）。

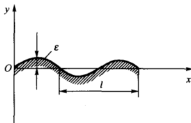


图 6.3　波形壁的几何形状

由于 $\varepsilon \ll l$，故壁面对气流的扰动是很小的，可以按小扰动处理。假设流动是无旋的、无粘的亚声速流动，由方程式（6－2－11）、物面条件式（6－2－19）和远场条件，因此可以写出如下的定解问题

$$\begin{cases}\beta^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0}=V_\infty\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\dfrac{2\pi\varepsilon V_\infty}{l}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{l}\right)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{y\to\infty}=0,\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y\to\infty}=0\end{cases}\tag{6-3-2}$$

式（6－3－2）可采用分离变量法进行求解。设解 $\varphi(x,y)$ 为

$$\varphi(x,y)=F(x)G(y)\tag{6-3-3}$$

代入式（6－3－2）得

$$\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{\beta G}=-k^2\tag{6-3-4}$$

由上式可得到两个常微分方程，即

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=-k^2=\text{const}\tag{6-3-5a}$$

$$\frac{G''(y)}{\beta^2G(y)}=k^2=\text{const}\tag{6-3-5b}$$

它们的通解分别为

$$F(x)=A_1\sin kx+A_2\cos kx$$
$$G(y)=B_1\mathrm{e}^{-\beta ky}+B_2\mathrm{e}^{\beta ky}$$



于是由式（6－3－3）得到通解为

$$\varphi(x,y)=(A_1\sin kx+A_2\cos kx)\left(B_1\mathrm{e}^{-\beta ky}+B_2\mathrm{e}^{\beta ky}\right)$$

由远场边界条件，定出 $B_2=0$，将上式对 y 求导数，得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=0}=v'(x,0)=(A_1\sin kx+A_2\cos kx)(-B_1\beta k)$$

将此式与式（6－3－2）中的物面条件比较，定出 $A_2=0,\ k=2\pi/l,\ A_1B_1\beta=\varepsilon V_\infty$，因而式（6－3－2）的解为

$$\varphi(x,y)=\frac{\varepsilon V_\infty}{\beta}\exp\left(-\frac{2\pi\beta}{l}y\right)\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\qquad(6-3-6)$$

于是扰动分速度、压力系数均可得到。下面讨论流线形状。根据流线的定义，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v'}{V_\infty+u'}=\frac{v'}{V_\infty+(1-M_\infty^2)u'+M_\infty^2u'}$$

在小扰动的假设下，如果不讨论高亚声速流动，则上式分母的第三项远小于第二项，故分母的第三项可略去，因此可将上式进行级数展开，并略去二阶小量，可得

$$\mathrm{d}y=\varepsilon d\left[\exp\left(-\frac{2\pi\beta}{l}y\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]$$

将上式积分，并用 $y\to0$ 时的流线与壁面方程相比较，定出积分常数为零。因此流线方程为

$$y=\varepsilon\left[\exp\left(-\frac{2\pi\beta}{l}y\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right]\qquad(6-3-7)$$

上式表明：流线的形状与壁面波形的相位相同，流线的波幅随着离壁面的距离增大而呈指数衰减。当 $y\to\infty$ 时，流线趋于与 x 轴平行，如图 6.4 所示。

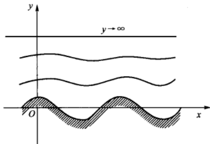


图 6.4 沿波形壁亚声速流动的流线

例 6.1 由于制造上的不准确，在飞机机翼上当地马赫数为 0.7 的区域中存在着一个长 40 mm 与周围高出 $\varepsilon=2$ mm 的小鼓包。如果略去边界层的影响，试估算小鼓包的最大马赫数？如果在小鼓包的最高点上开静压孔测量翼面静压，试问由于小鼓包的存在，造成的静压测量误差是多少？

解 小鼓包上的最大扰动速度，可用壁面上 $(u')_{\max}$ 来计算，于是

$$(u')_{\max}=\frac{V_\infty}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{2\pi\varepsilon}{l}=\frac{V_\infty}{\sqrt{1-0.7^2}}\frac{2\pi\times2}{(40\times2)}=0.22V_\infty$$

而这时 $v'=0$，于是 $V_{\max}=V_\infty+(u')_{\max}=1.22\ V_\infty$；利用能量方程式（6－2－4）去计算二维流动时当地声速，即

$$\left(\frac{a}{a_\infty}\right)^2=1-\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left[2\frac{u'}{V_\infty}+\left(\frac{u'}{V_\infty}\right)^2+\left(\frac{v'}{V_\infty}\right)^2\right]$$

省略二阶以上小量便有

$$\left(\frac{a}{a_\infty}\right)^2=1-(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{V_\infty}=1-0.4\times0.7^2\times0.22=0.956\,9$$

因此小鼓包上的最大 M 为

$$M=\frac{V_{\max}}{a}=\frac{1.22V_\infty}{a_\infty\sqrt{0.956\,9}}=0.873$$

由式（6-2-27），即 $P-P_\infty=-\rho_\infty V_\infty u'$

上式可改写为

$$\frac{P_\infty-P}{P_\infty}=\frac{\rho_\infty V_\infty}{P_\infty}u'=\gamma M_\infty\frac{u'}{a_\infty}=\gamma M_\infty\frac{u'}{V_\infty}\frac{V_\infty}{a_\infty}=\gamma(M_\infty)^2\frac{u'}{V_\infty}=1.4\times(0.7)^2\times0.22=0.15$$

也就是说，当把测压孔刚好开在小鼓包的最高点处时造成的静压测量误差为 15%。

6.3.2 超声速流动

这时的定解方程组由式（6-2-12）及边界条件组成，即

$$B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{6-3-8}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\frac{2\pi\varepsilon V_\infty}{l}\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \tag{6-3-9a}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{y\to\infty}=\text{有限值},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y\to\infty}=\text{有限值} \tag{6-3-9b}$$

对于波动方程，其通解为

$$\varphi(x,y)=f(x-By)+g(x+By) \tag{6-3-10}$$

式中 f 和 g 的具体形式应由边界条件确定。为便于叙述，先假定 $g=0$，于是

$$v'=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-Bf'(x-By) \tag{6-3-11}$$

这里 f' 表示函数 f 对变量 $(x-By)$ 求导数；将式（6-3-11）与边界条件式（6-3-9a）对比，可得 $f'(\theta)$ 为 θ 的正弦函数，于是积分便得

$$f(\theta)=-\frac{\varepsilon V_\infty}{B}\cos\left(\frac{2\pi\theta}{l}\right)+\text{const}$$



将 θ 换成 $(x-By)$ 便得到扰动速度势 φ 的表达式

$$\varphi(x,y)=f(x-By)=-\frac{\varepsilon V_\infty}{B}\cos\left[\frac{2\pi}{l}(x-By)\right]+\text{const} \tag{6-3-12}$$

有了扰动速度势 φ 的值，则 u',v', 压力系数 C_p 值均可得到。这里仅给出流线的斜率，即

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2\pi\varepsilon}{l}\cos\left[\frac{2\pi}{l}(x-By)\right]}{1+\frac{1}{B}\cos\left[\frac{2\pi}{l}(x-By)\right]} \tag{6-3-13}$$

显然，沿着 $x-By=\text{const}$ 的直线，流线的斜率相同，也就是说波形壁的壁面扰动在超声速流动下是以不变的形式沿着这族直线传播出去进入流场的，这个结果也满足无穷远处的条件。另外，根据超声速流动的特点，壁面引起的扰动只能沿着马赫线向下游传播。因此，对于从左向右沿波形壁的超声速流动，则扰动速度势可表达为 $\varphi=f(x-By)$；而对于从右向左的超声速流动，则为 $\varphi=g(x+By)$。

§6.4　亚声速绕薄翼型定常流动的相似律

6.4.1　仿射相似

仿射相似（又称仿射变换）[15]是几何相似的一种推广。以二维翼型剖面为例，同一个翼剖面，若 x 方向的尺度不变，y 方向的尺度乘以某一个常数因子 β，则由此得到的翼剖面与原翼剖面仿射相似。例如具有一条公共对角线的所有菱形翼剖面都仿射相似（注意这里取公共对角线为 x 轴）。假设两个仿射相似的翼剖面相对厚度之比为 $\tau_2/\tau_1=\beta$（所谓相对厚度比 τ 定义为翼剖面的最大厚度 t 与弦长 c 之比，常称作翼剖面的最大相对厚度，简称相对厚度），并假设零攻角薄翼剖面方程为

$$y=H(x)=\tau F(x) \tag{6-4-1}$$

这里 $F(x)=H(x)/\tau$。显然，对一族相对厚度不同的薄翼剖面，只要 $F(x)$ 相等，则它们之间必定仿射相似。另外，如果把攻角 α 也当作几何参数考虑的话，则翼剖面方程为

$$y=h(x)=H(x)-\alpha x=\tau\left[F(x)-\frac{\alpha}{\tau}x\right]=\tau f(x) \tag{6-4-2}$$

其中 $f(x)=F(x)-\dfrac{\alpha}{\tau}x$。对于考虑攻角的两翼剖面，若仿射相似则必须要有相同的 $f(x)$ 值；而要使 $f(x)$ 相等，则要求两翼剖面的 $F(x)$ 与 α/τ 都分别相等。

6.4.2 亚声速气流绕薄翼流动的相似律

一、戈泰特相似律

考虑亚声速线化流动的控制方程为式（6－2－11），其边界条件如下：

（1）在物面上，设物面方程为 $F(x,y,z)=0$，由固壁不可穿透条件（即流速方向与物体表面相切），有

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla F=0 \tag{6-4-3}$$

这里 $\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$。在定常和小扰动的假设下并注意到式（6－2－2），则上式变为

$$V_\infty\frac{\partial F}{\partial x}+v'\frac{\partial F}{\partial y}+w'\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{6-4-4}$$

（2）无穷远处

$$u'=0, v'=0, w'=0 \tag{6-4-5}$$

令 $\beta=\sqrt{1-M_\infty^2}$，引进仿射变换

$$x=\xi,\quad \beta y=\eta,\quad \beta z=\zeta \tag{6-4-6}$$

并令

$$\varphi=k\varphi^* \tag{6-4-7}$$

其中 k 是待定常数。于是，控制方程式（6－2－11）变为拉普拉斯方程式（6－4－8），换句话说，借助于上面的变换，亚声速可压缩的流动问题转化为相应的不可压缩流动，即

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\zeta^2}=0 \tag{6-4-8}$$

通常将亚声速流动所在的空间 (x,y,z) 称为原物理空间；将仿射变换后所定义的不可压缩流动空间 (ξ,η,ζ) 简称为不可压缩流动空间或称为变换后空间。

下面讨论边界条件的转换以及如何选择适当的 k 值才能使两个流动中的物面条件得到满足的问题。在原物理空间中，可压缩流的物面方程 $F(x,y,z)=0$ 经过仿射变换有

$$F(x,y,z)=F\left(\xi,\frac{\eta}{\beta},\frac{\zeta}{\beta}\right)=f(\xi,\eta,\zeta)=0 \tag{6-4-9}$$

即变为相应的不可压缩流动空间中的仿射物体 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$，设 φ^* 为不可压缩流动的扰动势，它满足无穷远处的边界条件以及不可压缩流动空间物面（这里物面方程为 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$）的边界条件，亦即



（1）在 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$ 的物面上

$$V_\infty^* \frac{\partial f}{\partial \xi}+v^* \frac{\partial f}{\partial \eta}+w^* \frac{\partial f}{\partial \zeta}=0 \tag{6-4-10a}$$

（2）在无穷远处

$$u^*=0,\ v^*=0,\ w^*=0 \tag{6-4-10b}$$

由式（6-4-7），得

$$\left.\begin{aligned} u'&=\frac{\partial \varphi}{\partial x}=k\frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi}=ku^* \\ v'&=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=k\beta\frac{\partial \varphi^*}{\partial \eta}=k\beta v^* \\ w'&=\frac{\partial \varphi}{\partial z}=k\beta\frac{\partial \varphi^*}{\partial \zeta}=k\beta w^* \end{aligned}\right\} \tag{6-4-11}$$

因而不管 k 取何值，扰动速度势 φ 总能满足无穷远处边界条件。现在考虑物面条件，把式（6-4-6）代入到物面条件式（6-4-10a），并令 $V_\infty^*=V_\infty$，于是有

$$V_\infty \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{v'}{k\beta^2}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{w'}{k\beta^2}\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{6-4-12}$$

比较边界条件式（6-4-12）与式（6-4-4）可知，为了满足物面边界条件的仿射变换，则必须有

$$k\beta^2=1 \quad 或 \quad k=\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{1-M_\infty^2} \tag{6-4-13}$$

将上式代入到式（6-4-7）和式（6-4-11）中，便得到

$$\varphi=\frac{1}{\beta^2}\varphi^* \tag{6-4-14}$$

$$u'=u^*/\beta^2,\ v'=v^*/\beta,\ w'=w^*/\beta \tag{6-4-15}$$

于是将上式代到式（6-2-25）并且仍然令 $V_\infty=V_\infty^*$，于是便得到两个互为仿射流场时压力系数之间的关系

$$C_P=\frac{1}{\beta^2}C_P^* \tag{6-4-16}$$

这里 C_P 与 C_P^* 分别表示可压缩和不可压缩流场对应点的压力系数。因此，戈泰特相似律可叙述如下：亚声速线化流场的参数可以通过仿射变换得到一个对应的不可压缩流场。两个流场的空间关系服从式（6-4-6）给出的仿射变换，相应点的流动参数间的关系由式（6-4-14）、式（6-4-15）与式（6-4-16）所规定。

例 6.2　设弦长与最大厚度分别为 b 与 $t_{\max}$ 的二维亚声速翼型，如果来流速度为 V_∞，进

气攻角为α，试用戈泰特相似律求出相应不可压缩流动时的叶型弦长b^*，最大厚度比$t^*_{\max}$，来流速度V^*_∞，进气攻角α^*以及不可压流的压力系数C^*_P值？

解 设两个翼型符合仿射变换，其几何参数间的关系为

$$b=b^*,\qquad \frac{t^*_{\max}}{t_{\max}}=\frac{f^*_m}{f_m}=\frac{\alpha^*}{\alpha}=\beta \tag{6-4-17}$$

式中，$b,t_{\max},f_m$和α分别表示翼型的弦长，最大厚度、弯度和攻角；另外，上标*号表示相对应的不可压流的参数值。对于本问题，有$V_\infty=V^*_\infty$；令两个流场的流线与x轴的夹角分别为θ和θ^*，则

$$\theta\approx\tan\theta=\frac{v'}{V_\infty+u'}\approx\frac{v'}{V_\infty}.$$

而
$$\theta^*\approx\tan\theta^*=\frac{v^*}{V^*_\infty+u^*}\approx\frac{v^*}{V_\infty}=\beta\frac{v'}{V_\infty}$$

因此
$$\theta^*=\beta\theta \tag{6-4-18}$$

这表明两个流场的流线是彼此线性相关联的，相应的流线与x轴的夹角服从式（6-4-18）；压力系数仍为

$$C^*_P=\beta^2C_P$$

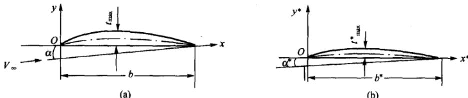


图 6.5 戈泰特相似律

显然，如图 6.5 所示不可压缩流动下的翼型要比可压缩流的薄，并且攻角的绝对值也变小。另外，戈泰特相似律也可简单的表示为

$$[C_P]_{M_\infty,\alpha,\tau,\bar f}=\frac{1}{\beta^2}[C_P]_{0,\beta\alpha,\beta\tau,\beta\bar f} \tag{6-4-19}$$

式中，α,τ与$\bar f$分别表示翼型的攻角、相对厚度比与弯度比，这里$\bar f=f/b$。

二、Prandtl-Glauert（普朗特–葛劳渥）相似律

Prandtl-Glauert 相似律是建立可压缩与不可压缩流场中以相同攻角绕同一个翼型的气动力特性之间的关系，从而得到可压缩性对同一个翼型气动力的影响。现在就讨论它们之间的具体关系式，首先将戈泰特相似律，式（6-4-19）改写成如下形式



$$\frac{[C_P]_{M_\infty,\alpha,\tau,\bar{f}}}{[C_P]_{0,\alpha,\tau,\bar{f}}}=\frac{1}{\beta^2}\left\{\frac{[C_P]_{0,\beta\alpha,\beta\tau,\beta\bar{f}}}{[C_P]_{0,\alpha,\tau,\bar{f}}}\right\} \tag{6-4-20}$$

上式等号右端大括号内的式子表示了在不可压缩流动中，两种不同攻角、不同厚度比、不同弯度比之下两种翼型在相应点处的压力系数的比。从线化压力系数公式式（6-2-25）可知，压力系数是与扰动分速度 u' 成正比。在小扰动情况下，翼型对气流所产生的扰动，可以认为是攻角、厚度比和弯度比这三者所产生的扰动的迭加。也就是说，如果翼型的攻角、厚度比和弯度比都缩小 β 倍时，所引起的扰动速度 u' 以及压力系数也都要相应地减小 β 倍，即

$$\frac{[C_P]_{0,\beta\alpha,\beta\tau,\beta\bar{f}}}{[C_P]_{0,\alpha,\tau,\bar{f}}}=\beta \tag{6-4-21}$$

于是，这时式（6-4-20）就变为

$$[C_P]_{M_\infty,\alpha,\tau,\bar{f}}=\frac{1}{\beta}[C_P]_{0,\alpha,\tau,\bar{f}} \tag{6-4-22}$$

因此，Prandtl-Glauert 相似律（简称 P-G 相似律）可叙述如下：亚声速均匀来流绕薄翼型流动时，翼型表面各点的压力系数等于不可压缩均匀来流以相同来流速度绕相同翼型流动时翼型表面压力系数的 $1/\beta$ 倍。很显然，由 P-G 相似律还可推出不同来流马赫数下绕同一个翼型流动时，翼型表面压力系数之间的关系为[16~21]

$$\frac{[C_P]_{M_{\infty1}}}{[C_P]_{M_{\infty2}}}=\sqrt{\frac{1-M_{\infty2}^2}{1-M_{\infty1}^2}} \tag{6-4-23}$$

作为课后练习，请读者完成式（6-4-24）的证明，即在亚声速流动与不可压缩流动中，如果两个翼型具有相同的压力系数时，则这两个翼型的形状应有如下关系

$$[C_P]_{M_\infty,\alpha,\tau,\bar{f}}=[C_P]_{0,\alpha/\beta,\tau/\beta,\bar{f}/\beta} \tag{6-4-24}$$

§6.5　亚声速定常、无旋、均熵流动的速度图方法

1901 年 C.A.Чаплыгин（恰普雷金）用严格的数学变换将物理平面上的定常、无旋、等熵、无粘气体的非线性偏微分方程变换为速度平面上的线性偏微分方程[22]，并用这种方法研究了气体的射流问题。现在就讨论这种方法。

6.5.1　自然坐标系

由平面、无旋、定常、均熵无粘运动的基本方程组

连续方程
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{6-5-1}$$

无旋方程
$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{6-5-2}$$

等熵关系
$$\frac{P}{\rho^{\gamma}}=C \tag{6-5-3}$$

能量方程
$$\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0} \tag{6-5-4}$$

取自然坐标系（S,n），这里S为流线的弧长，n为与流线垂直的法线，S与n构成右手系如图 6.6 所示，并用q与θ分别代表速度矢量$\boldsymbol{V}$的模与方向角，于是在这个坐标中式（6-5-1）与式（6-5-2）分别变为

$$\frac{\partial[\ln(\rho q)]}{\partial S}+\frac{\partial\theta}{\partial n}=0 \tag{6-5-5}$$

$$\frac{\partial(\ln q)}{\partial n}-\frac{\partial\theta}{\partial S}=0 \tag{6-5-6}$$

注意到$M=q/a$，则式（6-5-5）可变为

$$\frac{\partial q}{\partial S}=\frac{q}{M^2-1}\frac{\partial\theta}{\partial n} \tag{6-5-7}$$

另外，由流体力学基础知识可知，对于定常、无粘、无旋流来说流场中的所有流线都具有相同的 Bernoulli（伯努利）常数值，即

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{\rho}+\frac{q^2}{2}=\text{常数（适用于整个流场）} \tag{6-5-8}$$

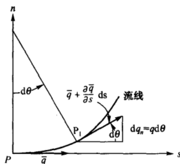


图 6.6　流线坐标系（S，n）

注意到式（6-5-3），则上式变为

$$\frac{q^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{(a_0)^2}{\gamma-1} \tag{6-5-9}$$

或者利用马赫数的定义，将上式改写为

$$M^2=\frac{q^2}{a^2}=\frac{q^2}{a_0^2-\frac{\gamma-1}{2}q^2} \tag{6-5-10}$$

引进速度势φ，其定义为

$$\boldsymbol{q}=\nabla\varphi \tag{6-5-11}$$

于是借助于式（6-5-7），$\nabla\cdot\boldsymbol{q}$可表示为



$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\boldsymbol{q} = \frac{\partial q}{\partial S} + q\frac{\partial\theta}{\partial n} = M^2\frac{\partial q}{\partial S} = M^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2} \tag{6-5-12}$$

将 $\nabla^2\varphi$ 在（S,n）坐标系中展开，上式又可改写为

$$\left(M^2-1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} \tag{6-5-13}$$

引进流函数 ψ，即 $\rho u \equiv \rho q_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \rho v \equiv \rho q_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ （6-5-14）

注意到速度势 φ 的存在，上式可改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6-5-15}$$

在自然坐标系中，与上式相对应地有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial n},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial S} \tag{6-5-16}$$

利用速度势 φ 与流函数 ψ 的定义与特点，在（S,n）坐标系中还有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S} = q,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \tag{6-5-17}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial S} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = \rho q \tag{6-5-18}$$

借助于式（6-5-16），计算 $\partial^2\psi/\partial S^2$，可得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2} = -\frac{\partial}{\partial S}(\rho q_n) = -\rho\frac{\partial q_n}{\partial S} \tag{6-5-19}$$

这里已注意到如下关系式

$$\frac{\partial q_n}{\partial S} = q\frac{\partial\theta}{\partial S},\qquad \frac{\partial q_n}{\partial n} = q\frac{\partial\theta}{\partial n} \tag{6-5-20}$$

由 $\boldsymbol{n}$ 方向上的运动方程并注意到等熵条件便有

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2} = \frac{1}{q}\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{a^2}{q}\frac{\partial\rho}{\partial n} \tag{6-5-21}$$

由无旋条件式（6-5-6），即

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial q_n}{\partial S} \tag{6-5-22}$$

应用式（6-5-19）到上面的表达式中，便有

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}=\rho\frac{\partial q}{\partial n}$$

注意到式（6-5-21），于是上式又可改写为

$$(M^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}=q\frac{\partial\rho}{\partial n}+\rho\frac{\partial q}{\partial n}=\frac{\partial(\rho q)}{\partial n}=\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}$$

因此，定常、无旋、均熵流在（S,n）坐标系的流函数主方程为

$$\left(M^2-1\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} \tag{6-5-23}$$

6.5.2 恰普雷金方程

在速度平面上，取(q,θ)坐标系，于是式（6-5-17）与式（6-5-18）可改写为如下关系式

$$q=\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial S}+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial S},\qquad 0=\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial n}+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial n} \tag{6-5-24}$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial S}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial S},\qquad \rho q=\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial n}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial n} \tag{6-5-25}$$

于是由上述两式可直接求得

$$\frac{\partial q}{\partial S}=\frac{q}{D}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial S}=-\frac{q}{D}\frac{\partial\psi}{\partial q} \tag{6-5-26}$$

$$\frac{\partial q}{\partial n}=-\frac{\rho q}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial n}=\frac{\rho q}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial q} \tag{6-5-27}$$

式中

$$D\equiv\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(q,\theta)} \tag{6-5-28}$$

这里$\partial(\varphi,\psi)/\partial(q,\theta)$为 Jacobian 函数行列式。注意到式（6-5-26）与式（6-5-27），则式（6-5-7）又可改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q}=\frac{M^2-1}{\rho q}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{6-5-29}$$

仿照上式的推导过程，式（6-5-6）又可改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{q}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q} \tag{6-5-30}$$

由式（6-5-29）与式（6-5-30）中消去φ项后可得



$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=\frac{M^2-1}{\rho q}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} \tag{6-5-31}$$

同样地，由式（6-5-29）与式（6-5-30）中消去ψ项后可得

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\rho q}{M^2-1}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)=\frac{\rho}{q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \tag{6-5-32}$$

另外，由 Bernoulli 方程式（6-5-8）并注意应用式（6-5-3）后，可以得到

$$q+\frac{a^2}{\rho}\frac{d\rho}{dq}=0 \tag{6-5-33}$$

将上式用于式（6-5-31）消去密度项后便得到恰普雷金方程，即

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}+\frac{1-M^2}{q^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{q}\left(1+M^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial q}=0 \tag{6-5-34}$$

正如文献[23]所指出的，这个线性的流函数方程是恰普雷金首先推出的，并用它求解了射流问题[24]。如果用式（6-5-10）代入上式便得到

$$q^2\left(1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{a_0^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}+\left(1-\frac{\gamma+1}{2}\frac{q^2}{a_0^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+q\left(1-\frac{\gamma-3}{2}\frac{q^2}{a_0^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial q}=0 \tag{6-5-35}$$

显然，在(q,θ)坐标系中，上式是关于ψ的二阶线性偏微分方程。为了便于将可压缩流动与不可压缩流进行比拟，下面引进一组新变量(σ,θ)，这里变量σ定义为

$$\sigma\equiv\int_q^{q^*}\frac{\rho\mathrm{d}q}{q},\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{dq}=-\frac{\rho}{q} \tag{6-5-36}$$

式中，q^*定义为

$$q^*\equiv a_0\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \tag{6-5-37}$$

于是，式（6-5-29）与式（6-5-30）变为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=K\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} \tag{6-5-38}$$

这里K定义为

$$K\equiv\frac{1-M^2}{\rho^2} \tag{6-5-39}$$

因此，由式（6-5-38）中消去φ便得到

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=0 \tag{6-5-40}$$

为了便于阅读其它教科书（例如文献[25]等），也可以重新定义流函数$\overline{\psi}$，即

$$u=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial y},\quad v=-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} \tag{6-5-41}$$

对于均熵流场，$\rho_0=\text{const}$，因此关于$\overline{\psi}$的恰普雷金方程为

$$\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial q^2}+\frac{1-M^2}{q^2}\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{q}\left(1+M^2\right)\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial q}=0 \tag{6-5-42}$$

相应地$\overline{\psi}$与φ间的关系为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=\overline{K}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\rho_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\sigma} \tag{6-5-43}$$

式中，$\overline{K}$定义为

$$\overline{K}\equiv\frac{\rho_0}{\rho^2}\left(1-M^2\right) \tag{6-5-44}$$

另外，对于定常、无粘、均熵流，由运动方程得

$$-(\rho q)\mathrm{d}q=\mathrm{d}P \tag{6-5-45}$$

注意到ρ与θ无关，于是借助于上式便有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}q}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}q}=\frac{-\rho q}{a^2}=-\frac{\rho}{q}M^2 \tag{6-5-46}$$

所以对于均熵流，注意到ρ_0为常数便可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{\rho_0}{\rho q}\right)=-\frac{\rho_0}{\rho q^2}\left(1-M^2\right) \tag{6-5-47}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1}{\rho q}\right)=\frac{1}{\rho q^2}\left(M^2-1\right) \tag{6-5-48}$$

在推导式（6-5-47）时，这里使用了式（6-5-46）。类似于上面的推导，还可推出下式成立，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)=-\frac{\rho_0}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}q}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{q}{a^2} \tag{6-5-49}$$

此外，如果将式（6-5-43）中的φ消去，便得到

$$\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(K\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta}\right)=0 \tag{6-5-50}$$

式中，K的定义同（6-5-39）式。

从数学的角度来看，方程式（6-5-40）与式（6-5-50）具有相同的数学性质，换句话说，无论是按式（6-5-14）定义流函数，还是按式（6-5-41）定义，虽然两种定义所



得到的流函数值不同，但它们所遵循的流函数主方程却具有相同的数学结构，因此不会影响所讨论问题的数学本质。

§ 6.6 Karman–钱学森的近似方法

对于均熵流动的完全气体，则

$$\begin{aligned}\frac{\rho_0}{\rho}(1-M^2)^{1/2} &= \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(1-M^2\right)^{1/2} \\ &= \left[1+\frac{M^2}{2}+(2-\gamma)\frac{M^4}{8}+\cdots\right]\left(1-\frac{M^2}{2}-\frac{M^4}{8}\cdots\right) \\ &= 1-\frac{\gamma+1}{8}M^4+O(M^6)\end{aligned} \tag{6-6-1}$$

例如 $\gamma=1.4$ 时，上式变为

$$\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-M^2\right)^{1/2}=1-0.3M^4+\cdots \tag{6-6-2}$$

例如 $M=0.61$ 时，上式变为

$$\frac{\rho_0}{\rho}(1-M^2)^{1/2}=1-0.3\times0.137+\cdots=1-0.041+\cdots$$

因此，在亚声速的很大范围内 $\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-M^2\right)^{1/2}$ 的值接近于 1，换句话说，在亚声速的很大范围内有如下近似关系

$$\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-M^2\right)^{1/2}\approx1 \tag{6-6-3}$$

对于均熵流，ρ_0 全场为常数并注意到式（6−5−39），则上式变为

$$\rho_0\sqrt{K}\approx1 \quad 或者 \quad K\approx \text{const} \tag{6-6-4}$$

显然，如果 $K=\text{const}$，则式（6−5−40）便可写为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}+K\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0 \tag{6-6-5}$$

于是就可以很方便地在可压缩流动与不可压缩流动之间建立起比拟关系。另外，分析图 6.7 所

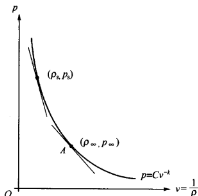


图 6.7 绝热等熵过程曲线与切线气体假定

示的气体绝热等熵过程曲线。

设曲线上 A 点代表流场上游无穷远处的气体状态，通过这点作绝热等熵曲线的切线，以此切线来近似地代替绝热曲线，这就是卡门——钱学森的切线气体假定[14, 21]。切线的斜率 C_1 为

$$C_1=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)}=-\rho^2\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}=-\rho^2a^2=-\rho_\infty^2a_\infty^2=\text{const} \tag{6-6-6}$$

可以证明，如果用 P 与 $\frac{1}{\rho}$ 的线性关系式去代替完全气体的绝热等熵方程 $P/\rho^\gamma=\text{const}$ 的话，这相当于引进 $\gamma=-1$ 的假定。显然，在 $\gamma=-1$ 的假定下，则恒有

$$\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-M^2\right)^{\frac{1}{2}}=1 \tag{6-6-7}$$

这时，K 的值全场恒等于常数，并且式（6−6−5）严格成立。最后还需要指出的是，对于许多实际的流动，流场中任一点的状态 (P,ρ) 和远前方来流状态 (P_∞,ρ_∞) 相差不算太大，因此取 $(P_\infty,1/\rho_\infty)$ 点处的切线去代替绝热曲线，是有足够精度的。工程应用的大量实践表明：恰普雷金以滞止点 $(P_0,1/\rho_0)$ 处的切线去代替绝热曲线的处理办法，适于射流流场的研究。而卡门——钱学森以 $(P_\infty,1/\rho_\infty)$ 点处的切线代替绝热曲线的做法，适用于研究机翼的绕流问题。

§6.7 机翼与叶栅绕流的尾缘条件

这里首先对边界条件数学处理的一般情况作一个概述，然后再讨论叶栅与机翼绕流问题的尾缘条件。正如在第 5 章中所指出的，边界条件的提法及其数学处理在气体动力学和计算流体力学中的确是一个十分重要而且需要进一步完善的课题，它对工程应用和理论研究都具有极为重要的意义。同样，机翼与叶栅绕流时的尾缘条件也是一个既现实但又十分难处理的问题，在航空、航天和工程热物理领域中，进行叶栅与机翼的数值计算与理论分析时必然会遇到它。

6.7.1 无粘流与粘性流动边界条件的数学处理概述

首先，适当的边界条件提法及其数学处理是保证流场数值计算过程稳定的必要条件。边界处理的具体方法可能会影响到流场参数的计算精度（特别是热流，摩擦阻力等参数值），甚至还会影响流场的内部结构。因此，边界条件的提法及其数学处理是气体动力学及计算流



体力学中不可忽视的十分重要的问题。这里所谓边界处理包括边界条件的提法和边界条件的履行办法。而边界条件的提法又可分为：①各类边界上所需规定的边界条件的数目；②各类边界上具体的边界条件的提法。它们是不能随意规定的，在数学上应满足适定性的要求，在物理上应具有较明显的意义。在气体动力学问题的数值计算中，可能遇到两类不同的边界；一类称为实际边界，例如外流问题中的固壁表面，内流问题中的进、出口边界及物面边界等。显然，它们是由物理问题的性质所决定的，因而也是确定的；另一类是人工边界（又称开边界），例如在外流计算中，尽管理论讲边界在无限远处，但实际计算时只能取有限远的地方，因此人工边界的选取带有任意性和经验性。另一方面，为了保证无粘流的 Euler 基本方程组和有粘流 Navier-Stokes 基本方程组的初边值问题适定，因此，需要规定边界条件，这些条件常称作物理边界条件，这些条件的数目往往是确定的，例如对于三维流动问题，对于 Euler 方程组：超声速入流、亚声速入流、超声速出流和亚声速出流分别要求 5，4，0 与 1 个物理边界条件；对于 Navier-Stokes 方程组也对应于上述同样的流动时，则分别要求 5、5、4 与 4 个物理边界条件[26]。显然，当物理边界条件的数目少于支配方程中独立变量的数目时，在数值计算过程中就有必要补充“数值边界条件”。

一、Euler 基本方程组的边界条件

文献[27]对双曲型偏微分方程提出了“时间相关边界条件”的处理办法，其基本思想是：它以双曲型偏微分方程所描述的波传播现象为出发点，在边界处有一些波是从边界外传向求解域内的，而另一些波则是从求解域内传向边界的。前者称进入波，由于它们的行为完全由边界外的状况所决定，因此就需要适当规定边界条件来确定它们的行为；而后者称流出波，由于它们完全由求解域内的解所决定，所以对这些波就不应提任何边界条件。按照上述思想，对应于这些特征波的相应特征变量[26, 27]可决定如下：当特征波指向求解域外部时，相应特征变量中的导数用单侧差分逼近；当特征波指向求解域内部时，则应由边界条件来确定出相应的特征变量。下面以三维 Euler 流动为背景，分别对各类边界结合特征分析方法简述一下数学处理的要点：

1. 入流边界条件

（1）对超声速入流边界，由特征分析这时 5 个特征波都是进入波，于是进口边界处要给 5 个物理边界条件，例如可给 P、ρ、u、v 和 w。

（2）对亚声速入流边界，这时有 4 个特征波是进入计算域的，有 1 个是离开计算域，因此进口边界处要给 4 个物理边界条件，例如可给 ρ、u、v 和 w，或者给 u、v、w 和 T。

2. 出流边界条件

（1）对超声速出流边界，此时 5 个特征波是流出波，因此在出口边界处不需要规定任何边界条件。

（2）对亚声速出流边界，此时 4 个特征波离开计算域，1 个特征波是进入计算域的，因此在出口边界处应规定 1 个物理边界条件，例如可给定静压 P 的分布。

3. 物面边界条件

由流体力学可知，对于无粘流，流体沿着物面可以滑动。在进行特征分析时，只有1个特征波是离开计算域的，因此与这个特征波相对应的特征变量的导数要用单侧差分逼近。而其它的四个特征变量可这样确定：令其中的三个为零，另一个由局部一维无粘关系式及壁面滑移边界条件来确定。在物面上应给的那个物理边界条件是规定沿物面法向速度为零。

4. 远场边界条件

这时所规定物理边界条件的数目应该由当地局部特征值正与负的个数自动决定。也就是说，对应于每一个进入特征波，都应该规定一个物理边界条件。

二、Navier-Stokes 基本方程组的边界条件

Navier-Stokes 方程组并不是双曲型的，所以这里所谓对 N-S 方程作特征边界条件分析是指忽略了扩散过程之后进行的，因此在 N-S 方程的分析中，其特征波仅与 N-S 方程中的双典型部分有关联。当然，对于 N-S 方程所规定的边界条件的数目应该等于 N-S 方程初边值的适定性分析所得到的边界条件的数目，这是讨论本问题最基本的出发点。因此，对 N-S 方程所提的具体边界条件应包括无粘边界条件，再加上与粘性有关的边界条件。从 N-S 方程边界条件所采用的数学处理方法上也与 Euler 方程相类似。首先，将 N-S 方程中的双曲型部分（即无粘部分）进行特征分析，确定特征波所对应的特征变量。这里所遵循的总原则仍然是：对应于流出波的特征变量的导数用单侧差分逼近；而对应于进入波的特征变量则由无粘边界条件及局部一维无粘关系式来确定。下面以三维粘性流为例，分别对各类边界略作概述：

1. 入流边界条件

（1）对超声速入流边界，由特征分析这时5个特征波都是进入波，于是进口边界处要给5个物理边界条件。

（2）对亚声速入流边界，这时有4个特征波是进入波，1个是流出波，于是在该入流边界处应规定4个无粘物理边界条件（例如规定 u、v、w 和 T 这四个量）。而根据 N-S 方程初边值问题的适定性，该处要求规定5个边界条件，于是要补充1个与粘性有关的条件。

2. 出流边界条件

（1）对超声速出流边界，这时5个特征波均是流出波，因此在出口边界处不需要规定任何无粘边界条件；而根据 N-S 方程初边值问题的适定性，该处要求规定4个边界条件，因此，需要规定4个与粘性有关的边界条件。

（2）对亚声速出流边界，这时4个特征波是流出波，只有1个特征波是进入波，因此在出口边界处应规定1个无粘边界条件。而按照 N-S 方程初边值问题的适定性，要求规定4个边界条件，因此需要补充3个与粘性有关的边界条件。

3. 物面边界条件

（1）等温无滑移壁面：在进行特征分析时，只有1个特征波是流出波，因此与这个波相



对应的特征变量的导数用单侧差分逼近。而其他的四个特征变量应由边界条件及局部一维无粘关系式来确定。通常规定 4 个条件例如规定 $u=0, v=0, w=0$ 并且给定壁温 T_W 值。这恰好与 N-S 方程初边值问题适定性所要求的数目一致。

（2）无滑移绝热壁：在进行特征分析时，只有 1 个特征波是流出波。此时要规定 4 个条件例如规定 $u=0, v=0, w=0$ 并规定温度沿壁面法向变化率 $\partial T/\partial n=0$；它正好与 N-S 方程初边值问题适定性所要求的数目相符。

4. 远场边界条件

这时规定的物理边界条件的数目也应该取决于该处局部特征值正与负的个数。

6.7.2　不可压缩理想流体的保角映射方法

一、无分离流动时保角映射方法的基本思想

对于无粘、不可压缩、平面、无旋流动，首先定义复位势 $W(Z)$ 与复速度 V，其定义分别为

$$W(Z) \equiv \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y) \tag{6-7-1}$$

$$V \equiv u + \mathrm{i}v = |V|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{6-7-2}$$

在式（6-7-1）中 $W(Z)$ 的实数部分是速度势函数 φ，虚数部分是流函数 ψ。由于 φ 和 ψ 满足（Cauchy-Riemann）柯西–黎曼条件，因此 $W(Z)$ 是解析函数，并称 $W(Z)$ 为复位势。另外，$Z=x+\mathrm{i}y$。在式（6-7-2）中，V 为复速度，α 为复速度的幅角，$\alpha=\arctan\dfrac{v}{u}$；$|V|$ 为复速度的模，$|V|=\sqrt{u^2+v^2}$。复位势 W 对 Z 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - \mathrm{i}v = |V|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \equiv \overline{V} \tag{6-7-3}$$

显然，$\mathrm{d}W/\mathrm{d}Z$ 是复速度 V 的共轭，称为共轭复速度并以 $\overline{V}$ 表示。将共轭复速度沿封闭曲线 C 积分，得到

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z = \oint_c \mathrm{d}W = \oint_c \mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\mathrm{d}\psi = \Gamma + \mathrm{i}Q \tag{6-7-4}$$

其中实数部分 Γ 为沿封闭曲线 C 的速度环量，并且约定：流动沿逆时针方向，$\Gamma>0$；流动沿顺时针方向，$\Gamma<0$；而虚数部分为通过该封闭曲线的流量。由流体力学基础知识知道，求解无粘、不可压缩、平面、无旋流动问题，可归结为寻求满足来流条件、物面条件和环量条件的复位势 $W(Z)$。一旦流场的复位势 $W(Z)$ 被确定，则相应的速度场、压力场等也就容易确定了。应该明白，要确定满足较复杂物面条件的复位势并不是一件容易的事，尤其是三维流动问题。然而在复变函数中，保角映射方法可以对复杂边界问题进行处理，因此该方法

值得借鉴。用保角映射方法求解上述平面无旋流动问题的基本思想可简述如下。

（1）寻求一个解析变换 $Z=f(\zeta)$，通过它把物理平面（即复平面）Ⓩ上形状比较复杂的求解域边界映射为映射平面ⓒ上简单形状的边界。这里对变换 $Z=f(\zeta)$ 的要求是：开域内保角；边界点一一对应（边界走向按边界对应原理，例如求解域都在边界左侧）。

（2）通过解析变换 $Z=f(\zeta)$，建立物理平面Ⓩ和映射平面ⓒ上对应流动之间的关系，从而得到与物理平面Ⓩ上流动相对应的映射平面ⓒ上的流动。

（3）求出映射平面ⓒ上相应流动问题的复位势。通常，这是很容易找到的。

（4）再通过解析变换 $Z=f(\zeta)$ 的反函数即 $\zeta=F(Z)$，求出物理平面Ⓩ上原来流动问题的复位势。

可以看出，该方法的关键是第①步，它是整个方法中最困难的一步。

二、物理平面Ⓩ和映射平面ⓒ上对应的流动关系

关于两个平面上流动的对应关系，下面想作五点说明：

（1）若已知Ⓩ平面上某个流动的复位势为 $W(Z)$，则 $W(f(\zeta))\equiv W^*(\zeta)$（或者按照通常习惯仍可写为 $W(\zeta)$ 表示）必然是ⓒ平面上某个流动的复位势（这里证明从略）。

（2）若在Ⓩ平面上 $W(Z)$ 在 $Z=Z_0$ 点处有奇点，则在ⓒ平面的对应点 $\zeta=\zeta_0$ 处，$W(\zeta)$ 也具有同样性质的奇点，并且有：

- 如果是点源或点涡时则强度不变

$$\lim_{Z\to Z_0}W(Z)=\frac{Q-\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(Z-Z_0) \tag{6-7-5}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0}W(\zeta)=\frac{Q-\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\left[(\zeta-\zeta_0)\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\bigg|_{\zeta=\zeta_0}\right]=\frac{Q-\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(\zeta-\zeta_0)+\mathrm{const} \tag{6-7-6}$$

- 如果是偶极子时则偶极子矩的大小及偶极子轴线的方向均要发生变化

$$\lim_{Z\to Z_0}W(Z)=-\frac{m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{2\pi}\frac{1}{Z-Z_0} \tag{6-7-7}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0}W(\zeta)=-\frac{m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{2\pi}\frac{\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}Z}\right|_{Z=Z_0}}{(\zeta-\zeta_0)}=-\frac{mK\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta+\mu)}}{2\pi}\frac{1}{\zeta-\zeta_0} \tag{6-7-8}$$

这里 $\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}Z}\right|_{Z=Z_0}=K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu}$；$m$ 为偶极子强度（又称偶极子的矩）；β 为偶极子的轴线与 x 轴的夹角。

（3）将Ⓩ平面上的等势线和流线映射到ⓒ平面上后，对应的线也仍然分别是等势线和流线，即

$$W(Z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)=W(\zeta)=\Phi(\xi,\eta)+\mathrm{i}\Psi(\xi,\eta) \tag{6-7-9}$$

也就是说在对应点上有：$\varphi(x,y)=\Phi(\xi,\eta),\ \psi(x,y)=\Psi(\xi,\eta)$　　(6-7-10)



（4）Ⓩ平面与ⓩ平面对应点处的共轭复速度之间存在如下关系

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta} \tag{6-7-11}$$

（5）在ⓩ平面上沿任一封闭曲线 L 的速度环量及通过它的流量分别等于Ⓩ平面上沿相应封闭曲线 L' 上的速度环量及通过它的流量，即

$$\varGamma_\zeta+\mathrm{i}Q_\zeta=\oint_L\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta=\oint_{L'}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta=\oint_{L'}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z=\varGamma_Z+\mathrm{i}Q_Z \tag{6-7-12}$$

三、映射平面与物理平面上的复位势

用保角映射的方法求解无分离绕流流动问题，其主要步骤可用如下定理具体而又确切地表达出来：设 $Z=f(\zeta)$（它的反函数为 $\zeta=F(Z)$ 是一个单值的解析函数，它将ⓩ平面上以原点为中心，半径为 a 的圆 C^* 外的区域互为单值且保角地映射到Ⓩ平面上任意剖面 C 外的区域上，如图 6.8 所示，并且满足如下两点。

（1）$\zeta=\infty$ 的点对应于 $Z=\infty$ 的点；

（2）$\left(\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\infty}=K$，这里 K 是一个正的实数。在复变函数理论中已经证明上面所述的这种变换是存在的并且是惟一的。由流体力学基础知识知道，对于无穷远处速度为 KV_∞ 的圆柱绕流其复位势应该是[28, 29]

$$W(\zeta)=K\bar{V}_\infty\zeta+\frac{KV_\infty a^2}{\zeta}+\frac{\varGamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\zeta \tag{6-7-13}$$

于是

$$W(Z)=K\bar{V}_\infty F(Z)+\frac{KV_\infty a^2}{F(Z)}+\frac{\varGamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln F(Z) \tag{6-7-14}$$

是Ⓩ平面上当无穷远处来流的复速度为 V_∞ 时绕过任意剖面 C 的复位势。

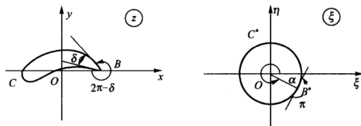


图 6.8　具有尖后缘点的机翼映射为圆

四、任意翼型绕流变换为圆柱绕流的一般形式

令D^*为ⓩ面上以坐标原点为圆心，以 a 为半径的圆柱周线C^*的外部区域，而D为Ⓩ平面上所要研究的任意翼型周线C外部的区域，并且包括无穷远处在内。由于$Z=f(\zeta)$在D^*域内是解析函数，因此用 Laurent（罗朗）级数在$\zeta=0$点展开，即

$$Z=f(\zeta)=\cdots+\frac{b_n}{\zeta^n}+\cdots+\frac{b_1}{\zeta}+b_0+C_1\zeta+C_2\zeta^2+\cdots+C_n\zeta^n+\cdots \qquad (6-7-15)$$

根据解析变换的惟一性定理，只有当域中某一对应点（例如Z_0与ζ_0）的值以及$(\mathrm{d}Z/\mathrm{d}\zeta)_{\zeta=\zeta_0}$的值规定之后，这个变换才可惟一地确定下来。如果规定：$\zeta_0=\infty$对应于$Z_0=\infty$以及

$$(\mathrm{d}Z/\mathrm{d}\zeta)_{\zeta=\infty}=K \qquad (6-7-16)$$

式中，K为给定的非零实数。

于是将上述条件用于式（6-7-15）后便可得到

$$C_1=K,\quad C_2=C_3=\cdots C_n=\cdots=0$$

因此变换的一般形式可写为

$$Z=f(\zeta)=K\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{\zeta^n} \qquad (6-7-17)$$

式中，K与b_n值可以由任意翼型周线C的形状和圆柱半径a的值来确定[30, 31]。

6.7.3 Kutta–Жуковский（库塔–儒柯夫斯基）假设及环量的确定

通过上面的讨论，似乎任意翼型的绕流问题原则上说已经解决了。其实不然，因为在式（6-7-14）中包含有环量Γ，它是ⓩ平面上圆柱绕流问题中的速度环量，也是Ⓩ平面上翼型绕流问题中的速度环量，这是一个还没有确定的量。我们无法在理想流体（即无粘流）理论的范畴内将它确定出来。解决这个困难有两种不同的途径：一种是抛弃理想流体这个近似，采用粘性流体模型，这就要求解 N-S 方程。另一种是在理想流体近似的范围内，补充一个合理的经验假设。根据这个假设——即附加的补充条件，将速度环量惟一地确定出来。下面仅以后一种处理途径为例，说明如下：

一、具有尖后缘的翼型无粘绕流问题

对于给定的圆柱与来流条件，理论上可以存在各种不同的速度环量值，而且不同的速度环量所对应的翼型后驻点的位置是不同的。图 6.9 给出了在Ⓩ平面上三种不同速度环量下的绕流图。图中的（a）、（b）、（c）分别表示后驻点在上翼面、在尖后缘与在下翼面时的流动。对于（a）和（c）两种情况，这时后缘附近的流体将从翼型表面的一边绕过尖后缘流到



另一边，出现了大于π角的绕流。于是在尖后缘 B 点处将形成无穷大的速度与无穷大的负压，显然这在物理上不可能。只有在（b）情形中，流体将从上下两边的翼型表面平滑地流过，此时尖后缘 B 点处的速度是有限的。我们在进行翼型的升力计算时，就是根据这一后缘条件去决定环量的。因此德国的 Kutta（库塔）和俄国的 H.E.Жуковский（儒柯夫斯基）分别独立地提出了确定速度环量的补充条件，即后缘 B 尖点处速度应为有限的假设，这就是库塔—儒柯夫斯基假设。此假设在数学上可表示为

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|_{Z=Z_B}=\text{有限值} \tag{6-7-18}$$

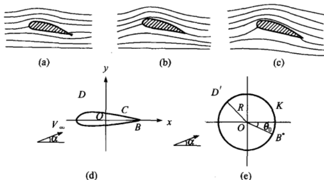


图 6.9　不同速度环量下的翼型绕流以及 Ⓩ 与 ⓩ 平面上的后缘尖点

设 Ⓩ 平面上后缘点 B 对应于 ⓩ 平面上的 B^* 点（此时辐角为 θ_0，见图（6.9e）所示）。如果 $Z=f(\zeta)$ 已知，则 θ_0 便为一个已知的量。显然，解析函数 $Z=f(\zeta)$ 在 B^* 点的保角性被破坏了，因为 B^* 点处的夹角为 π，而 B 点处的夹角为 $2\pi-\delta$（这里 δ 为翼型在尖后缘的夹角，见图 6.8 所示），于是在 B^* 点上必须满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_{B^*}}=0 \tag{6-7-19}$$

而 B^* 点共轭复速度与 B 点处的共轭复速度之间存在如下关系

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{B^*}}=\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Z}\right)_{Z=Z_B}\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{B^*}}=0 \tag{6-7-20}$$

这就是说，在 ⓩ 平面上，B^* 点应该是一个驻点。而此时 ⓩ 平面上相应圆柱绕流的复位势为

$$W(\zeta)=K\bar{V}_\infty\zeta+K\frac{V_\infty a^2}{\zeta}+\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\zeta=K|V_\infty|\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a^2}{\zeta}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\zeta \tag{6-7-21}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\zeta} = K|V_\infty|\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a^2}{\zeta^2}\right) - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\zeta} \tag{6-7-22}$$

式中，V_∞ 与 $\bar{V}_\infty$ 分别为无穷远来流的复速度与共轭复速度。

将 $\zeta = \zeta_{B'} = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 代入上式，并使其等于零便得到

$$\Gamma = -4\pi a K|V_\infty|\sin(\alpha - \theta_0) \tag{6-7-23}$$

式中，α 为来流与 x 轴的夹角；θ_0 为尖后缘点 B 所对应的极角，如图 6.9（e）所示。因此 Γ 的数值可由式（6-7-23）确定。另外，Blasius–Чаплыгин（布拉修斯–恰普雷金）公式（在定常绕流时力的复数表示式）为

$$\bar{F} = F_x - \mathrm{i}F_y = \frac{1}{2}\mathrm{i}\rho_\infty \oint_C \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Z}\right)^2 \mathrm{d}Z \tag{6-7-24}$$

注意这里复合力为 $F = F_x + \mathrm{i}F_y$，而共轭复合力为 $\bar{F} = F_x - \mathrm{i}F_y$。式（6-7-24）的优点在于，布拉修斯与恰普雷金将求合力的问题转化为复变函数中求留数的问题[32, 33]，从而使计算大大简化。此外，将 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}Z$ 作罗朗级数展开并注意留数计算便得到了著名的库塔–儒柯夫斯基（Kutta–Жуковский）升力公式

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} = \rho_\infty \boldsymbol{V}_\infty \times \boldsymbol{\Gamma} \tag{6-7-25}$$

式中，$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{V}_\infty$ 与 $\boldsymbol{\Gamma}$ 均为矢量。

显然这时合力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与来流方向垂直，且由来流方向逆着 Γ 的方向旋转 90° 即得到合力的方向。这里还约定：当环量为顺时针方向时，则 $\Gamma < 0$；环量逆时针方向时，则 $\Gamma > 0$；正如文献[34]所指出的，升力定理是库塔在 1902 年，儒柯夫斯基在 1906 年独立发现的。当然，原来这个定理是针对无粘、不可压缩流体的平面、定常、无旋流动给出的，但 Batchelor（巴切勒，1945 年）已证明：在可压缩流中，只要流场无旋，并且能够用式（6-2-11）表达时，则库塔–儒柯夫斯基所给出的升力关系式仍是对的[35]。

二、对于具有小圆弧的翼型尾缘条件

真实的机翼后缘并非尖角，而往往是由小圆弧构成，如图 6.10 所示。这时上述具有尖锐后缘的库塔–儒柯夫斯基条件不再适用。虽然如此，由于圆弧很小，机翼下股气流还是不能绕过后缘流到上侧；同样地，机翼上股气流也不能绕过后缘流到下侧。真实的流动往往是在尾部某两个点 B_S 与 B_P 上气流与机翼分离。由于 B_S 与 B_P 两点相当接近，上下两股气流脱体后在尾部形成的尾流层很薄。实验测量表明，在接近尾缘的尾流中压力为常数，也就是说

$$P|_{B_P} = P|_{B_S} \tag{6-7-26}$$

由沿流线的伯努利积分（对于完全气体的绝热可逆定常无粘流动）为

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} = \mathrm{const} \tag{6-7-27}$$



如果略去点 B_P 与点 B_S 处密度差异并注意式（6-7-26），于是由式（6-7-27）便可推出两侧速度相等，即

$$V\big|_{B_P} = V\big|_{B_S} \tag{6-7-28}$$

上式常被称为广义的库塔-儒柯夫斯基条件[36, 37]，并可作为可压缩无粘流场绕流计算时的尾缘条件。大量数值计算的实践证实[2, 3, 4, 38]：在无粘模型下，采用这一条件后计算出的可压缩流场其速度分布能较好地符合试验值。另外，1935 年，Howarth 将库塔-儒柯夫斯基的思想推广到钝后缘物体的绕流，给出了相应的准则，并指出在定常边界层的分离中，翼型的上表面和下表面分别各有一个分离点，它们是翼型尾迹的发源点。

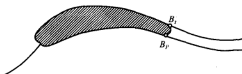


图 6.10 具有圆弧形后尾缘的机翼

6.7.4 非定常 K-Ж条件的简介

正如 Sears 所指出的那样，20 世纪初期，流体力学最重大、最有趣的发现之一是认识到边界层和环量之间的联系[39]。现在对于每一个学习空气动力学与气体动力学的学生来讲应该熟悉与掌握著名的 Kutta-Жуковский尾缘条件（简称为 K-Ж 条件或者 K-J 条件），应该知道如何根据边界层的分离、旋涡脱落以及总环量守恒等概念与理论去解释尾缘所发生的物理现象。另外，Sears 还重新研究了 Howarth 推广的广义 K-Ж 条件（用于钝后缘物体的绕流），并将它推广于非定常流动。在非定常流动中，剪切层分离起着重要的作用。然而，这一粘性现象所导致的后果是使涡量离开物面区域流向下游，也就是说要产生一定的涡通量，同时也使环绕物体的环量发生了变化。借助于非定常的 K-Ж 条件，可以决定这个涡通量的值，并且利用这个尾缘条件使绕流问题的解唯一，使求解过程大大简化。另外，非定常 K—Ж 条件采用后，能够在无粘流动的模型下求解线性非定常流动方程，得到附着涡及尾涡的变化规律，进而求得相应的气体动力参数随时间的变化。还可以用简化模型来预测非线性动力学的失速现象。这也就是说，可以认为粘性效应被局限于薄的物面边界层和尾迹区域内，而且分离尾迹也被局限于很薄的剪切层内，因此可以用涡片来描述有关的流动。这些涡片可以变形、卷起，形成一些离散的涡核。在涡片之间的流动假定为低能量的位势流场。应该指出，用简化模型分析非线性非定常问题，必须在每个时刻计算出分离点的位置，也就是说在每一个时间步都要求解边界层方程。但总的来讲，采用无粘流动模型加非定常尾缘条件的方法，其计算量还是相对较小的，因而使它具有较大的应用潜力。另外还需指出的是，非定常 K-Ж条件是一个有待进一步去完善的研究课题之一，因篇幅所限本书不准备展开讨论，这里只介绍几

篇重要文献以便感兴趣者参阅。例如，Crighton（1985 年）[40]曾详细评述了非定常流动时的尾缘条件，Goldstein（1989 年）等[41]详细分析了涡的感受性以及波涡共振问题中 K–Ж条件的作用。再如，Giesing（1969 年）[42]详细分析了非定常 K–Ж 条件的使用以及更进一步的改进。另外，Poling（1986 年）等[43]详细的测量了 NACA0012 翼型作非定常振荡运动时所产生的流场，非常细致的给出了尾缘附近的流场细节，这就为更好的认识与改进非定常 K–Ж 条件提供了实验依据。

参 考 文 献

1 《吴仲华论文选集》编辑委员会. 吴仲华论文选集. 北京：机械工业出版社，2002
2 刘高联，王甲升. 叶轮机械气体动力学基础. 北京：机械工业出版社，1980
3 王仲奇. 透平机械三元流动计算及其数学和气动力学基础. 北京：机械工业出版社，1983
4 李根深，陈乃兴，强国芳. 船用燃气轮机轴流式叶轮机械气动热力学（上下册）. 北京：国防工业出版社，1980
5 沈孟育，周盛，林保真. 叶轮机械中的跨音速流动. 北京：科学出版社，1988
6 吴仲华. A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial, and mixed-flow types. Trans, ASME (1952), or NACA TN2604, 1952
7 忻孝康，刘儒勋，蒋伯诚.计算流体动力学. 长沙：国防科技大学出版社，1989
8 张涤明，蔡崇喜，章克本等.计算流体力学. 广州：中山大学出版社，1991
9 苏铭德，黄素逸. 计算流体力学基础. 北京：清华大学出版社，1997
10 马铁犹. 计算流体动力学. 北京：北京航空学院出版社，1986
11 傅德薰. 流体力学数值模拟. 北京：国防工业出版社，1993
12 吴江航，韩庆书. 计算流体力学的理论、方法及应用. 北京：科学出版社，1988
13 Sears W R. General theory of high speed aerodynamics. New Jersey: Princeton University Press, 1954
14 卞荫贵. 理想气体动力学（上册、中册）. 北京：中国科学技术大学，1966
15 华罗庚. 高等数学引论（第一卷）. 北京：科学出版社，1963
16 姚傲秋，刘世兴，方人淞.实用气体动力学（上、下册）北京：北京科学教育出版社，1961
17 朱民. 空气动力学（下册）. 北京：北京科学教育出版社，1963
18 徐华舫. 空气动力学基础. 北京：北京航空学院出版社，1987
19 时爱民，苏铭德，刘季稔. 气体动力学基础. 北京：科学出版社，1988
20 潘锦珊. 气体动力学基础（修订版）. 北京：国防工业出版社，1989
21 童秉纲，孔祥言，邓国华. 气体动力学. 北京：高等教育出版社，1990
22 Chaplygin C A. Uber gasstrahlen. Wiss. Ann. Univ. Moskau Math. Phys. 21:1～121 (1904) or NACA TM 1063
23 Sauer R. Theoretische infuhrung in die gasdynamik. Berlin: 1943



24 查浦雷金・论气体射流. 庄逢甘译. 北京：科学出版社，1955

25 夏皮罗. 可压缩流的动力学与热力学（上册）. 陈立子等译，潘杰元等校. 北京：科学出版社，1966

26 Poinsot T J，Lele S K，Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. J Comput，Phys.，1992，101:104～129

27 Thompson K W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems II. J. Comput. Phys.，1990，89:439～461

28 Kochin N E，Kibel I A，Roze N V. Theoretical hydromechanics. (Translated by D Boyanovitch). London: The Gresham，1964

29 Milne-Thomson L M. Theoretical aerodynamics. London: Macmillan Press，1966

30 Theodorsen T. Garrick I E. General potential theory of arbitrary wing sections. NACA TR 452 (1933)

31 尼・叶・柯钦. 叶栅的流体动力学理论. 北京：科学出版社，1958

32 郭敦仁. 数学物理方法. 北京：人民教育出版社，1965

33 格・列・伦兹，列・埃・艾尔斯哥尔兹. 复变函数与运算微积分初步. 熊振翔等译. 北京：人民教育出版社，1960

34 Milne-Thomson L M. Theoretical hydrodynamics. London: Macmillan Press，1979

35 Howarth L. Modern developments in fluid dynamics (high speed flow). Oxford: Clarendon Press，1956

36 ЖуковскийМ И. Расчет обтекания произволъной решетки профи-лей и построение решеток по задаваемому аспределению скор-остей. ЦКТИ. 27，(1954)

37 Жуковский В С. Аэродинамиче ское совер шенствованиелопаточных аппаратов паровых и газовых турбин. ГЭИ, Москва, (1960)

38 吴仲华，王保国. Matrix solution of compressible flow on S_1 surface through a turbomachine blade row with splitter vanes or tandem blades. Trans. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power，1984，106:449～454

39 Sears W R. Unsteady motion of airfoils with boundary-layer separation. AIAA J. 1976，14(2)

40 Crighton D G. The Kutta condition in unsteady flow. Ann. Rev. Fluid Mech. 1985，17:411～445

41 Goldstein M E，Hyltgren L S. Boundary-layer receptivity to long wave free stream disturbances. Ann. Rev. Fluid Mech. 1989，21: 137～166

42 Giesing J P. Vorticity and Kutta condition for unsteady multienergy flow. J. of Applied Mechanics，1969，36(3)

43 Poling D R，Telionis D P. The response of airfoils to periodic disturbances — the unsteady Kutta condition. AIAA J. 1986，24(2)

44 王保国，吴仲华.含分流叶栅或串列叶栅的 S_1 流面上可压缩流动矩阵解.工程热物理学报，1984，5(1):18～26

45 宁晃，高歌. 燃烧室气动力学（第二版）. 北京：科学出版社，1987



习 题

1. 对于完全气体的二维、定常、无旋、绝热等熵流动，试写出（6－1－16）*式 $\Sigma^{\gamma+1}-\Sigma^2+\phi=0$ 的具体形式。并用 FORTRAN 语言或 C 语言编制任给定一个 ϕ 值后求 Σ 的程序，这里要求该程序应该具有能够分辨出亚声速流动解与超声速流动解的功能。

2. 吴仲华教授提出了用 S_1 与 S_2 流面迭代的办法求解三维定常流动的数值方法，试用自己的语言描述一下 S_1 流面与 S_2 流面的构成与迭代过程以及如何准确的用沿流面导数的概念去描述在这样的两类流面上气流的流动过程。

3. 对于平面无旋二维流动，通常说"流函数等值线与等势线垂直"，这句话的含义是什么？欲使这个结论成立的条件（除了二维、无旋流动之外）还有哪些？（一定是不可压流吗？一定是可压缩流吗？）使用这些条件后如何去证明这个结论？

4. 对于完全气体的定常、无粘、等熵、无旋流动，试从基本方程式（6－1－26）、式（6－1－41）、式（6－1－48）出发，证明圆柱坐标系下的小扰动速度势线化方程为

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial\theta^2}=0 \qquad (*1)$$

5. 试证明：对于不可压缩完全气体的无粘、平面流动，其线化压强系数为

$$C_P=-2\frac{u'}{V_\infty}$$

6. 有一翼型其几何尺寸如图 6.11 所示（这里 b 为弦长，t 为最大厚度，f 为翼型的弯度），$t/b=0.05$，$f/b=0.02$，$\alpha=4°$ 在低速风洞吹风，当 $\alpha=4°$ 时测得升力系数为 0.8，试求：

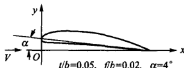


图 6.11 翼型剖面及有关尺寸

（1）当 $M_\infty=0.6$ 时，仿射相关翼型的厚度比、弯度比和攻角？

（2）当 $M_\infty=0.6$ 时，同一个低速翼型及其相关仿射翼型的升力系数分别为多少？

7. 设有来流马赫数 M_∞=0.4 和 $\alpha=1°$ 的无粘气流绕弦长为 b 的翼型流动，翼型上各点的压力系数如下：

$\frac{x}{b}$/%	0	10	30	50	70	90
C_p	0.20	−0.45	−0.35	−0.24	−0.17	0.04

试用 P-G 相似律计算 $M_\infty=0.8$，$\alpha=1°$ 时翼型上相应点的压力系数值？

8. 对于完全气体的定常、无粘、二维平面流动，试用流线坐标系中的微元体，如图 6.12 所示，证明：

（1）如果以 $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}A$ 表示单位面积上的环量（这里 Γ 与 A 分别表示环量与面积）时，则



有

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}A}=\frac{\mathrm{d}\Gamma}{R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}n}=-\frac{\partial V}{\partial n}-\frac{V}{R} \tag{*2}$$

（2）沿流线垂直方向（即 n 方向）上的定常 Euler 方程为

$$\frac{\partial P}{\partial n}=\frac{\rho V^2}{R} \tag{*3}$$

（3）如果令 $2\omega=\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}A$ 时，则有

$$2\omega=-\frac{\partial V}{\partial n}-\frac{1}{\rho V}\frac{\partial P}{\partial n} \tag{*4}$$

（4）二维定常流动下克罗柯（Crocco）定理的特殊形式为

$$2\omega=\frac{1}{V}\left(T\frac{\partial S}{\partial n}-\frac{\partial H}{\partial n}\right) \tag{*5}$$

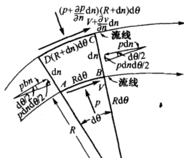


图 6.12　流线坐标系中的微元体分析

这里 S 和 H 分别为熵与总焓。

9. Karman–钱学森提出切线气体的近似，试在这个近似下证明滞止压强与自由来流有如下关系式。

（1）

$$\frac{P_0}{P_\infty}=1+\gamma\left(1-\sqrt{1-M_\infty^2}\right) \tag{*6}$$

（2）若完全气体的状态沿着切线气体所规定的状态曲线变化时，则熵的变化将由下式给出：

$$\frac{\mathrm{d}S}{C_V}=\frac{(\gamma+1)(P_\infty-P)}{(\gamma+1)P_\infty-P}\frac{\mathrm{d}P}{P} \tag{*7}$$

这里 C_V 为定容比热。

10. 在无粘、二维、可压缩叶栅流场计算时，为了得到与实际流动相接近的流场，所以 Kutta–Жуковский 尾缘条件要经常使用。这里给出一个含分流叶栅 S_1 流场采用流函数算法的典型算例，其流函数主方程与边界条件如下

（1）主方程

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{a_1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}-\frac{a_2}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{a_3}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}-\frac{a_2}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)=a_4\left(\frac{\partial H}{\partial x^2}-T\frac{\partial S}{\partial x^2}\right) \tag{*8}$$

式中，a_1,a_2,a_3 和 a_4 为主方程的系数。

（2）边界条件

① 进口区边界 A_1A_2：给定总温 $(T_0)_i$，总压 $(P_0)_i$，气流角 β_i 以及来流的马赫数 M_i 并假

定来流是均匀的。

② 进口区周期边界 $\widehat{A_1C_1}$ 与 $\widehat{A_2C_2}$ 上的气动参数满足周期性条件

$$f(x^1, x^2 \pm \Delta x^2) = f(x^1, x^2) \tag{*9a}$$

式中，f 为任意一个气动参数，Δx^2 为 A_1A_2 间的距离；流函数应满足

$$\psi(x^1, x^2 \pm \Delta x^2) = \psi(x^1, x^2) \pm G \tag{*9b}$$

这里 G 为叶栅通道中的流量。

③ 出口区周期边界 D_1B_1 与 D_2B_2 上的气动参数满足周期性条件

$$f(x^1, x^2 \pm \Delta x^2) = f(x^1, x^2) \tag{*9c}$$

其 f 与 Δx^2 的含义同式（*9a）；流函数也应满足式（*9b）。

④ 叶栅区：叶栅的内弧与背弧均为流线，即

$$\psi \Big|_{\widehat{C_2E_2D_2}} = \text{const}, \quad \psi \Big|_{\widehat{C_1E_1D_1}} = \text{const} \tag{*9d}$$

$$\psi \Big|_{\widehat{FK_1G}} = \text{const}, \quad \psi \Big|_{\widehat{FK_2G}} = \psi_{st} = \text{const} \tag{*9e}$$

⑤ 出口的边界 B_1B_2：对于全场亚声速流动，出口区 B_1B_2 处的气动参数不宜直接给定。

⑥ 在叶栅尾缘采用广义 Kutta–Жуковский 条件：

$$|V|_S = |V|_P \tag{*9f}$$

式中，注脚 S 与 P 分别表示尾缘条件所要求的那两个点；另外，流函数 ψ 与密度 ρ 之间满足式(6-1-16)*。令分流叶栅或者一般叶栅它们尾缘处那两点的速度差为

$$W \equiv V_S - V_P \tag{*10}$$

并且令主叶片 $C_1E_1D_1$ 尾部的 W 值为 W_1，分流叶片 FK_1G 的为 W_2，于是 W_1 与 W_2 都是出气角 β_2 与分流叶片上的流函数 ψ_{st} 的函数，即

$$W_1 = W_1(\beta_2, \psi_{st}), \quad W_2 = W_2(\beta_2, \psi_{st}) \tag{*11}$$

如果选用流函数法解含分流叶栅的 S_1 流场，则其计算过程可由下面的五步完成，即

第①步：给定 β_2 与 ψ_{st} 的值；

第②步：解流函数方程（*8）式得到相应的流函数场 $\{\psi\}$ 与密度场 $\{\rho\}$，并得到这时主叶片与分流叶片尾缘处 W_1 与 W_2 的值。

第③步：在重复进行前面两步之后得到一组 W_1 与 W_2 的值，然后选用一种插值方法（例如二元 Lagrange（拉格朗日）插值法或其他方法）构造两个辅助函数 $\tilde{W}_1$ 与 $\tilde{W}_2$，它们都是 β_2 与 ψ_{st} 的函数。

第④步：根据 Kutta—Жуковский 条件，于是求解如下代数方程组



$$\begin{cases} \tilde{W}_1(\beta_2, \psi_{st}) = 0 \\ \tilde{W}_2(\beta_2, \psi_{st}) = 0 \end{cases} \tag{*12}$$

得到该问题所要求的出气角 β_2 以及分流叶片上流函数 ψ_{st} 的值。

第⑤步：用第④步得到的 β_2 与 ψ_{st} 值去执行第②步，便得到本问题的解。

用上述方法，文献[44]成功的在任意 S_1 流面上获得了含分流叶栅与串列叶栅的可压缩流动矩阵解。今给出关于 β_2 与 ψ_{st} 以及 W_1 与 W_2 的数据如下（这里 $i=1\sim2, j=1\sim2$）：

i,j	1	2
$(\beta_2)_i$	0.239	0.395
$(\psi_{st})_j$	52.4	55.6

(i,j)	（1，1）	（1，2）	（2，1）	（2，2）
$(W_1)_{ij}$	0.51143	0.62202	0.20979	0.34402
$(W_2)_{ij}$	0.18307	0.06933	0.19221	0.30164

（1）试用 FORTRAN 语言或 C 语言编制构造辅助函数 $\tilde{W}_1$ 与 $\tilde{W}_2$ 的源程序以及求解（*12）式的源程序，并用所编程序及上述有关数据计算出所要求的出气角 β_2 与分流叶片上的 ψ_{st} 值。

（2）用流函数方法编制二维平面亚声速流动时，含分流叶栅 S_1 流场计算的源程序，并用第（1）小题的结果完成该流场的计算。算出全场流函数的分布、密度的分布与全场速度的分布，并做出相应全场等值线分布图。

11. 沙丘驻涡现象是文献[45]提出并加以分析与研究的一个物理现象。文献[45]的作者利用沙丘阻力小而且驻涡稳定性好的特点，发明了沙丘驻涡火焰稳定器。试用流函数方法计算二维沙丘驻涡流场，并绘制出驻涡流场图（计算时取来流的马赫数 $M_\infty=0.38$，其他气动参数取 15℃时标准大气条件。计算中，沙丘的剖面形状可参阅文献[45]的图 17.12）。

第 7 章　二维及三维跨声速定常流动

跨声速流动是这样的一类流场，在这类流场中既含有亚声速区，又含有超声速区，例如来流马赫数 M_∞接近于 1 的气体绕细长或扁薄物体的流动，或者钝头物体超声速绕流时在头部激波后面的流动；或者在拉伐尔喷管喉部附近的流动等这些都是跨声速流场的典型实际例子。

从数学上讲，对于定常跨声速流动，其控制微分方程是非线性混合型的。也就是说：在亚声速区是椭圆型方程，而在超声速区是双曲型方程。所有这些都给流场的求解带来困难。从物理上讲，当流动由超声速流动过渡到亚声速流动时往往是通过激波实现的，因此，在跨声速流场中经常含有局部激波。也就是说，这类流场含有激波间断，这就给数值求解带来更大的困难。

本章首先讲述跨声速流动的一般规律，接着讨论了三类描述跨声速流动的控制方程，它们是：第一类欧拉方程，该方程最能确切地描述无粘流动，包括有旋流动。第二类全速度势方程，该方程适用于无旋流动。比如，在 $M_\infty<1.3$，攻角 $\alpha<2°$ 情形下，尖薄物体绕流的流场中熵的变化可以忽略，除了尾流区以外，可以认为流场是无旋的。第三类跨声速小扰动势方程。本章不可能全面介绍跨声速流动理论，因此只能着重论述定常跨声速流动的主要特征，并且简单介绍上述三类方程的某些数值解法，其中包括二维小扰动方程，二维流函数方程和三维跨声速速度势方程的数值求解等。

§7.1　跨声速流动的一般论述

7.1.1　临界马赫数和临界压力

当定常亚声速气流流经物体表面弯曲部位时，与来流相比，有的地方流管变细，有的地方流管变粗。流管变细处物面上的气流马赫数 M 高于远前方来流马赫数 M_∞，而压力 P 低于远前方来流的静压 P_∞；流管变粗处物面上 M 低于 M_∞，而压力 P 高于 P_∞。而物面压强最低点处，当地气流马赫数最大。随着来流马赫数增大，物面附近的流速也随之增大。当来流马赫数 M_∞ 在亚声速范围内增高到某个值，使物面上最低压强点的流速达到当地声速时，则这时的来流马赫数称为临界马赫数 M_{cr}。而这时物面上最低压强点的压强称为临界压力 P_{cr}。当 M_∞ 稍大于 M_{cr} 时，物面上将出现超声速区。对不同的物体绕流，临界马赫数的数值当然



是不同的。下面推导临界压力 P_{cr} 与临界马赫数 M_{cr} 之间的关系。设最低压强点之前流动是等熵的，于是流场中某点压力 P 与来流静压 P_∞ 之比为

$$\frac{P}{P_\infty}=\left(\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{7-1-1}$$

当该点压力达到临界压力即 $P=P_{cr}$ 时，则 $M=1$，$M_\infty=M_{cr}$。把它们代入上式便得到

$$\frac{P_{cr}}{P_\infty}=\left(\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{7-1-2}$$

由此可得流场中 $M=1$ 点的临界压力系数 Cp_{cr} 为

$$\begin{aligned}Cp_{cr}&=\frac{P_{cr}-P_\infty}{\dfrac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}=\frac{P_{cr}-P_\infty}{\dfrac{1}{2}\gamma P_\infty M_{cr}^2}=\frac{2}{\gamma M_{cr}^2}\left(\frac{P_{cr}}{P_\infty}-1\right)\\&=\frac{2}{\gamma M_{cr}^2}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right]\end{aligned} \tag{7-1-3}$$

这就是等熵流动时，临界压力系数 Cp_{cr} 与临界马赫数 M_{cr} 间的关系式[1-6]。

7.1.2　绕过翼型和尖头旋成体的跨声速流动

一、翼型和尖头旋成体跨声速绕流的物理图像

关于翼型的跨声速定常绕流图像，可由图 7.1 作定性描述。该图对应于攻角 $\alpha=2°$ 的一种层流翼型，描述了通过实验观察到的翼面流动图像随 M_∞ 的变化情况以及翼面附近激波的产生和发展。由此便可以看出气动力特性的某些变化。当来流马赫数 $M_\infty<M_{cr}$ 时，上下表面的气流全部是亚声速的。当 $M_\infty=M_{cr}$ 时，上翼面某点气流达到声速。当 M_∞ 稍大于 M_{cr} 时，上翼面有小范围的超声速区，如图 7.1（a）所示。图中用点画线表示的是声速线，线上气流马赫数 $M=1$，线内是超声速区，线外是亚声速区。由于这时超声速区比较小，区内 M 只是稍大于 1，气流从低超声速到高亚声速基本上是光滑过渡的，没有产生激波或者说即使产生了激波也很弱。因而翼面上的压力分布也基本上是光滑的；若来流 M_∞ 继续增大，上表面的超声速区随之扩大，并出现了激波，如图 7.1（b）所示。这时压力在激波前后出现跃变，因而气流跨越激波有熵增；若 M_∞ 再增大，上表面的超声速区继续扩大，激波位置后移，强度增大，波阻系数也随之增大，这种引起波阻迅速增加的现象称为阻力骤增，它所对应的 M_∞ 称为阻力骤增马赫数，并用 M_D 表示；此外，由于边界层内逆压力梯度剧增，可能导致



边界层分离，使升力系数骤然下降，这个现象称为激波失速。另外，在上表面激波后移的过程中，下表面也可能出现激波，并且迅速移到后缘，如图 7.1（c）所示，这时上下翼面大部分区域都是超声速流动。

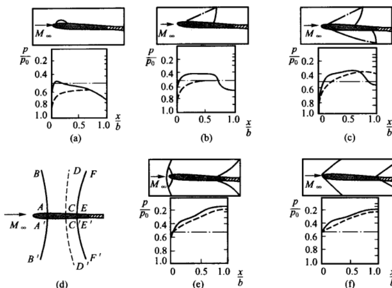


图 7.1　翼型的跨声速绕流图像

（a）M_∞=0.75；（b）M_∞=0.81；（c）M_∞=0.89；

（d）M_∞=1.00；（e）M_∞=1.4；（f）M_∞=1.6

当 $M_\infty=1.00$ 时，如图 7.1（d）所示，有尾激波 EF 自物面一直延伸到无穷远。在翼型前部，声速线 AB 也是如此。AB 的左边是亚声速区域，AB 的右边是超声速区域。从物面 AE 部分发出的特征线可分为两类：第一类是从 AC 那部分物面发出的特征线，它们以声速线 AB 为终点。第二类是从 CE 那部分物面发出的特征线，它们以激波 EF 为终点。这两类特征线以一条曲线 CD 为分界线，该曲线称为极限特征线；当 M_∞ 稍大于 1 时，翼面前方出现脱体激波，并且随着 M_∞ 增大，脱体激波逐渐向翼型前缘接近，如图 7.1（e）所示。由于脱体激波中间一段是与正激波相仿的强激波，因此在脱体激波与翼型前缘之间的小范围内，气流是亚声速的。这些亚声速气流沿翼面向后不断加速而达到超声速；若 M_∞ 再增大，前缘激波开始附体（对于尖前缘的绕流而言），整个流场变成了纯超声速流动，如图 7.1（f）所示。

下面讨论锥一柱旋成体跨声速绕流的物理图像。图 7.2 是对半顶角 $\delta=25°$ 的锥–柱旋成体绕流的试验结果。当 M_∞ 略大于 1 时，圆锥前方形成脱体激波。随着 M_∞ 增大，激波附体。起初是曲面激波，激波曲面与锥面之间有较大的亚声速区，如图 7.2（a）中阴影区所示。



图中点画线是声速线，线之下游是超声速区，线之上游是亚声速区；如果 M_∞ 继续增大，则亚声速区逐渐缩小，直至完全消失。激波面也形成一个圆锥面，它的后部有些弯曲。对于圆锥绕流，激波后缘的压力低于锥面上的压力，因而这里的速度高于锥面上的速度。当然，激波后的气流还要经过一个等熵压缩的过程，图中的等 M 数线便反映了这个过程。因此可以推知：如果从一个适当大的 M_∞ 开始，让 M_∞ 减小，则一定存在着某个大于 1 的来流 M_∞，使激波后缘仍为超声速气流，但圆锥物面上已经是亚声速气流了，如图 7.2（b）所示。

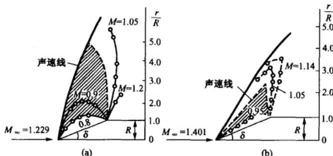


图 7.2　锥–柱旋成体的跨声速绕流

二、超声速气体绕钝头体的流动图像

超声速气体绕钝头体的流动如图 7.3 所示。在物体前面有一道脱体激波，激波后面的流场是跨声速流场。激波与物面之间有一个亚声速区。声速曲面（二维情形是声速线）把亚声速区和超声速区隔开，声速线下游是超声速区。这里应当指出的是：声速线下游的超声速区又可分为两个小区域。考虑低超声速（如 $M_\infty<2$）气体绕过一个圆球或圆柱，如图 7.3（a）所示。这里只讨论上半部（下半部与上半部对称）。如果由物体上某一点 B 发出的第I族特征线正好通过声速线 AC 与激波的交点为 C，则左伸特征线 BC 就称之为极限特征线。超声速区的两个区域就是被极限特征线所隔开。由声速线、极限特征线和物体周边围成一个三角形区域，在图中用阴影区表示。在这阴影区中，由物面发出的第I族特征线总是与声速线 AC 相交。由于物面的扰动是沿着从物面出发的第I族特征线传播，并将到达亚声速区的边界，因此，阴影区中发生的任何扰动，都会影响到整个亚声速区。特别地，点 A 与 B 之间的物面形状将影响到声速线的形状和亚声速区的流动。而极限特征线下游的超声速区内的任何扰动决不会对上游区域，包括亚声速区域和超声速阴影区的流动产生任何影响。所以，若用特征线法计算绕钝头体的流动，则所选用的起始数据线只能是极限特征线或其下游的曲线，而不能用它的上游阴影区内的任何曲线来代替。关于这点需要格外注意。随着来流马赫数增高，脱体激波位置离物体更近，亚声速区变小，激波后缘的声速点显著的往中间移动，而物面上声速点移动得很少。因而，在高马赫数（如 $M_\infty\approx5$）下，声速线和阴影区的形状与低 M_∞ 下相比有明显差别，见图 7.3（b）。同样地，通过激波后缘某点 B 的第II族（右伸）特征线正



好与声速线 AC 相交于 C 并且点 C 又在物面上，则特征线 BC 就是极限特征线。阴影区是声速线、极限特征线和脱体激波所围成的三角形区域。超声速阴影区中的任何扰动沿着右伸特征线传播，并与声速线相交，因而影响亚声速区域的流动。

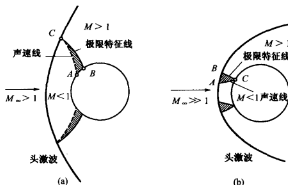


图 7.3　超声速气体绕钝头体的流动

§7.2　三维跨声速流动的相似律

相似律具有如下含义：当两个流场所满足的量纲为 1 的方程和无量纲边界条件一样时，则彼此的气动力参数可以通过一些无量纲为 1 的组合参数进行计算，因此这些组合参数所建立的一族流动参数之间的关联，就称为这类流动的相似律。当然，这里所讨论的两个绕流物体的外形应当具有某种仿射相关的性质。下面就讨论三维机翼和旋成体绕流的相似律问题。

7.2.1　三维薄翼跨声速绕流的相似律

在直角坐标系中，跨声速小扰动速度势方程式（6-2-16）为

$$\left(1-M_\infty^2-\frac{\gamma+1}{V_\infty}M_\infty^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (7-2-1)$$

设有两个跨声速薄翼绕流的流场，其气流参数与机翼参数分别用下标 1 和 2 表示，它们都满足方程式（7-2-1）。于是有

$$\left(1-M_\infty^2\right)_1\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_1+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_1+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_1=\left(\frac{\gamma+1}{V_\infty}M_\infty^2\right)_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_1, \qquad (7-2-2)$$



$$\left(1-M_{\infty}^{2}\right)_{2}\left(\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x^{2}}\right)_{2}+\left(\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial y^{2}}\right)_{2}+\left(\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial z^{2}}\right)_{2}=\left(\frac{\gamma+1}{V_{\infty}}M_{\infty}^{2}\right)_{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{2}\left(\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x^{2}}\right)_{2} \tag{7-2-3}$$

假设这两个流场对应点的坐标和流动参数之间有如下关系

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = s_x x_1,\quad y_2 = s_y y_1,\quad z_2 = s_z z_1 \\ V_{\infty 2} = s_V V_{\infty 1},\quad B_2 = s_B B_1,\quad \Gamma_2 = s_\Gamma \Gamma_1 \end{array}\right\} \tag{7-2-4}$$

其中　$B_i=\sqrt{\left|1-M_{\infty}^{2}\right|_i}$，$\Gamma_i=\left[(\gamma+1)M_{\infty}^{2}\right]_i$，（$i=1$，2）　(7-2-5)

并且小扰动势φ_2与φ_1之间有如下关系

$$\varphi_2 = s_\varphi \varphi_1 \tag{7-2-6}$$

这里s_x、s_y、s_z、s_V、s_B、s_φ、s_Γ等均为比例常数。显然，由上面几个关系式可得

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1=\frac{s_x}{s_\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2,\quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_1=\frac{s_x^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1=\frac{s_y}{s_\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_2,\quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_1=\frac{s_y^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1=\frac{s_z}{s_\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_2,\quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_1=\frac{s_z^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_2 \end{array}\right\} \tag{7-2-7}$$

将式（7-2-4）～式（7-2-7）代入到式（7-2-2）

$$\pm\frac{s_x^2}{s_B^2}\frac{B_2^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2+\frac{s_y^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_2+\frac{s_z^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_2=\frac{s_V}{s_\Gamma}\frac{s_x^3}{s_\varphi^2}\frac{\Gamma_2}{V_{\infty 2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2 \tag{7-2-8}$$

值得注意的是，上式左边的第一项，取正号对应于亚声速来流，取负号对应于超声速来流。而式（7-2-3）又可改写为

$$\pm B_2^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_2=\frac{\Gamma_2}{V_{\infty 2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2 \tag{7-2-9}$$

比较式（7-2-8）与式（7-2-9）后可知，只有当组合量满足以下关系

$$\frac{s_x^2}{s_B^2 s_\varphi}=\frac{s_y^2}{s_\varphi}=\frac{s_z^2}{s_\varphi}=\frac{s_V s_x^3}{s_\Gamma s_\varphi^2} \tag{7-2-10}$$

时，才能通过（7-2-4）与（7-2-6）式的变换，将第一个机翼流场的扰动速度势所满足的方程变成为第二个机翼流场的扰动速度势所满足的方程，从而使两个流场之间建立起相似关系。于是将式（7-2-10）改写成

$$\frac{s_y s_B}{s_x}=1,\ \text{或}\ \frac{s_y}{s_x}=\frac{1}{s_B} \tag{7-2-11}$$

$$\frac{s_y}{s_z}=1\text{，或}\quad s_y=s_z \tag{7-2-12}$$

$$\frac{s_x^2}{s_B^2 s_\varphi}=\frac{s_V s_x^3}{s_\Gamma s_\varphi^2}\text{，或}\quad \frac{s_\varphi}{s_V s_x}=\frac{s_B^2}{s_\Gamma} \tag{7-2-13}$$

由式（7－2－11）与式（7－2－12）可知，第一个机翼与第二个机翼的展弦比λ之间必须满足如下关系

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{s_y}{s_x}=\frac{1}{s_B}=\frac{B_1}{B_2}$$

即

$$B_2\lambda_2=B_1\lambda_1 \tag{7-2-14}$$

而两个机翼后掠角χ之间必须满足的关系式为

$$\frac{\tan\chi_2}{\tan\chi_1}=\frac{s_x}{s_y}=s_B=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

即

$$\lambda_2\tan\chi_2=\lambda_1\tan\chi_1 \tag{7-2-15}$$

由此可得出结论：只有当两个机翼的展弦比λ和后掠角χ满足关系式（7－2－14）和式（7－2－15），并且两个扰动速度势的比值s_φ满足式（7－2－13）时，两个机翼的流场才能用同一个跨声速非线性小扰动速度势方程来描述。

下面讨论两个流场边界条件之间的关系。设两个薄翼翼面的纵坐标z都可表示成

$$z_i=b_{mi}\bar{c}_{mi}f_i\left(\frac{x_i}{b_{mi}},\frac{y_i}{l_i}\right)\ (i=1,\ 2) \tag{7-2-16}$$

式中，b_m表示机翼的平均几何弦长；$\bar{c}_m$表示机翼的平均相对厚度；l表示机翼的半展长；$f\left(\frac{x}{b_m},\frac{y}{l}\right)$表示机翼翼面形状函数。

对小攻角薄翼，绕流边界条件可认为在z=0平面上满足边界条件。因此，两个机翼的绕流边界条件为

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1\bigg|_{z_1=0}=V_{\infty1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1}=V_{\infty1}\bar{c}_{m1}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{x}{b_m}\right)_1}f_1\left(\frac{x_1}{b_{m1}},\frac{y_1}{l_1}\right) \tag{7-2-17}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_2\bigg|_{z_2=0}=V_{\infty2}\frac{\partial z_2}{\partial x_2}=V_{\infty2}\bar{c}_{m2}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{x}{b_m}\right)_2}f_2\left(\frac{x_2}{b_{m2}},\frac{y_2}{l_2}\right) \tag{7-2-18}$$



根据式（7-2-4）、式（7-2-6）及式（7-2-7）的变换关系，于是第一个机翼的边界条件可改写成

$$\frac{s_z}{s_\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_2\bigg|_{z_2=0}=\frac{V_{\infty 2}}{s_V}\overline{c}_{m1}\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{x}{b_m}\right)_2}f_1\left(\frac{x_1}{b_{m1}},\frac{y_1}{l_1}\right) \tag{7-2-19}$$

若两个机翼的形状函数相同，即

$$f_1\left(\frac{x_1}{b_{m1}},\frac{y_1}{l_1}\right)=f_2\left(\frac{x_2}{b_{m2}},\frac{y_2}{l_2}\right) \tag{7-2-20}$$

则将式（7-2-18）与式（7-2-19）进行比较，便可以得出结论：当两个机翼的平均相对厚度 $\overline{c}_m$ 满足关系式

$$\overline{c}_{m2}=\frac{s_\varphi}{s_V s_z}\overline{c}_{m1} \tag{7-2-21}$$

时，则两个机翼绕流边界条件便有可能用同一个量纲为 1 的方程来描述。另外，由式（7-2-11）和式（7-2-13），有

$$\frac{s_\varphi}{s_V s_x}=\frac{s_\varphi}{s_V s_z s_B}=\frac{s_B^2}{s_\Gamma}$$

即

$$\frac{s_\varphi}{s_V s_z}=\frac{s_B^3}{s_\Gamma} \tag{7-2-22}$$

将式（7-2-22）代入式（7-2-21）便得到式（7-2-23），这表明：要使两个机翼的绕流边界条件能够用同一个方程来描述，则两个机翼平均相对厚度便应满足如下关系

$$\overline{c}_{m2}=\frac{s_B^3}{s_\Gamma}\overline{c}_{m1} \tag{7-2-23}$$

注意到式（7-2-4）便可得到

$$\frac{B_2}{(\Gamma_2\overline{c}_{m2})^{1/3}}=\frac{B_1}{(\Gamma_1\overline{c}_{m1})^{1/3}} \tag{7-2-24}$$

现在引入仿射相关机翼的概念：定义翼面形状函数相同，并且展弦比λ、后掠角χ和平均相对厚度 $\overline{c}_m$ 分别满足式（7-2-14）、式（7-2-15）和式（7-2-24）的两个机翼称为仿射相关机翼。利用两个仿射相关机翼流场中各比例常数之间的关系式，即式（7-2-11）、式（7-2-12）、式（7-2-13）和式（7-2-24）便可建立起两个仿射相关薄翼跨声速气动力特性之间的相互关系，这就是要讨论的薄翼跨声速绕流的相似律。下面推导压力系数的相

似律。根据上面的分析可知，两薄翼面上对应点$\left(\frac{x_1}{b_{m1}}=\frac{x_2}{b_{m2}},\frac{y_1}{l_1}=\frac{y_2}{l_2},\frac{z_1}{x_1}=\frac{S_\Gamma}{S_B^3}\frac{z_2}{z_2}\right)$的压力系数

C_{p1}与C_{p2}有如下关系

$$C_{p2}=-\frac{2}{V_{\infty2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2=\frac{s_\varphi}{s_V s_x}\left[-\frac{2}{V_{\infty1}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1\right]=\frac{s_\varphi}{s_V s_x}C_{p1} \quad (7-2-25)$$

由于两个薄翼仿射相关，利用式（7-2-13）与式（7-2-24）可将上式改写为

$$C_{p2}=\frac{s_B^2}{s_\Gamma}C_{p1}=\frac{\overline{c}_{m2}}{\overline{c}_{m1}s_B}C_{p1}=\left(\frac{\overline{c}_{m2}}{\overline{c}_{m1}}\right)^{2/3}\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\right)^{1/3}C_{p1} \quad (7-2-26)$$

或

$$\left(\frac{\Gamma_2}{\overline{c}_{m2}^2}\right)^{1/3}C_{p2}=\left(\frac{\Gamma_1}{\overline{c}_{m1}^2}\right)^{1/3}C_{p1} \quad (7-2-27)$$

上式表明：当两个薄翼的组合参数$B\lambda$、$\lambda\tan x$、$\frac{B}{(\overline{c}_m\Gamma)^{1/3}}$相同，即两个薄翼仿射相关时，则两翼面对应点处压力系数C_p与$\left(\Gamma/\overline{c}_m^2\right)^{1/3}$的乘积相等。换句话说，跨声速小扰动流场的$\left(\Gamma/\overline{c}_m^2\right)^{1/3}C_p$值是组合参数

$$B\lambda,\ \lambda\tan x,\ \frac{B}{(\overline{c}_m\Gamma)^{1/3}},\ \frac{x}{b_m}\text{和}\frac{y}{l}$$

的函数，可以用如下的表达式进行表达，即

$$\left(\frac{\Gamma}{\overline{c}_m^2}\right)^{1/3}C_p=F\left(B\lambda,\lambda\tan x,\frac{B}{(\overline{c}_m\Gamma)^{1/3}},\frac{x}{b_m},\frac{y}{l}\right) \quad (7-2-28)$$

即

$$C_p=\frac{\overline{c}_m^{2/3}}{\Gamma^{1/3}}F\left(B\lambda,\lambda\tan x,\frac{B}{(\overline{c}_m\Gamma)^{1/3}},\frac{x}{b_m},\frac{y}{l}\right) \quad (7-2-29)$$

这里 F（*，*，*，*，*）是关于五个组合参数的函数。考虑到参数$B\lambda$除以$\frac{B}{(\Gamma\overline{c}_m)^{1/3}}$等于$\lambda(\Gamma\overline{c}_m)^{1/3}$，故上式可改写为

$$C_p=\frac{\overline{c}_m^{2/3}}{\Gamma^{1/3}}F_1\left(B\lambda,\lambda\tan x,\lambda(\overline{c}_m\Gamma)^{1/3},\frac{x}{b_m},\frac{y}{l}\right) \quad (7-2-30)$$



这就是三维薄翼跨声速绕流压力系数的相似律。如果将上述压力系数积分，还可以方便地推出升力系数、力矩系数以及波阻系数的相似律，因篇幅所限，这里从略。

作为特例，这里讨论二维翼型。这意味着 $\lambda \to \infty$，且变量 y 不出现。于是式（7-2-29）可简化为

$$C_p = \frac{\bar{c}^{2/3}}{\Gamma^{1/3}} F\left(\frac{B}{(\Gamma \bar{c})^{1/3}}, \frac{x}{b}\right) \tag{7-2-31}$$

其中 b 和 $\bar{c}$ 分别为翼型的弦长和相对厚度。上式就是二维薄翼型跨声速绕流压力系数的相似律。

7.2.2　旋成体轴对称跨声速绕流的相似律

对于旋成体的轴对称绕流[7]，常选用柱坐标系，则跨声速小扰动速度势方程可写为

$$\left(1 - M_\infty^2 - \frac{\gamma+1}{V_\infty} M_\infty^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \tag{7-2-32}$$

设有两个旋成体的跨声速绕流，流场的小扰动速度势都满足方程式（7-2-32）。用下标 1 和 2 分别表示第一个和第二个流场的相应参数，有

$$\left(1 - M_\infty^2\right)_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_1 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)_1 = \left(\frac{\gamma+1}{V_\infty} M_\infty^2\right)_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_1 \tag{7-2-33}$$

$$\left(1 - M_\infty^2\right)_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)_2 = \left(\frac{\gamma+1}{V_\infty} M_\infty^2\right)_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_2 \tag{7-2-34}$$

与 7.2.1 节对薄翼型的推导类似，只要将那里的 $y_2 = s_y y_1$，$z_2 = s_z z_1$ 用这里的 $r_2 = s_r r_1$ 代替，即

$$\left.\begin{aligned} & x_2 = s_x x_1, \quad r_2 = s_r r_1 \\ & V_{\infty 2} = s_V V_{\infty 1}, \quad \Gamma_2 = s_\Gamma \Gamma_1, \quad B_2 = s_B B_1 \end{aligned}\right\} \tag{7-2-35}$$

并且注意引入小扰动势 φ_1 和 φ_2 间的关系，即

$$\varphi_2 = s_\varphi \varphi_1 \tag{7-2-36}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = \frac{s_x}{s_\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_1 = \frac{s_x^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_2 \\ & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_1 = \frac{s_r^2}{s_\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)_1 = \frac{s_r^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)_2 \end{aligned}\right\} \tag{7-2-37}$$

将式（7－2－35）、式（7－2－36）与式（7－2－37）代入式（7－2－33），便可得到

$$\pm\frac{s_x^2 B_2^2}{s_B^2 s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2+\frac{s_r^2}{s_\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_2+\frac{s_r^2}{s_\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)_2=\frac{s_V}{s_\Gamma}\frac{s_x^3}{s_\varphi^2}\frac{\Gamma_2}{V_{\infty 2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2 \tag{7-2-38}$$

由上式可以看出，只有当组合量满足如下关系

$$\frac{s_x^2}{s_B^2 s_\varphi}=\frac{s_r^2}{s_\varphi}=\frac{s_V}{s_\Gamma}\frac{s_x^3}{s_\varphi^2} \tag{7-2-39}$$

时，才可能通过式（7－2－39）的变换，将第一个旋成体流场的扰动势满足的方程变成第二个旋成体流场的扰动势满足的方程，从而建立起两个流场之间的关系。式（7－2－39）还可改写为

$$\frac{s_r s_B}{s_x}=1，\text{或样}\ \frac{s_r}{s_x}=\frac{1}{s_B} \tag{7-2-40}$$

$$\frac{s_x^2}{s_B^2 s_\varphi}=\frac{s_V}{s_\Gamma}\frac{s_x^3}{s_\varphi^2}，\quad\text{或}\quad \frac{s_\varphi}{s_V s_x}=\frac{s_B^2}{s_\Gamma} \tag{7-2-41}$$

注意到细长比τ的定义（它是旋成体的最大直径与长度的比值），借助式（7－2－40）及式（7－2－35），于是两个旋成体的细长比τ必须满足如下关系

$$\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{s_r}{s_x}=\frac{1}{s_B}=\frac{B_1}{B_2}$$

即

$$B_2\tau_2=B_1\tau_1 \tag{7-2-42}$$

也就是说，当两个旋成体的细长比τ与来流有关的 B 值乘积满足式（7－2－42），并且两个扰动势的比值 s_φ 满足式（7－2－41）时，则两个旋成体流场才能用同一个跨声速非线性小扰动势方程来描述。下面来讨论两个流场边界条件之间的关系。设 R_1 与 R_2 为两个旋成体母线的 r 坐标，它们都是 x 的函数，其函数关系分别为

$$\left.\begin{aligned}R_1(x)&=L_1\tau_1 f_1\left(\frac{x_1}{L_1}\right)\\ R_2(x)&=L_2\tau_2 f_2\left(\frac{x_2}{L_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{7-2-43}$$

式中，L_1 与 L_2 分别为两个旋成体沿 x 方向的长度。作为特例，下面仅讨论极细长旋成体边界条件的处理问题。对于极细长旋成体，近似有以下关系

$$\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R}\approx\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=0}=R(x)V_\infty\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} \tag{7-2-44}$$

因此借助于式（7－2－43），对于第一个旋成体的绕流边界条件可写为



$$\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_1\bigg|_{r=0}=V_{\infty1}R_1\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}x}=V_{\infty1}L_1\tau_1^2 f_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\left(\dfrac{x_1}{L_1}\right)} \tag{7-2-45}$$

对于第二个旋成体的绕流边界条件可写为

$$\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_2\bigg|_{r=0}=V_{\infty2}R_2\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}x}=V_{\infty2}L_2\tau_2^2 f_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\left(\dfrac{x_2}{L_2}\right)} \tag{7-2-46}$$

注意到式（7-2-35）、式（7-2-36）与式（7-2-37），于是第一个旋成体的边界条件式（7-2-45）这时可改写为

$$\frac{1}{s_\varphi}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_2\bigg|_{r=0}=\frac{V_{\infty2}}{s_V}\frac{L_2}{s_x}\tau_1^2 f_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\left(\dfrac{x_1}{L_1}\right)} \tag{7-2-47}$$

假设两个旋成体母线的形状函数相同，即

$$f_1\left(\frac{x_1}{L_1}\right)=f_2\left(\frac{x_2}{L_2}\right) \tag{7-2-48}$$

比较式（7-2-46）与式（7-2-47）便可得出结论：当两个旋成体的细长比满足关系式

$$\frac{s_\varphi}{s_V s_x}\tau_1^2=\tau_2^2 \tag{7-2-49}$$

时，则这两个旋成体绕流的边界条件便可以用同一个方程来描述。此外，如果将式（7-2-41）变为

$$\frac{s_\varphi}{s_V s_x}=\frac{s_B^2}{s_\Gamma}=\frac{B_2^2/\Gamma_2}{B_1^2/\Gamma_1} \tag{7-2-50}$$

将式（7-2-50）代入到式（7-2-49）后可得到

$$\tau_2^2=\frac{s_B^2}{s_\Gamma}\tau_1^2=\frac{B_2^2/\Gamma_2}{B_1^2/\Gamma_1}\tau_1^2 \tag{7-2-51}$$

即

$$\frac{\Gamma_2\tau_2^2}{B_2^2}=\frac{\Gamma_1\tau_1^2}{B_1^2} \tag{7-2-52}$$

所以欲使两个旋成体绕流的边界条件能用同一方程描述，则这两个旋成体的细长比必须满足上面两个关系式。现在引入两个旋成体仿射相关的概念：定义母线形状函数相同、细长比、

马赫数 M_∞、比热比之间分别满足式（7-2-42）和式（7-2-52）的两个旋成体为仿射相关。利用两个仿射相关旋成体流场中各比例常数之间的关系式，即满足式（7-2-40）与式（7-2-41），便可建立两个仿射相关旋成体气动力特性之间的关系，这就是所要求的细长旋成体跨声速绕流的相似律。

§7.3 收-扩喷管的二维定常跨声速流动

在喷管设计计算中，确定喷管喉道部分的流动是最重要的计算之一。本节给出一个近似计算喷管喉部流动参数及确定喉部型线的方法，它体现了小扰动法在一个实际问题中的重要应用。

7.3.1 确定喉道区域流场的近似方法

在分析二维喷管喉道区域流场的众多方法中，Sauer 的方法[8]是较为简单而且方便的方法之一。该方法从跨声速小扰动势方程出发，其基本思想是将扰动势函数展成 y 的幂级数，而各项系数都是 x 的函数，然后利用边界条件来确定这些系数函数。图 7.4 是喷管喉道区域几何形状的示意图。喉部半径 $O'T=r_t$，喉部型线曲率半径 $TO''=\rho_t$。设声速线（图中虚线）与喷管中心线 $O'x$ 交于点 O。取点 O 为分析流场所用的坐标系的原点。

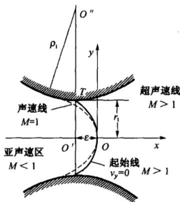


图 7.4　喷管喉道区域的流动特性及喉道几何形状

首先确定喉道区域的速度分布。借助于方程式（6-1-51），则在二维平面或轴对称流动的情况下，其全速度势方程简化为

$$\left(1-\frac{\Phi_x^2}{a^2}\right)\Phi_{xx}+\left(1-\frac{\Phi_y^2}{a^2}\right)\Phi_{yy}-2\frac{\Phi_x\Phi_y}{a^2}\Phi_{xy}+\delta\frac{\Phi_y}{y}=0 \tag{7-3-1}$$

其中 $\delta=0$ 对应于平面流动，而 $\delta=1$ 对应于轴对称流动。考虑到喷管内气体的流动方向大体上沿着轴向（即沿 x 方向）并且喉道区域的马赫数 $M\approx1$，因而可将两个速度分量表示为

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=a^*+u',\quad v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=v' \tag{7-3-2}$$



这里 u'，v' 与临介声速 a^* 相比是个小量，即

$$\frac{u'}{a^*}<<1,\quad \frac{v'}{a^*}<<1 \tag{7-3-2}$$ *

此外，u' 和 v' 对 x 和 y 的偏导数也可以认为是小量，即有

$$\frac{\partial u'}{\partial x},\quad \frac{\partial u'}{\partial y},\quad \frac{\partial v'}{\partial x},\quad \frac{\partial v'}{\partial y}<<1 \tag{7-3-3}$$

引进扰动速度势 φ，它与扰动速度分量的关系为

$$u'=\frac{\partial\varphi}{\partial x},v'=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{7-3-4}$$

把全速度势 Φ 的偏导数用 a^* 和扰动势 φ 的偏导数表示，代入全速势方程，并注意忽略二阶以上小量，即可得到喷管喉部近声速区域的小扰动速度势方程

$$\frac{\gamma+1}{a_*}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\delta}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{7-3-5}$$

引入量纲为 1 的量，其长度参考量用 $O'O''=L=\rho_t+r_t$，这样便可以使 y 的量纲为 1 的值远小于 1，即可写成

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\frac{x}{L},\bar{y}=\frac{y}{L},\bar{\varphi}=\frac{\varphi}{a^*L}\\&\bar{u}'=\frac{1}{a_*}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}},\bar{v}'=\frac{1}{a^*}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{y}}\end{aligned}\right\} \tag{7-3-6}$$

将以上各式代入方程式（7-3-5），则得量纲为 1 的小扰动势方程

$$(\gamma+1)\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{y}^2}-\frac{\delta}{\bar{y}}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{y}}=0 \tag{7-3-7}$$

为了求解非线性方程式（7-3-7），因此把 $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y})$ 展成 $\bar{y}$ 的幂级数。考虑到小扰动速度势是 $\bar{y}$ 的偶函数，因而幂级数中只含 $\bar{y}$ 的偶次方，即

$$\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{n=0}^{\infty}f_{2n}(\bar{x})\bar{y}^{2n}=f_0(\bar{x})\bar{y}^0+f_2(\bar{x})\bar{y}^2+f_4(\bar{x})\bar{y}^4+\cdots \tag{7-3-8}$$

将上式分别对 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 求一阶和二阶导数，再代入方程式（7-3-7），经整理得到

$$\begin{aligned}&\left[(\gamma+1)f_0'\,f_0''-2f_2-2\delta f_2\right]\bar{y}^0+\\&\quad\left[(\gamma+1)(f_0'\,f_2''+f_0''\,f_2')-2f_4-4\delta f_4\right]\bar{y}^2+O(\bar{y}^4)=0\end{aligned} \tag{7-3-9}$$

其中上标一撇与二撇表示对 $\bar{x}$ 求一次与二次导数。考虑到上式对 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 的任意值都要成立，因此 $\bar{y}$ 的各次方系数都必须等于零。如果将式（7-3-8）中的 $\bar{y}^4$ 及其更高次项略去，则由式（7-3-9）可知，只要求出 f_0，f_2 和 f_4 这三个系数就够了。于是可令式（7-3-9）中

$\bar{y}^0$和$\bar{y}^2$的系数为零，便得到

$$f_2(\bar{x})=\frac{\gamma+1}{2(1+\delta)}f_0'f_0'' \tag{7-3-10}$$

$$f_4(\bar{x})=\frac{\gamma+1}{4(3+\delta)}(f_0'f_2''+f_0''f_2') \tag{7-3-11}$$

以上两式表明：$f_2(\bar{x})$和$f_4(\bar{x})$可以用$f_0(\bar{x})$的导数确定。因此，求解小扰动势$\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y})$的问题便归结为确定系数$f_0(\bar{x})$的分布。根据喷管对称轴线上的条件，有

$$\bar{u}'(\bar{x},\bar{y})\Big|_{\bar{y}=0}=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}\Big|_{\bar{y}=0}=f_0'(\bar{x}) \tag{7-3-12}$$

可以假定：在声速点O附近，轴线上扰动速度近似地取成线性函数，即

$$\bar{u}'(\bar{x},\bar{y})_{\bar{y}=0}=f_0'(\bar{x})=\beta\bar{x} \tag{7-3-13}$$

这里β是待定常数。将$f_0'=\beta\bar{x}$，$f_0''=\beta$代入式（7-3-10）和式（7-3-11），便可得到

$$f_2(\bar{x})=\frac{\gamma+1}{2(1+\delta)}\beta^2\bar{x} \tag{7-3-14}$$

$$f_4(\bar{x})=\frac{(\gamma+1)^2\beta^3}{8(1+\delta)(3+\delta)} \tag{7-3-15}$$

将式（7-3-14）与式（7-3-15）代入式（7-3-8），并对$\bar{x}$和$\bar{y}$求偏导数，于是便得到喉道区的小扰动速度分量$\bar{u}'$和$\bar{v}'$的分布，其表达式为

$$\bar{u}'(\bar{x},\bar{y})=\frac{u'}{a^*}=\beta\bar{x}+\frac{(\gamma+1)\beta^2}{2(1+\delta)}\bar{y}^2 \tag{7-3-16}$$

$$\bar{v}'(\bar{x},\bar{y})=\frac{v'}{a^*}=\frac{(\gamma+1)\beta^2}{1+\delta}\bar{x}\ \bar{y}+\frac{(\gamma+1)^2\beta^3}{2(1+\delta)(3+\delta)}\bar{y}^3 \tag{7-3-17}$$

下面确定声速线的位置。在声速线上，$M=1$，所以

$$(a^*)^2=V_x^2+V_y^2=(a^*+u')^2+(v')^2=(a^*)^2\left[(1+\bar{u}')^2+(\bar{v}')^2\right] \tag{7-3-18}$$

将上式两边除以$(a^*)^2$，并略去小扰动速度分量的平方项，便可得到在声速线上$\bar{u}'=0$。于是将$\bar{u}'$的值代入式（7-3-16）便立即求得以抛物线表示的声速线方程

$$x=-\frac{(\gamma+1)\beta}{2(1+\delta)L}y^2 \tag{7-3-19}$$

注意：这里式（7-3-19）是相对于坐标系 xOy 而言的。为要确定声速线在$xO'y$系中的位置，我们需要求出坐标系原点O与喷管坐标系原点O'之间的距离ε。根据喉部边界条件，即



$x=\varepsilon$ 和 $y=r_t$ 处 $v'=0$，由式（7－3－19）便得到了 ε 值

$$\varepsilon=-\frac{(\gamma+1)\beta}{2(3+\delta)L}r_t^2 \tag{7-3-20}$$

最后，给出用特征线法计算喉部下游超声速流场所需的 $M>1$ 的起始线位置。因为用声速线作为这种起始线是不适当的。需要在声速线下游另外找出一条 $M>1$ 的曲线作为起始线。这里可以取 $v'=0$ 所对应的曲线作为起始线，于是借助于式（7－3－17），该起始线方程应为

$$x=-\frac{(\gamma+1)\beta}{2(3+\delta)L}y^2 \tag{7-3-21}$$

可以看出，这条抛物线通过点 T 和点 O，位于声速线下游，如图 7.4 所示，其上的速度值可以由式（7－3－16）与式（7－3－17）完全确定。

7.3.2　喷管喉部型线的确定

在式（7－3－16）～式（7－3－21）中，均含有 β 值，它是个待定常数，现在讨论它的确定方法。设喉部的一小段型线用圆弧表示。确定喉部型线就是在已知的 β 值下去求型线的曲率半径 ρ_t；或者反过来便是给定型线的曲率半径 ρ_t，去求待定常数 β 或者 β/L。根据曲率的定义，参照图 7.5，喉部型线的曲率为

$$\frac{1}{\rho_t}=\left[\frac{\mathrm{d}(\tan\tau)}{\mathrm{d}s}\right]_T\approx\left(\frac{\mathrm{d}\overline{v}'}{\mathrm{d}s}\right)_T=\frac{\partial\overline{v}'}{\partial\overline{x}}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}s}\right)+\frac{\partial\overline{v}'}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}s}\right) \tag{7-3-22}$$

考虑到在一般情况下，喉部型线的曲率半径 ρ_t 比 r_t 大得多，即 $\rho_t>>r_t$，则有 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s\approx1$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}s\approx0$。于是式（7－3－22）简化为

$$\rho_t=\frac{1}{\left(\frac{\partial\overline{v}'}{\partial s}\right)_T}=\frac{1}{\left(\frac{\partial\overline{v}'}{\partial\overline{x}}\right)_{\substack{x=\varepsilon\\y=r_t}}} \tag{7-3-23}$$

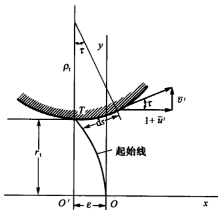


图 7.5　曲率半径 ρ_t 与待定常数 β 间的关系

这里式（7－3－23）右边的值可由式（7－3－17）对 $\overline{x}$ 求导数给出，即

$$\left.\frac{\partial\overline{v}'}{\partial\overline{x}}\right|_{\substack{x=\varepsilon\\y=r_t}}=\frac{(\gamma+1)\beta^2}{(1+\delta)L^2}r_t \tag{7-3-24}$$

将上式代入到式（7-3-23）便得到 β 的表达式

$$\beta=\left[\frac{1+\delta}{(\gamma+1)r_{t}\rho_{t}}\right]^{1/2}L \tag{7-3-25}$$

有了式（7-3-25），则速度分布式（7-3-16）与式（7-3-17）、声速线方程式（7-3-19）、距离公式（7-3-20）和起始线方程式（7-3-21），均可改写成用喉部几何参数 r_t 和 ρ_t 表达的式子。实践表明：在 $\rho_t >> r_t$ 的情况下，用上述公式计算出的结果与实验数据符合较好。

7.3.3 保角曲线坐标下简化方程的分析方法

对于壁面曲率比较大的情况，7.3.2 节给出的方法不再适用，需要寻找其他方法。值得注意的是，对于喷管内的流动，在喉部区域速度都在声速附近，因而密度都接近最大值，所以这一区域的密流几乎处处相同，因此可以想象，流线的分布和不可压缩流动的流场相近。于是，若以不可压缩流动的流线与它的等势线为正交曲线坐标系时，则气体的速度沿着这个不可压缩流线方向的分量一定会比沿着等势线方向的分量大得多。因此，可将气动力学基本方程对这两个方向上的分量进行量级估计，略去高价小量而使方程得以简化，这就是保角曲线坐标法[9-11]。我国学者林同骥等成功地应用这个方法进行了大收缩扩张喷管的设计，有效的获得了在保角曲线坐标系下喷管跨声速流动简化方程的数值解或解析解，这里因篇幅所限，不作展开讲述。

7.3.4 基于 von Mises 变换的喷管流函数法

无粘气体平面（或轴对称）定常运动的基本方程组为

$$\frac{\partial(\rho u y^{\beta})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v y^{\beta})}{\partial y}=0 \tag{7-3-26}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{7-3-27}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{7-3-28}$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)=0 \tag{7-3-29}$$

在式（7-3-26）中，对平面问题时则 $\beta=0$；对轴对称问题时则 $\beta=1$，并且此时 y 取为到对称轴的距离。选取如下 von Mises 变换



$$\begin{cases}\xi = x \\ \psi = \psi(x, y)\end{cases} \tag{7-3-30}$$

这里流函数 ψ 满足

$$\mathrm{d}\psi = -\rho v y^{\beta}\mathrm{d}x + \rho u y^{\beta}\mathrm{d}y \tag{7-3-31}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \rho u y^{\beta} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v y^{\beta}\end{cases} \tag{7-3-32}$$

坐标系 (x, y) 与坐标系 (ξ,ψ) 间的变换关系为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \Diamond}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Diamond}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \Diamond}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \Diamond}{\partial \psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial \Diamond}{\partial \xi} - \rho v y^{\beta}\dfrac{\partial \Diamond}{\partial \psi} \\ \rho u y^{\beta}\dfrac{\partial \Diamond}{\partial \psi}\end{bmatrix} \tag{7-3-33}$$

式中 $\Diamond$ 代表任意物理量；因此，对定常流动则随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}\Diamond}{\mathrm{d}t} = u\frac{\partial \Diamond}{\partial x} + v\frac{\partial \Diamond}{\partial y} = u\frac{\partial \Diamond}{\partial \xi} \tag{7-3-34}$$

引进流函数 ψ 后，式(7－3－26)自动满足。将式(7－3－33)代入到式(7－3－27)、式(7－3－28)与式（7－3－29）后可得到

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} = v y^{\beta}\frac{\partial P}{\partial \psi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \xi} \tag{7-3-35}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -y^{\beta}\frac{\partial P}{\partial \psi} \tag{7-3-36}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right) = 0 \tag{7-3-37}$$

值得注意的是，在 (x, y) 坐标系中原方程组有四个待求函数即 u,v,P 与 ρ；引进 von Mises 变换后，这时 y 也变为待求的函数，因此有五个未知数即 u,v,P，ρ 与 y；由式（7－3－31）

$$\mathrm{d}y = \frac{v}{u}\mathrm{d}x + \frac{1}{\rho u y^{\beta}}\mathrm{d}\psi$$

但

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial x}{\partial \psi}\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}\xi \tag{7-3-38}$$

因此

$$\mathrm{d}y = \frac{v}{u}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\rho u y^{\beta}}\mathrm{d}\psi$$

所以可以补充两个方程，即

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{v}{u},\quad \frac{\partial y}{\partial \psi}=\frac{1}{\rho u y^{\beta}} \tag{7-3-39}$$

这两个方程具有明确的物理意义，前者是流线方程，后者是质量守恒方程即连续方程。积分式（7－3－37）得

$$P/\rho^{\gamma}=C(\psi) \tag{7-3-40}$$

上式表明：沿 ψ =常数的流线上熵守恒。显然，对于均熵流动（即无旋流动）时，$C(\psi)$ 值在全场都等于同一个常数，即全流场熵值处处相等。把式（7－3－36）代入式（7－3－35）得

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi}+v\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \xi}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \xi}=0 \tag{7-3-41}$$

将式（7－3－40）代入式（7－3－41）消去 ρ 后再积分便得到

$$\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}=C_1(\psi) \tag{7-3-42}$$

式中，$C_1(\psi)$ 是积分常数，它是关于 ψ 的某一个函数。

显然，上式即为沿流线成立的 Bernoulli 方程，其中

$$C_1(\psi)=H(\psi)=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\left[a^{*}(\psi)\right]^2=\frac{1}{\gamma-1}\left[a_0(\psi)\right]^2 \tag{7-3-43}$$

这里 H 为总焓，a^* 与 a_0 分别为临界声速与滞止声速，它们均是 ψ 的函数；对于均总焓流动，则总焓值在全流场处处相等。因此，在 von Mises 坐标系 (ξ,ψ) 中，原方程组式（7－3－26）～式（7－3－29）变换为如下基本方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial \xi}=-y^{\beta}\dfrac{\partial P}{\partial \psi}\\ y^{\beta}\dfrac{\partial y}{\partial \psi}=\dfrac{1}{\rho u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi}=\dfrac{v}{u}\\ \dfrac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)+\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{P}{\rho}=\dfrac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\left(a^{*}\right)^2\\ \dfrac{P}{\rho^{\gamma}}=C(\psi)\end{cases} \tag{7-3-44}$$

上述五个方程所组成的基本方程组中仅含有三个非线性偏微分方程。显然，这套基本方程组较原基本方程组易于求解。文献[12]使用上述方程组成功的求解了轴对称喷管的跨声速流场，实现了在喷管中亚声速、跨声速与超声速流场的统一求解。



§7.4　跨声速 Tricomi 方程

首先，这里用另一种方式扼要地推出速度面上的流函数主方程，然后再导出 Tricomi 方程。在二维平面位势流中，引进速度势ϕ和流函数ψ

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=u\,,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=v \tag{7-4-1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho^*}v\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho^*}u \tag{7-4-2}$$

式中，u与v分别为流速在x与y坐标方向上的分量；ρ为流体的密度；ρ^*为临界状态下的密度。

设物理复平面的坐标为$z=x+\mathrm{i}y$，令复速度为$u+\mathrm{i}v=V\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，这里$V$为复速度的模；$\theta$为相位角。于是容易推出

$$\mathrm{d}z=V^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{d}\phi+\mathrm{i}\frac{\rho^*}{\rho}\mathrm{d}\psi) \tag{7-4-3}$$

或

$$V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}z=\mathrm{d}\phi+\mathrm{i}\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\mathrm{d}\psi \tag{7-4-4}$$

注意到$z=z(V,\theta)$，$\phi=\phi(V,\theta)$，$\psi=\psi(V,\theta)$，所以应用微分关系及；式（7-4-3）便可推出

$$\frac{\partial z}{\partial V}=V^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial V}+\mathrm{i}\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V}\right) \tag{7-4-5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=V^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\mathrm{i}\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \tag{7-4-6}$$

将式（7-4-5）与式（7-4-6）分别对θ与V求导数，并注意到$\dfrac{\partial^2 z}{\partial V\partial\theta}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial V}$，于是便得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial V}\mathrm{i}-\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\frac{\partial\psi}{\partial V}=-V^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\mathrm{i}V[\frac{\mathrm{d}(\frac{\rho^*}{\rho V})}{\mathrm{d}V}]\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{7-4-7}$$

令上式两边的实部与虚部分别相等，便得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=V\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V} \tag{7-4-8}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial V}=V[\frac{\mathrm{d}(\frac{\rho^*}{\rho V})}{\mathrm{d}V}]\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{7-4-9}$$

应用动力学方程 $VdV=-dp/\rho$ 以及声速关系 $a^2=dp/d\rho$，便有

$$\frac{d\left(\rho^*/\rho V\right)}{dV}=-\frac{\rho^*}{\rho V^2}(1-M^2) \tag{7-4-10}$$

式中，$M=V/a$。

将式（7-4-10）代入到式（7-4-9），有

$$\frac{\partial\phi}{\partial V}=-\frac{(1-M^2)}{V}\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{7-4-11}$$

若将式（7-4-8）与式（7-4-11）分别对 V 与 θ 求导，并应用 $\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial V}=\frac{\partial^2\phi}{\partial V\partial\theta}$ 的关系去消去速度势 ϕ，得到速度面上的流函数主方程

$$V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}+V(1+M^2)\frac{\partial\psi}{\partial V}+(1-M^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0 \tag{7-4-12}$$

将该式与式（6-5-34）、式（6-5-42）比较可以发现，虽然流函数分别由式（7-4-2）、式（6-5-18）与式（6-5-41）定义（尽管三个流函数的绝对值不同），但所得到的流函数主方程却具有相同的数学结构，换句话说，流函数主方程的性质不会改变。在速度面上，方程式（7-4-12）虽已实现了线性化，但其方程的形式仍然不够简洁，为此引进一个新的速度变量 σ，并定义为

$$\sigma=\int_{\lambda}^{1}\frac{\rho}{\rho^*}\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{7-4-13}$$

式中，$\lambda=\frac{V}{a^*}$，称为速度系数。

如果令 $\psi=\psi(\lambda,\theta)$，并注意到 $\psi=\psi(\sigma,\theta)$，于是将 ψ 微分后便可推出

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}d\lambda=\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}d\sigma \tag{7-4-14}$$

由式（7-4-13）与式（7-4-14）得

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=\left(\frac{-\rho}{\rho^*\lambda}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} \tag{7-4-15}$$

将这个关系式代入到式（7-4-8）与式（7-4-9），得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} \tag{7-4-16}$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}=K(\sigma)\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{7-4-17}$$

式中，$K(\sigma)\equiv\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2(1-M^2)$，称为压缩性函数。

将式（7-4-16）与式（7-4-17）分别对 σ 与 θ 求导数并应用 $\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial\sigma}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\sigma\partial\theta}$ 可得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2}+K(\sigma)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}=0 \tag{7-4-18}$$

在工程应用中，压缩性函数 $K(\sigma)$ 可有多种近似，常用的有[13, 1]

（1）Tricomi 近似

$$K(\sigma)\approx(\gamma+1)\sigma \tag{7-4-19}$$

（2）广义 Tricomi 近似

$$K(\sigma)\approx\frac{2.40\sigma}{(1+0.780\sigma)^5} \tag{7-4-20}$$

（3）Tomotika-Tamada（托摩梯卡–塔迈达）近似

$$K(\sigma)\approx 0.40188\left(1-e^{-5.971\,97\sigma}\right) \tag{7-4-21}$$

事实上，由 $K(\sigma)$ 的定义，即

$$K(\sigma)=\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2(1-M^2)=\left[\frac{\varepsilon(1)}{\varepsilon(\lambda)}\right](1-M^2) \tag{7-4-22}$$

式中，$\varepsilon(\lambda)$ 为气动函数，它由式（1-8-28）定义。

因此，按照式（7-4.22）可以作 $K(\sigma)$ 对 σ 的曲线（如图 7.6 所示）。在跨声速流场中，$M\sim1,\sigma\sim0$，从这条曲线上看，在 $\sigma=0$ 附近时 $K(\sigma)=\sigma$ 是个很好的近似关系。所以对于跨声速流，方程式（7-4-18）可以简化为

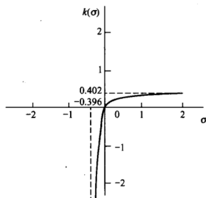


图 7.6　压缩性函数 $K(\sigma)$的变化曲线

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2}+\sigma\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}=0 \tag{7-4-23}$$

该式就是著名的 Tricomi 方程。显然，当亚声速即 $\sigma>0$ 时，方程是椭圆型的；当超声速即 $\sigma<0$ 时，方程是双曲型的；在跨声速范围内，方程为混合型的。

§7.5 跨声速流函数方法及人工可压缩性

7.5.1 三维空间中的两族等值面

对于无粘流，由 Crocco 方程，即

$$V\times(\nabla\times V)=\nabla H-T\nabla S+\frac{\partial V}{\partial t} \tag{7-5-1}$$

式中，$H=h+\frac{V^2}{2}$，称为总焓；T 和 S 分别为温度和熵；令 V 为速度，它可表示为 $V=ui+vj+wk$。

于是（7-5-1）式可表示为

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix}=\nabla H-T\nabla S+\frac{\partial V}{\partial t} \tag{7-5-2}$$

在三维流动中需要有两个流函数，即 ψ_1 与 ψ_2，它们均为 x、y、z 的函数，并且有下式成立

$$\rho V=(\nabla\psi_1)\times(\nabla\psi_2) \tag{7-5-3}$$

于是容易推出

$$\left.\begin{aligned} \rho u&=\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(y,z)} \\ \rho v&=\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(z,x)} \\ \rho w&=\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(x,y)} \end{aligned}\right\} \tag{7-5-4}$$

这里 $\partial(\psi_1,\psi_2)/\partial(y,z)$ 等为函数行列式。因此，$\psi_1=\text{const}$ 和 $\psi_2=\text{const}$ 的两族流面便构成了三维空间中的两类流面族，显然两个不同族流面的交线就是流线。作为特例，我们仅考虑 $\psi_1=\psi_1(x,y,z)$，$\psi_2=\psi_2(z)$，$\partial\psi_2/\partial z=1$ 且 $w=0$ 的情形，于是式（7-5-3）变简化为

$$\rho(ui+vj)=\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}i-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}j\right) \tag{7-5-5}$$

注意省略式（7-5-5）ψ_1 的下脚标 1 后便有



$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7-5-6}$$

这时的ψ就是以前所讨论的二维流动中的流函数。

7.5.2　二维空间中的弱守恒型流函数方程及人工密度

对于定常二维有旋流动，运动方程式（7-5-2）在 j 方向上的表达式可简化为

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \left(T\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \right) \bigg/ u \tag{7-5-7}$$

将式（7-5-6）代入式（7-5-7），便有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial y} - T\frac{\partial S}{\partial y} \right) \bigg/ u \tag{7-5-8}$$

这就是我们要讨论的弱守恒型流函数主方程。如果引进 Hafez 的人工密度 $\tilde{\rho}$ 去代替式（7-5-8）中的 ρ 值[14]，则式（7-5-8）此时变为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial y} - T\frac{\partial S}{\partial y} \right) \bigg/ u \tag{7-5-9}$$

上式便为典型的弱守恒型跨声速流函数主方程，式中

$$\tilde{\rho} = \rho - \beta\left[\frac{u}{V}\Delta x \delta_x^- \rho + \frac{v}{V}\Delta y \tilde{\delta}_y \rho \right] \tag{7-5-10a}$$

$$\beta = \max\left[0, C_0\left(1 - \frac{1}{(V/a)^2} \right) \right] \tag{7-5-10b}$$

$$\Delta x \delta_x^- \rho = \rho_{i,j} - \rho_{i-1,j} \tag{7-5-10c}$$

$$\Delta y \tilde{\delta}_y \rho = \begin{cases} \rho_{i,j} - \rho_{i,j-1} & (v_{i,j} > 0 \text{ 时}) \\ \rho_{i,j+1} - \rho_{i,j} & (v_{i,j} < 0 \text{ 时}) \end{cases} \tag{7-5-10d}$$

这里常数 C_0 通常是在 0～2 的范围内取值。

在跨声速流函数场与密度场的迭代中，如何确定密度场是该计算的关键之一。这里建议密度场按如下的办法决定[15]。

① 在计算出 $\{\psi\}$ 场后，应马上计算出全场 u/v 的分布，即

$$\frac{u}{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7-5-11}$$

② 利用式（7−5−6）消去式（7−5−7）中的v，从而得到了关于u的方程

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\left(T\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big/u \tag{7-5-12}$$

并由此得到全场u的分布。

③ 最后由能量方程 $H=h+\frac{V^2}{2}=\text{const}$，即

$$\frac{C_1}{\rho}+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)=\text{const} \tag{7-5-13}$$

解出密度值。式中$C_1=p\big/\gamma-1$，这里P为流体的压强。大量的数值计算表明：对于小攻角薄翼的跨声速流场，采用上述方法确定密度场是行之有效的。而对于大攻角厚翼型的跨声速流场，则需要采用贴体曲线坐标系，因此这时确定密度场的方法要在贴体曲线坐标系下作适当的修正，对这方面感兴趣的读者可参阅有关文献，例如文献[16～27]等。

§7.6 二维与三维跨声速势函数方程的数值解法

7.6.1 两种形式的全位势主方程及 AF2 格式

一、全位势主方程

在无粘、定常、均熵假设下，基本方程组在直角坐标系(x,y,z)中可简写为

连续方程 $$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{7-6-1}$$

运动方程 $$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\nabla p/\rho \tag{7-6-2}$$

等熵关系 $$p/\rho^\gamma=p_0/\rho_0^\gamma \tag{7-6-3}$$

声速关系 $$a^2=\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho \tag{7-6-4}$$

将式（7−6−3）、式（7−6−4）用于式（7−6−1）和式（7−6−2），消除p和ρ后便得到

$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}/2)-a^2\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{7-6-5}$$

上式可认为是定常运动时连续方程的另一种表达式。如果将上式用速度分量的形式写出，经整理后得

$$\begin{aligned}(a^2-u^2)\frac{\partial u}{\partial x}+(a^2-v^2)\frac{\partial v}{\partial y}+(a^2-w^2)\frac{\partial w}{\partial z}-uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\\ vw\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-wu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0\end{aligned} \tag{7-6-6}$$



由于流动是无旋的，因此一定存在着势函数Φ，使得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=u,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=v,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}=w \tag{7-6-7}$$

式中，u,v,w为速度V沿x,y,z方向上的分速度。

将式（7-6-7）代入式（7-6-6）后便得到第一种形式的全位势主方程，即

$$(a^2-u^2)\Phi_{xx}+(a^2-v^2)\Phi_{yy}+(a^2-w^2)\Phi_{zz}-2uv\Phi_{xy}-2vw\Phi_{yz}-2wu\Phi_{zx}=0 \tag{7-6-8}$$

另外，由能量方程$h+\dfrac{V^2}{2}=\text{const}$，又可改写为

$$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\text{const}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{a_*^2}{2}=\frac{V_\infty^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{\gamma-1} \tag{7-6-9}$$

式中，a_*为临界声速；V_∞与a_∞为来流速度与来流声速。

显然，式（7-6-8）中的u,v,w可由式（7-6-7）决定，而式（7-6-8）中的声速a由式（7-6-9）给出，因此式（7-6-8）为典型的非线性二阶偏微分方程。另一种形式的全位势方程可以直接由连续方程式（7-6-1）出发，并注意到式（7-6-7），则得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0 \tag{7-6-10}$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty}=\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{u^2+v^2+w^2}{u_\infty^2+v_\infty^2+w_\infty^2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{7-6-11}$$

由一般形式下坐标系(t,x,y,z)与(τ,ξ,η,ζ)之间的变换关系式

$$\begin{bmatrix}U\\V\\W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_t & \xi_x & \xi_y & \xi_z\\ \eta_t & \eta_x & \eta_y & \eta_z\\ \zeta_t & \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\u\\v\\w\end{bmatrix} \tag{7-6-12}$$

式中

$$\begin{cases}\tau=t\\ \xi=\xi(t,x,y,z)\\ \eta=\eta(t,x,y,z)\\ \zeta=\zeta(t,x,y,z)\end{cases} \tag{7-6-13}$$

对于定常无旋流，则式（7-6-12）简化

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_\xi \\ \Phi_\eta \\ \Phi_\zeta \end{bmatrix} \tag{7-6-14}$$

于是式（7-6-10）变为

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\rho}{J}U\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\rho}{J}V\right]+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{\rho}{J}W\right]=0 \tag{7-6-15}$$

而式中密度 ρ 为

$$\frac{\rho}{\rho_\infty}=\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}{q_\infty^2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, q_\infty^2=u_\infty^2+v_\infty^2+w_\infty^2 \tag{7-6-16}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_\xi \\ \Phi_\eta \\ \Phi_\zeta \end{bmatrix} \tag{7-6-17}$$

在式（7-6-15）中 J 的定义为

$$J=\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} \tag{7-6-18}$$

因此，式（7-6-15）便是第二种形式的全位势主方程，在跨声速计算中经常使用它。

二、人工密度及因式分解法

下面以二维为例，十分扼要的介绍在采用人工密度的情况下，求解跨声速全位势主方程的一种快速、高效算法——AF2 因式分解法。对于二维、无粘、定常、无旋流场，则全位势方程组为

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho}{J}U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\rho}{J}V\right)=0 \tag{7-6-19}$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty}=\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{\Phi_x^2+\Phi_y^2}{q_\infty^2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, q_\infty^2=u_\infty^2+v_\infty^2 \tag{7-6-20}$$

如果令

$$A_1=\frac{1}{J}\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right), A_2=\frac{1}{J}\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right), A_3=\frac{1}{J}\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right) \tag{7-6-21}$$

$$J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$$

则式（7-6-19）可改写为



$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho A_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\rho A_2\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho A_2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\rho A_3\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)=0 \qquad (7-6-22)$$

这是个强守恒型方程。对式（7－6－19）引进人工密度[28-30]，得到

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\tilde{\rho}U}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{\rho}V}{J}\right)=0 \qquad (7-6-23)$$

对上式建立差分方程，即

$$\delta_\xi^-\left(\frac{\tilde{\rho}U}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j}+\delta_\eta^-\left(\frac{\tilde{\rho}V}{J}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}=0 \qquad (7-6-24)$$

此式的 AF2 格式[31, 32]为

$$\left[\alpha-\delta_\eta^-\left(\tilde{\rho}A_3\right)_{i,j+\frac{1}{2}}\right]\left[\alpha\delta_\eta^+-\delta_\xi^-\left(\tilde{\rho}A_1\right)_{i+\frac{1}{2},j}\delta_\xi^+\right]C_{i,j}^n=\alpha\omega L\Phi_{i,j}^n \qquad (7-6-25)$$

式中，δ^- 与 δ^+ 分别为单侧后差与单侧前差算子，例如

$$\left.\begin{aligned}\delta_\xi^-\Diamond_{i,j}&=\Diamond_{i,j}-\Diamond_{i-1,j}, &\quad \delta_\xi^+\Diamond_{i,j}&=\Diamond_{i+1,j}-\Diamond_{i,j}\\ \delta_\eta^-\Diamond_{i,j}&=\Diamond_{i,j}-\Diamond_{i,j-1}, &\quad \delta_\eta^+\Diamond_{i,j}&=\Diamond_{i,j+1}-\Diamond_{i,j}\end{aligned}\right\} \qquad (7-6-26)$$

式中，$\Diamond$ 代表任意物理量；α 是迭代加速参数；ω 是松弛因子；$L\Phi_{i,j}^n$ 代表第 n 次迭代时差分方程式（7－6－24）的残差。另外，式中人工密度 $\tilde{\rho}$ 的定义为

$$\begin{cases}\tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2},j}=\rho_{i+\frac{1}{2},j}-\mu_{i+\frac{1}{2},j}\left(\rho_{i+\frac{1}{2},j}-\rho_{i+r+\frac{1}{2},j}\right)\\ \tilde{\rho}_{i,j+\frac{1}{2}}=\rho_{i,j+\frac{1}{2}}-\mu_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\rho_{i,j+\frac{1}{2}}-\rho_{i,j+s+\frac{1}{2}}\right)\end{cases} \qquad (7-6-27)$$

这里 $\mu_{i,j}$、r、s 的定义是

$$r=\begin{cases}-1 & (u_{i+\frac{1}{2},j}>0)\\ +1 & (u_{i+\frac{1}{2},j}<0)\end{cases},s=\begin{cases}-1 & (v_{i,j+\frac{1}{2}}>0)\\ +1 & (v_{i,j+\frac{1}{2}}<0)\end{cases} \qquad (7-6-28)$$

$$\mu_{i,j}=\max\left[0,\left(1-\frac{1}{M_{i,j}^2}\right)\right] \qquad (7-6-29)$$

式（7－6－23）的计算可分两步进行：第一步求解

$$\left[\alpha-\delta_\eta^-\left(\tilde{\rho}A_3\right)_{i,j+\frac{1}{2}}\right]f_{i,j}^n=\alpha\omega L\Phi_{i,j}^n \qquad (7-6-30)$$

也就是说，沿着η方向解二对角矩阵，求出中间变量$f_{i,j}^n$值。第二步求解

$$\left[\alpha\delta_\eta^+ - \delta_\xi^-\left(\tilde{\rho}A_1\right)_{i+\frac{1}{2},j}\delta_\xi^+\right]C_{i,j}^n = f_{i,j}^n \tag{7-6-31}$$

也就是说，沿着ξ方向解三对角矩阵方程，求出$C_{i,j}^n$；注意到

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^n + C_{i,j}^n \tag{7-6-32}$$

于是$\Phi_{i,j}^{n+1}$值便得到了。如此进行迭代，直到前后两轮迭代$\Phi_{i,j}^{n+1}$值之差满足一定允差为止。大量的数值实验表明：采用人工密度的修正及 AF2 因式分解法能够快速高效率的获得跨声速流场的数值解。

7.6.2 二维小扰动势函数方程的 Murman-Cole 格式及线松弛解法

20 世纪 70 年代初，Murman 和 Cole 提出了求解平面定常位势方程的混合有限差分线松弛方法[33]，该方法为跨声速流场的数值计算起了开创性的重要推动作用，为此本节仅以跨声速二维小扰动位势方程为例，扼要地介绍这个方法的主要思想和主要实施步骤。跨声速二维定常小扰动位势方程可由式（6-2-16）简化后得到

$$A\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \tag{7-6-33}$$

式中，$A = \left(1 - M_\infty^2\right) - \dfrac{\gamma+1}{V_\infty}M_\infty^2\varphi_x$。

假定在直角坐标系中采用等间距网格将方程式（7-6-33）离散。Murman-Cole 差分格式的基本思想是在局部亚声速区域采用中心差分公式，在局部超声速区采用迎风差分公式。由于这里假定流动的方向很接近x方向，因此迎风差分公式仅出现在x方向上。中心差分公式是

$$\begin{cases}\left(\varphi_x\right)_{i,j} = \dfrac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\Delta x} = \delta_x\varphi_{i,j} \\ \left(\varphi_{xx}\right)_{i,j} = \dfrac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} = \delta_{xx}\varphi_{i,j} \\ \left(\varphi_{yy}\right)_{i,j} = \dfrac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = \delta_{yy}\varphi_{i,j}\end{cases} \tag{7-6-34}$$

迎风差分公式是

$$\left(\varphi_x\right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-2j}}{2\Delta x} = \delta_x^-\varphi_{i,j} \tag{7-6-35a}$$

$$\left(\varphi_{xx}\right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} = \delta_{xx}^-\varphi_{i,j} \tag{7-6-35b}$$



式中，δ_x、δ_y、δ_{xx}、δ_{yy} 表示中心差分算子；δ_x^-、δ_{xx}^- 表示一侧后差算子。

如果令

$$\begin{cases} A_{i,j}=(1-M_\infty^2)-\dfrac{(\gamma+1)}{V_\infty}M_\infty^2\dfrac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ b_{i,j}=A_{i,j}\dfrac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}=A_{i,j}\delta_{xx}\varphi_{i,j} \\ c_{i,j}=\dfrac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}=\delta_{yy}\varphi_{i,j} \end{cases} \tag{7-6-36}$$

点 (i,j) 处的流场性质是按下述办法进行判断的

① 若 $A_{i-1,j}>0$ 且 $A_{i,j}\geqslant 0$ 时，则点（i,j）的亚声速点
② 若 $A_{i-1,j}<0$ 且 $A_{i,j}<0$ 时，则点（i,j）的超声速点
③ 若 $A_{i-1,j}\geqslant 0$ 且 $A_{i,j}<0$ 时，则点（i,j）的声速点
④ 若 $A_{i-1,j}<0$ 且 $A_{i,j}\geqslant 0$ 时，则点（i,j）的激波点　　（7－6－37）

于是方程式（7－6－33）在亚声速点、超声速点、声速点和激波点处的差分方程分别是

$$\left.\begin{array}{ll} \text{对亚声速点} & b_{i,j}+c_{i,j}=0 \\ \text{对超声速点} & b_{i-1,j}+c_{i,j}=0 \\ \text{对声速点} & c_{i,j}=0 \\ \text{对激波点} & b_{i,j}+c_{i,j}=0 \end{array}\right\} \tag{7-6-38}$$

这就是 Murman-Cole 格式对非守恒方程式（7－6－33）所形成的差分方程。显然，在超声速区的差分方程所对应的修正方程是

$$A\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}(A\varphi_{xx}) \tag{7-6-39}$$

这个方程的右端项是粘性项，因此差分方程式（7－6－38）包含了人工粘性项，这使得差分格式具有了自动捕获激波的能力。另外，非守恒方程式（7－6－33）也可写为守恒形式

$$\frac{\partial B}{\partial x}+\varphi_{yy}=0 \tag{7-6-40}$$

式中

$$B=\left(1-M_\infty^2\right)\varphi_x-\frac{1}{2}\frac{(\gamma+1)}{V_\infty}M_\infty^2\varphi_x^2 \tag{7-6-41}$$

守恒型方程所对应的差分方程可统一写为

$$b_{i,j}+c_{i,j}-\varepsilon_{i,j}b_{i,j}+\varepsilon_{i-1,j}b_{i-1,j}=0 \tag{7-6-42}$$

式中，ε 为开关函数，其定义为

$$\varepsilon_{i,j}=\begin{cases}0 & (A_{i,j}>0)\\ 1 & (A_{i,j}<0)\end{cases} \tag{7-6-43}$$

显然，差分方程式（7－6－42）所对应的修正方程是

$$\frac{\partial}{\partial x}(B)+\varphi_{yy}=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon A\varphi_{xx}) \tag{7-6-44}$$

式中右端项是粘性项。因此差分方程式（7－6－42）包含了人工粘性项，它也具有自动捕获激波的能力。

跨声速小扰动势函数方程的差分方程所形成的代数方程组到底用什么方法去求解，是关系到流场数值解收敛快慢的重要问题。前面在 7.6.1 节中已介绍过因式分解法，这里介绍线松弛方法，这种方法的基本思想是：考虑到跨声速流场既存在着亚声速区域，又存在着超声速区域，还有声速线与激波线，因此线松弛扫描的方向以沿气流方向为宜，这样做符合超声速流动时信息传播的特点，而松弛的线选成垂直于气流方向的 y 线。其具体实施过程是：

（1）对方程式（7－6－36）里 $A_{i,j}$ 中的 φ_x 项采取

$$\varphi_x=\frac{\varphi_{i+1,j}^n-\varphi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \tag{7-6-45a}$$

对 $A_{i-1,j}$ 中的 φ_x 采用了

$$\varphi_x=\frac{\varphi_{i,j}^n-\varphi_{i-2,j}^n}{2\Delta x} \tag{7-6-45b}$$

（2）对式（7－6－36）里 $b_{i-1,j}$ 中的 φ_{xx} 采取

$$\varphi_{xx}=\frac{\tilde{\varphi}_{i,j}-2\varphi_{i-1,j}^{n+1}+\varphi_{i-2,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{7-6-45c}$$

对 $b_{i,j}$ 中的 φ_{xx} 采用了

$$\varphi_{xx}=\frac{\varphi_{i+1,j}^n-2\tilde{\varphi}_{i,j}+\varphi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{7-6-45d}$$

（3）对式（7－6－36）里 $c_{i,j}$ 中的 φ_{yy} 采用了

$$\varphi_{yy}=\frac{\tilde{\varphi}_{i,j+1}-2\tilde{\varphi}_{i,j}+\tilde{\varphi}_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \tag{7-6-45e}$$

式中，上标 $n+1$ 表示新值；在线松弛过程中，$i-1$ 与 $i-2$ 点的新值是已知的，而 i 点的新值是未知的；上标 n 表示老值。$\tilde{\varphi}_{i,j}$ 表示要松弛的 $\varphi_{i,j}$，它与旧值及新值间的关系是

$$\tilde{\varphi}_{i,j}=\varphi_{i,j}^n+\frac{1}{\omega}\left(\varphi_{i,j}^{n+1}-\varphi_{i,j}^n\right) \tag{7-6-46}$$

这里 ω 为松弛因子。令 $\Delta\varphi_{i,j}^n=\varphi_{i,j}^{n+1}-\varphi_{i,j}^n$，$R_{i,j}^n$ 为将 $\varphi_{i,j}^n$ 代入到式（7－6－38）后得到的残差。



将式（7－6－45）与式（7－6－46）代入到式（7－6－38）后便得到

（1）对亚声速点有

$$A_{i,j}\left(-\frac{2}{\omega}\Delta\varphi_{i,j}^{n}+\Delta\varphi_{i-1,j}^{n}\right)\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{\omega}\left(\Delta\varphi_{i,j+1}^{n}-2\Delta\varphi_{i,j}^{n}+\Delta\varphi_{i,j-1}^{n}\right)\frac{1}{(\Delta y)^2}+R_{i,j}^{n}=0 \qquad (7-6-47a)$$

（2）对超声速点有

$$A_{i-1,j}\left(\frac{1}{\omega}\Delta\varphi_{i,j}^{n}-2\Delta\varphi_{i-1,j}^{n}+\Delta\varphi_{i-2,j}^{n}\right)\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{\omega}\left(\Delta\varphi_{i,j+1}^{n}-2\Delta\varphi_{i,j}^{n}+\Delta\varphi_{i,j-1}^{n}\right)\frac{1}{(\Delta y)^2}+R_{i,j}^{n}=0 \qquad (7-6-47b)$$

（3）对声速点有

$$\frac{1}{\omega}\left(\Delta\varphi_{i,j+1}^{n}-2\Delta\varphi_{i,j}^{n}+\Delta\varphi_{i,j-1}^{n}\right)\frac{1}{(\Delta y)^2}+R_{i,j}^{n}=0 \qquad (7-6-47c)$$

（4）对激波点有

$$A_{i,j}\left(-\frac{2}{\omega}\Delta\varphi_{i,j}^{n}+\Delta\varphi_{i-1,j}^{n}\right)\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{\omega}\left(\Delta\varphi_{i,j-1}^{n}-2\Delta\varphi_{i,j}^{n}+\Delta\varphi_{i,j+1}^{n}\right)\frac{1}{(\Delta y)^2}+R_{i,j}^{n}=0 \qquad (7-6-47d)$$

式中松弛因子 ω 的取值可以各不相同：对亚声速点可取 $0<\omega<2$；对超声速点可取 $0<\omega\leqslant 1$；对声速点和激波点可取 $\omega=1$。可以看出（7－6－47）式是关于 $\Delta\varphi_{i,j+1}^{n},\Delta\varphi_{i,j}^{n}$ 与 $\Delta\varphi_{i,j-1}^{n}$ 的三对角型线性方程组，因此可用追赶法快速求解[34]。

§7.7　跨声速计算中高效率、高分辨率算法的概述

跨声速计算是 20 世纪 70 年代以来气体动力学和计算流体力学领域中发展最快的热点之一。本节不去评价涌现出的众多算法，仅想对其中的几个方面略作概述。对于工程计算，人们对跨声速计算的新算法最关心的一是效率，二是捕捉激波的分辨率，三是格式的精度与稳定性。这里仅想对其中的前两点略作介绍。

7.7.1　高效率算法

ADI 方法（The Alternating Direction Implicit Technique）即交替方向隐格式是最早用于跨声速位势函数和跨声速流函数方法中将离散方程组进行求解的主要方法之一。之后隐式因式分解法（Implicit Approximate Factorization Scheme）获得了发展并成功的用于求解原始参数 Euler 方程的求解，例如 Beam R.M.，Warming R.F.，Pulliam T.H.，Steger J.L.等人在这方面都做了大量工作。与此同时，LU 格式（LU decompositions）与 SIP 强隐式格式（Strongly Implicit Procedure）也飞速发展，例如 Jameson A., Turkel E., Stone H.L., Sankel N.L.等人在这两面获得了大量成果。另外，多层网格技术（Multiple-Grid Technique 简称 MG 法）也在

Euler 方程与 N-S 方程求解过程中被广泛采用，而且在理论上与数值实践上都证实：MG 方法的加速效果非常显著，在这方面，Brandt A., Jameson A., Ron-Ho Ni 等人的工作都十分突出。应该指出，上面所介绍的算法是在结构网格的框架下完成的，20 世纪 90 年代以来非结构网格的出现，又从另外一个侧面去探讨实现高效率求解复杂流场的可能性。这里所谓网格是结构的，就是指网格数据的生成是能够用数学表达式进行表达的，它具有序列性和数据结构上的有序性。这里所谓网格是非结构的，是指它既没有严格意义上的数学递推关系式，而且数据结构上也具有一定的随机性和自适应性的特征。正因如此，非结构网格具有非常灵活与合理的布点功能，使它具有比结构网格更强的生命力，并成为现代计算流体力学网格生成领域的主攻方向之一。因此，在非结构网格下，发展各种有效的算法本身就是一项富有挑战性的创新工作，也是一项有待完善的工作。作为非结构生成这方面的一个例子，文献[35,36]改进和发展了 Bowyer-Watson 算法并针对叶轮机械中叶栅通道的特点，提出了一种快速生成三维非结构网格的方法，并且在非结构网格下完成了涡轮静子与涡轮转子三维流场的计算，获得了满意的三维 N-S 方程的数值解。

7.7.2 高分辨率算法概述及 Harten 的 TVD 格式

一、高分辨率算法概述

在跨声速流场的计算中，提高捕捉激波的分辨率始终是一个重要的奋斗目标，然而不同时期所捕捉的激波质量是逐步提高的。1950 年，von Neumann 和 Richtmyer [37]提出了显式的加入“粘性系数”的人工耗散格式。能否不显式的加入粘性，而直接用有限差分所隐含的耗散去抹平激波呢？正是出于这个想法 1954 年著名的 Lax 格式[38]问世了。在那篇文章中，Lax 提出了守恒型微分方程的重要概念。在 Lax 思想的影响下，1959 年 Godunov 格式[39]，1960 年 Lax-Wendroff 格式[40]，1961 年 Rusanov 格式[41]等相继提出，并且成为 20 世纪 60 年代的一批优秀格式。进入 80 年代后，又有一批格式产生，特别是 Steger-Warming 的矢通量分裂格式[42]、Van Leer 的分裂格式[43]、Roe 格式[44]等，它们都在捕捉激波方面做出了贡献，而且都是经历过大量算例考验的好格式。特别要指出的是，1983 年 Harten 首次提出了高分辨率（High Resolution）和总变差不增（Total Variation Diminishing）[45]的概念，这在数值方法的发展历程中具有十分重要的意义。Harten 的思想影响了一批高分辨格式的产生，例如 Osher，Chakravarthy，Yee 等人的高分辨率格式以及 ENO（Essentially Non Oscillatory）格式[46]，NND（Non-oscillatory, Non-free-parameter, Dissipative）格式[47,48]、UENO 格式[49]和 WENO(Weighted ENO）格式[50]的相继出现，这些格式都有力的提高了捕捉激波间断面和接触间断面的质量。另外，一类运动界面的追踪方法[51,52]也在不断的发展与完善。

二、三维空间中 Jacobian 矩阵及其特征值的统一表达

设 (ξ,η,ζ) 为一般曲线坐标系，它与直角笛卡儿坐标系 (x,y,z) 间的关系为



$$\left.\begin{array}{l}\xi=\xi(x,y,z,t)\\ \eta=\eta(x,y,z,t)\\ \zeta=\zeta(x,y,z,t)\\ \tau=t\end{array}\right\} \tag{7-7-1}$$

于是方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z}=\frac{\partial \boldsymbol{E}_V}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_V}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}_V}{\partial z} \tag{7-7-2}$$

被变换为

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{Q}}}{\partial \tau}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}}{\partial \eta}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}}{\partial \zeta}=\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}_V}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}_V}{\partial \eta}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}_V}{\partial \zeta} \tag{7-7-3}$$

式中，$\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ 分别为沿 x,y,z 方向上无粘部分的通量；$\boldsymbol{E}_V,\boldsymbol{F}_V,\boldsymbol{G}_V$ 分别为沿 x,y,z 方向上粘性部分的通量；$\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{F}},\tilde{\boldsymbol{G}}$ 分别为沿 ξ,η,ζ 方向上无粘部分的通量；$\tilde{\boldsymbol{E}}_V,\tilde{\boldsymbol{F}}_V,\tilde{\boldsymbol{G}}_V$ 分别为沿 ξ,η,ζ 方向上的粘性部分的通量；$\boldsymbol{Q}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 分别为 (x,y,z) 坐标系与 (ξ,η,ζ) 坐标系的守恒变量。显然，

$$\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{Q}}\\ \tilde{\boldsymbol{E}}\\ \tilde{\boldsymbol{F}}\\ \tilde{\boldsymbol{G}}\end{bmatrix}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \xi_t&\xi_x&\xi_y&\xi_z\\ \eta_t&\eta_x&\eta_y&\eta_z\\ \zeta_t&\zeta_x&\zeta_y&\zeta_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix} \tag{7-7-4}$$

式中 J 由（7-6-18）式定义。令 $\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{F}},\tilde{\boldsymbol{G}}$ 统一表示为如下形式

$$\tilde{\boldsymbol{E}}\ \text{或}\ \tilde{\boldsymbol{F}}\ \text{或}\ \tilde{\boldsymbol{G}}=\frac{1}{J}\left(K_t\boldsymbol{Q}+K_x\boldsymbol{E}+K_y\boldsymbol{F}+K_z\boldsymbol{G}\right) \tag{7-7-5}$$

并令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}$ 分别表示 $\partial\boldsymbol{E}/\partial\boldsymbol{Q},\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{Q},\partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{Q},\partial\tilde{\boldsymbol{E}}/\partial\tilde{\boldsymbol{Q}},\partial\tilde{\boldsymbol{F}}/\partial\tilde{\boldsymbol{Q}},\partial\tilde{\boldsymbol{G}}/\partial\tilde{\boldsymbol{Q}}$，则它们之间有如下关系

$$\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}}\\ \tilde{\boldsymbol{B}}\\ \tilde{\boldsymbol{C}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_t&\xi_x&\xi_y&\xi_z\\ \eta_t&\eta_x&\eta_y&\eta_z\\ \zeta_t&\zeta_x&\zeta_y&\zeta_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix} \tag{7-7-6}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。于是 $\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}$ 又可统一表示为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\ \text{或}\ \tilde{\boldsymbol{B}}\ \text{或}\ \tilde{\boldsymbol{C}}=K_t\boldsymbol{I}+K_x\boldsymbol{A}+K_y\boldsymbol{B}+K_z\boldsymbol{C} \tag{7-7-7}$$

显然，当 K 分别取 ξ,η,ζ 时，则上式分别对应于 $\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}$ 矩阵。设 $\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}$ 具有完备的右特征向量矩阵[53]，因此有

$$\begin{cases}\tilde{A}=(R\Lambda R^{-1})_{\tilde{A}}\equiv(R\Lambda L)_{\tilde{A}}\\\tilde{B}=(R\Lambda R^{-1})_{\tilde{B}}\equiv(R\Lambda L)_{\tilde{B}}\\\tilde{C}=(R\Lambda R^{-1})_{\tilde{C}}\equiv(R\Lambda L)_{\tilde{C}}\end{cases}\tag{7-7-8}$$

令 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{L}$ 分别表示 $\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}$ 中的任一个矩阵的右特征向量矩阵与左特征向量矩阵，显然它们可用右特征矢量 $\boldsymbol{r}^{(j)}$（它为列矢量）与左特征矢量 $\boldsymbol{l}^{(j)}$（它为行矢量）来表示，即

$$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)},\boldsymbol{r}^{(3)},\boldsymbol{r}^{(4)},\boldsymbol{r}^{(5)}]\tag{7-7-9}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{l}^{(1)}\\\boldsymbol{l}^{(2)}\\\boldsymbol{l}^{(3)}\\\boldsymbol{l}^{(4)}\\\boldsymbol{l}^{(5)}\end{bmatrix}\tag{7-7-10}$$

式中，左特征矢量与右特征矢量相互正交，即

$$\boldsymbol{l}^{(i)}\cdot\boldsymbol{r}^{(j)}=\delta_{ij}\tag{7-7-11}$$

如果用符号 $\sigma(\tilde{A})$ 表示矩阵 $\tilde{A}$ 的特征值，则 $\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}$ 的特征值便可用下式统一表达，即

$$\sigma(\tilde{A}\text{ 或 }\tilde{B}\text{ 或 }\tilde{C})=K_t\boldsymbol{I}+\sigma(K_x\boldsymbol{A}+K_y\boldsymbol{B}+K_z\boldsymbol{C})\tag{7-7-12}$$

也即是

$$\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=K_t+K_xu+K_yv+K_zw\\\lambda_4=\lambda_1+a\left[(K_x)^2+(K_y)^2+(K_z)^2\right]^{1/2}+K_t\\\lambda_5=\lambda_1-a\left[(K_x)^2+(K_y)^2+(K_z)^2\right]^{1/2}+K_t\end{cases}\tag{7-7-13}$$

这里 a 为声速；u,v,w 为速度 $\boldsymbol{V}$ 在 (x,y,z) 坐标系的速度分量。今以 $\tilde{A}$ 为例，则有

$$\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{R}=\Lambda\equiv\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5\}\tag{7-7-14}$$

这里 L,R,Λ 与 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$ 均应理解为矩阵 $\tilde{A}$ 所对的相应矩阵与特征值。

三、非线性模型方程的一阶与二阶 TVD 格式

讨论非线性模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0\tag{7-7-15}$$

设逼近（7-7-15）式的守恒型一阶精度三点差分格式为

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\lambda\left(h^n_{i+\frac{1}{2}}-h^n_{i-\frac{1}{2}}\right)\tag{7-7-16}$$



式中数值通量 $h_{i+\frac{1}{2}}$ 为

$$h_{i+\frac{1}{2}} = h(u_i, u_{i+1}),\quad \lambda = \Delta t/\Delta x \tag{7-7-17}$$

这里 h 应满足相容性条件，即 $h(u_i,u_i)=f(u_i)$。数值通量 $h_{i+\frac{1}{2}}$ 的具体表达式为

$$h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f_i + f_{i+1} - \psi\left(a_{i+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{i+\frac{1}{2}}u\right] \tag{7-7-18}$$

其中

$$f_i = f(u_i),\qquad \Delta_{i+\frac{1}{2}}u \equiv u_{i+1} - u_i \tag{7-7-19a}$$

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (f_{i+1} - f_i)/\Delta_{i+\frac{1}{2}} & u(\Delta_{i+\frac{1}{2}}u \neq 0) \\ a(u_i) & (\Delta_{i+\frac{1}{2}}u = 0) \end{cases} \tag{7-7-19b}$$

而 ψ 是 λ 和 $a_{i+\frac{1}{2}}$ 的函数。对于二阶精度，Harten 是通过对通量进行修正的办法来提高差分格式的精度。二阶 TVD 的显格式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda\left[h^m(u_i^n, u_{i+1}^n) - h^m(u_{i-1}^n, u_i^n)\right] \tag{7-7-20}$$

式中

$$h^m_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f_i + f_{i+1} + g_i + g_{i+1} - Q\left(a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{i+\frac{1}{2}}u\right] \tag{7-7-21a}$$

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (f_{i+1} - f_i)/\Delta_{i+\frac{1}{2}}u & (\Delta_{i+\frac{1}{2}}u \neq 0) \\ a(u_i) & (\Delta_{i+\frac{1}{2}}u = 0) \end{cases} \tag{7-7-21b}$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (g_{i+1} - g_i)/\Delta_{i+\frac{1}{2}}u & (\Delta_{i+\frac{1}{2}}u \neq 0) \\ 0 & (\Delta_{i+\frac{1}{2}}u = 0) \end{cases} \tag{7-7-21c}$$

$$g_i = \frac{1}{2}\sigma \max\left\{0, \min\left[Q\left(a_{i+\frac{1}{2}}\right)\left|\Delta_{i+\frac{1}{2}}u\right|,\ \sigma\, Q\left(a_{i-\frac{1}{2}}\right)\Delta_{i-\frac{1}{2}}u\right]\right\} \tag{7-7-21d}$$

$$\sigma \equiv \operatorname{sgn}\left(\Delta_{i+\frac{1}{2}}u\right),\ \Delta_{i+\frac{1}{2}}u \equiv u_{i+1} - u_i \tag{7-7-21e}$$

$$Q(x)=\begin{cases}|x| & (|x|>\varepsilon)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{\varepsilon}+\varepsilon\right) & (|x|\leqslant\varepsilon)\end{cases} \tag{7-7-21f}$$

这里ε为常数，通常可取$\varepsilon=0.1$左右。隐式TVD格式为

$$u_i^{n+1}+\lambda\theta\left(\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}-\tilde{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}\right)=u_i^n-\lambda(1-\theta)\left(\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}^{n}-\tilde{h}_{i-\frac{1}{2}}^{n}\right) \tag{7-7-22}$$

式中θ为格式参数，即当θ取为 0 时为显格式；当θ取为 1 时为隐式差分格式；数值通量$\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}$为多点格式，即

$$\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}^{k}=\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}\left(u_{i-1}^k,u_i^k,u_{i+1}^k,u_{i+2}^k\right) \tag{7-7-23}$$

式中k取为n或者$n+1$。$\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}$的具体表达式为

$$\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\tilde{f}_i+\tilde{f}_{i+1}-\psi\left(\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{i+\frac{1}{2}}u\right] \tag{7-7-24a}$$

$$\tilde{f}_i\equiv(f+g)_i \tag{7-7-24b}$$

$$g_i\equiv\min\ \mathrm{mod}\left(\sigma_{i+\frac{1}{2}}\Delta_{i+\frac{1}{2}}u,\sigma_{i-\frac{1}{2}}\Delta_{i-\frac{1}{2}}u\right) \tag{7-7-24c}$$

$$\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}=a_{i+\frac{1}{2}}+\gamma_{i+\frac{1}{2}} \tag{7-7-24d}$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}\equiv\begin{cases}\dfrac{g_{i+1}-g_i}{\Delta_{i+\frac{1}{2}}u} & (\Delta_{i+\frac{1}{2}}u\neq0)\\ 0 & (\Delta_{i+\frac{1}{2}}u=0)\end{cases} \tag{7-7-24e}$$

$$\sigma(x)=\frac{1}{2}\psi(x)+\lambda\left(\theta-\frac{1}{2}\right)x^2 \tag{7-7-24f}$$

$$\min\ \mathrm{mod}(x,y)\equiv\mathrm{sgn}(x)\cdot\max\left\{0,\min\left[|x|,y\,\mathrm{sgn}(x)\right]\right\} \tag{7-7-24g}$$

这里min mod函数的含义是：如果x,y是同号，则取绝对值最小的值；如果它们是异号，则取其为零。显然，如果用符号M与N分别代表如下差分算子

$$(Mu)_i=u_i+\lambda\theta\left(\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}-\tilde{h}_{i-\frac{1}{2}}\right) \tag{7-7-25}$$



$$(Nu)_i = u_i - \lambda(1-\theta)\left(\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{h}_{i-\frac{1}{2}}\right) \tag{7-7-26}$$

因此，欲使式（7－7－22）是 TVD 的，只要使下式成立，即

$$\left.\begin{aligned} TV(Mu^{n+1}) \geqslant TV(u^{n+1}) \\ TV(Nu^{n}) \leqslant TV(u^{n}) \end{aligned}\right\} \tag{7-7-27}$$

今设数值通量 $\tilde{h}_{i+\frac{1}{2}}$ 满足 Lipschitz 连续，并将（7－7－22）式改写为

$$u_i^{n+1} - \lambda\theta\left(C_{i+\frac{1}{2}}\Delta_{i+\frac{1}{2}}u - D_{i-\frac{1}{2}}\Delta_{i-\frac{1}{2}}u\right)^{n+1} = u^n + \lambda(1-\theta)\left(C_{i+\frac{1}{2}}\Delta_{i+\frac{1}{2}}u - D_{i-\frac{1}{2}}\Delta_{i-\frac{1}{2}}u\right)^n \tag{7-7-28}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} C_{i\pm\frac{1}{2}} \equiv C\left(u_{i\mp1}, u_i, u_{i\pm1}, u_{i\pm2}\right) \\ D_{i\pm\frac{1}{2}} \equiv D\left(u_{i\mp1}, u_i, u_{i\pm1}, u_{i\pm2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7-7-29}$$

是有界函数。Harten 指出：满足式（7－7－27）的充分条件有两条：

（1）对所有的 i 均有

$$\tilde{C}_{i+\frac{1}{2}} = \lambda(1-\theta)C_{i+\frac{1}{2}} \geqslant 0, \quad \tilde{D}_{i+\frac{1}{2}} \equiv \lambda(1-\theta)D_{i+\frac{1}{2}} \geqslant 0 \tag{7-7-30a}$$

$$\tilde{C}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{D}_{i+\frac{1}{2}} = \lambda(1-\theta)\left(C_{i+\frac{1}{2}} + D_{i+\frac{1}{2}}\right) \leqslant 1 \tag{7-7-30b}$$

（2）对所有的 i 均有

$$\left.\begin{aligned} -\infty \leqslant -\lambda\theta C_{i+\frac{1}{2}} \leqslant 0 \\ -\infty \leqslant -\lambda\theta D_{i+\frac{1}{2}} \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{7-7-30c}$$

作为特例，当 $\theta=0$ 时式（7－7－22）变为显格式，于是这时格式具有 TVD 性质的充分条件式（7－7－30）被简化为[54]

$$C^n_{i+\frac{1}{2}} \geqslant 0, \qquad D^n_{i+\frac{1}{2}} \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant C^n_{i+\frac{1}{2}} + D^n_{i+\frac{1}{2}} \leqslant 1 \tag{7-7-31}$$

四、常系数一维双曲型方程组的 TVD 格式

设常系数双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{7-7-32}$$

这里
$$A = R\Lambda L \tag{7-7-33}$$
其中 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{L}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的右特征向量矩阵与左特征向量矩阵。引进特征变量 $\boldsymbol{W}$
$$W = LU \tag{7-7-34}$$
于是方程组式（7-7-32）被变为特征形式的方程组：
$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \tag{7-7-35}$$
其中
$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} \tag{7-7-36}$$
于是式（7-7-35）的分量形式为
$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial w_k}{\partial x} = 0 \ (k = 1 \sim 5) \tag{7-7-37}$$
考虑到这时的五个单个方程（即式（7-7-37））是互不相联系的，所以可以对每一个单个方程构造相应的 TVD 格式。令 $f_k = \lambda_k w_k$，并注意到 $\lambda_k =$ 常数，则式（7-7-37）可写为
$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial x} = 0 \tag{7-7-38}$$
于是便可完全仿照式（7-7-15）构造 TVD 格式的过程将式（7-7-38）也构造为 TVD 格式，即
$$w_{k,j}^{n+1} = w_{k,j}^{n} - \beta\left(h_{k,j+\frac{1}{2}}^{n} - h_{k,j-\frac{1}{2}}^{n}\right), \ \beta \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{7-7-39}$$
式中
$$h_{k,j+\frac{1}{2}}^{n} \equiv \frac{1}{2}\left[(\lambda_k w_k)_j + (\lambda_k w_k)_{j+1} + \varphi_{k,j+\frac{1}{2}}\right] \tag{7-7-40}$$
将式（7-7-37）的 5 个分方程都构造成 TVD 格式后，再借助于式（7-7-41）变回到原始变量中去，即
$$U = RLU = RW = \sum_{k=1}^{5}\left(w_k r^{(k)}\right), \quad AU = R\Lambda W = \sum_{k=1}^{5}(\lambda_k w_k r^{(k)}) \tag{7-7-41}$$
式中 $W = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]^{\mathrm{T}}$；$r^{(k)}$ 同（7-7-9）式定义，因此，用右特征矢量 $r^{(k)}$ 乘以式（7-7-39）式，并对 k 作和，则得到
$$U_j^{n+1} = U_j^{n} - \beta\left(\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}\right), \qquad \beta \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{7-7-42}$$
$$\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}} \equiv \sum_{k=1}^{5}\left(h_{k,j+\frac{1}{2}} r^{(k)}\right) = \frac{1}{2}\left[AU_j^{n} + AU_{j+1}^{n} + \sum_{k=1}^{5}\left(\varphi_{k,j+\frac{1}{2}} r^{(k)}\right)\right] \tag{7-7-43}$$



式（7－7－42）与式（7－7－43）就是针对常系数方程组式（7－7－32）而言的TVD格式。

五、非线性双曲守恒方程组的TVD格式

目前，非线性方程组 TVD 格式的构造方法仅仅是在线性方程组 TVD 格式构造方法的基础上作一些形式上的推广，严格的理论证明仍需进一步去完善。设双曲方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0 \tag{7-7-44}$$

$$A(U)=\frac{\partial F}{\partial U}=R(U)\Lambda(U)L(U) \tag{7-7-45}$$

于是对方程式（7－7－44）构造TVD格式便为

$$U_j^{n+1}=U_j^n-\beta\left(\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}-\tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}\right),\qquad \beta\equiv\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{7-7-46}$$

式中

$$\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[F\left(U_j^n\right)+F\left(U_{j+1}^n\right)+(R\Phi)_{j+\frac{1}{2}}\right] \tag{7-7-47}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\left[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right]^{\mathrm{T}} \tag{7-7-48}$$

这里 $\boldsymbol{R}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右特征向量矩阵。

7.7.3 具有TVD保持性质的Runge-Kutta方法

假设方程组式（7－7－2）被离散，其半离散化形式为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=R(Q) \tag{7-7-49}$$

注意此处 $R(Q)$ 是式（7－7－2）的空间微分算子所对应的离散部分，它是 Q 的函数。今考虑方程式（7－7－49）一阶时间离散格式

$$Q^{n+1}=Q^n+(\Delta t)R(Q^n) \tag{7-7-50}$$

整理为算子形式便为

$$Q^{n+1}=\left(I+(\Delta t)R\right)Q^n\equiv M(Q^n) \tag{7-7-51}$$

假设式（7－7－51）具有TVD性质，换句话说就是使

$$TV(Q^{n+1})\leqslant TV(Q^n)\ （当\lambda\leqslant\lambda_0时）$$

或者写成

$$TV(M(Q^n))\leqslant TV(Q^n)\ 或者TV(M(Q))\leqslant TV(Q) \tag{7-7-52}$$

这里$\lambda \equiv \Delta t/\Delta x$。现在要求在这个基础上构造半离散格式式（7－7－49）的r阶时间离散格式

$$Q^{n+1} = N(Q^n)$$

使它也具有TVD的性质，也就是说

$$TV\left(N(Q)\right) \leqslant TV(Q) \tag{7-7-53}$$

成立。文献[55-57]将标准的Runge-Kutta时间离散格式进行了改造，使其具有上述所要求的TVD保持性。下面仅给出这种方法的两点主要结论：

（1）具有TVD保持性质的二阶显式Runge-Kutta时间离散格式为

$$\left.\begin{aligned}
&Q^{(0)} = Q^n\\
&Q^{(1)} = Q^{(0)} + (\Delta t)R^{(0)}\\
&Q^{(2)} = Q^{(0)} + \frac{1}{2}(\Delta t)R^{(0)} + \frac{1}{2}(\Delta t)R^{(1)}\\
&Q^{n+1} = Q^{(2)}
\end{aligned}\right\} \tag{7-7-54}$$

当$\lambda \leqslant \lambda_0$时，格式（7－7－54）式具有TVD的保持性，这里$\lambda \equiv \Delta t/\Delta x$。

（2）具有TVD保持性的三阶显式Runge-Kutta时间离散格式为

$$\left.\begin{aligned}
&Q^{(0)} = Q^n\\
&Q^{(1)} = Q^{(0)} + (\Delta t)R^{(0)}\\
&Q^{(2)} = Q^{(0)} + \frac{1}{4}(\Delta t)R^{(0)} + \frac{1}{4}(\Delta t)R^{(1)}\\
&Q^{(3)} = Q^{(0)} + \frac{1}{6}(\Delta t)R^{(0)} + \frac{1}{6}(\Delta t)R^{(1)} + \frac{1}{6}(\Delta t)R^{(2)}\\
&Q^{n+1} = Q^{(3)}
\end{aligned}\right\} \tag{7-7-55}$$

参 考 文 献

1 Ferrari C，Tricomi F G. Transonic aerodynamics. New York：Academic Press，1968

2 童秉纲，孔祥言，邓国华，气体动力学. 北京：高等教育出版社，1990

3 潘锦珊等. 气体动力学基础（修订版）. 北京：国防工业出版社，1989

4 姚傲秋，刘世兴，方人淞. 实用气体动力学（上下册）.北京：北京科学教育出版社，1961

5 朱民.空气动力学（下册）. 北京：北京科学教育出版社，1963

6 徐华舫.空气动力学基础（上下册）.北京：北京航空学院出版社，1987

7 Краснов Н Ф. Аэродинамика телвращ ения. Москва：Оборонгиз，1958（中译本：浙江大学应用力学教研组以及钱翼稷，陆志芳，潘杰元译，北京：科学出版社，1965）

8 Sauer R. General characteristics of the flow through nozzles at critical speeds. NACA TM 1147，（1947）



9　林同骥，贾振学. 亚跨超声速喷管流场. 力学学报，1978，10（1）：1-18

10　贾振学，林同骥. 跨声速双曲型喷管流动. 力学学报，1979，11（3）：199-208

11　浦群，林同骥. 二元亚跨声速喷管流动. 力学学报，1984，16（6）：535-545

12　Hopkins D F，Hill D E. Effect of small radius of curvature on transonic flow in axisymmetric nozzles. 1966，AIAA J，4（8）

13　Tomotika S，Tamada S. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid-.III. Quart. Appl. Math. 1951，9：129～147

14　Hafez M，Lovell D. Numerical solution of transonic stream function equation. AIAA J.，1983，21（3）：327～335

15　王保国. An iterative algorithm between stream function and density for transonic cascade flow. AIAA Journal of Propulsion and Power，1986，2（3）：259～265

16　刘高联. 王甲升. 叶轮机械气体动力学基础. 北京：机械工业出版社，1980

17　王仲奇. 透平机械三元流动计算及其数学和气动力学基础. 北京：机械工业出版社，1983

18　王保国. 跨声速流函数方程强隐式解及确定密度场的新方案. 计算物理，1985，2（4）：474～481

19　王保国，陈乃兴.An improved SIP scheme for numerical solutions of transonic stream function equation. International Journal for Numerical Methods in Fluids，1990，10（5）：591～602

20　吴仲华，王保国. Matrix solution of compressible flow on S_1 surface through a turbomachine blade row with splitter vanes or tandem blades. Trans. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power，1984，106：449～454

21　王保国，华耀南. An improved method of transonic stream function/density iteration and calculation of total pressure loss. The 1987 Tokyo International Gas Turbine Congress. 87-TOKYO-IGTC-37，1987，281～285

22　沈孟育，周盛，林保真. 叶轮机械中的跨音速流动. 北京：科学出版社，1988

23　顾春伟，徐建中. 用拟流函数求解叶轮机械三维可压流场. 工程热物理学报，1991，12（4）：361～366.

24　赵晓路. 使用非正交曲线坐标与速度分量的 S_1 流面跨声流函数解. 工程热物理学报，1984，5（3）：244～249

25　王正明. 交替方向积分法解 S_1 流面跨音流函数方程. 工程热物理学报，1984，5（3）：250～255

26　吴仲华，吴文权，王保国等. 给定激波模型的叶栅跨声速流动计算. 工程热物理学报，1984，5（3）：256～262

27　华耀南，吴文权. S_1 流面跨声速流场流函数矩阵解. 工程热物理学报，1987，8（2）：130～132.

28　Hafez M，et al. Artificial compressiblity method for numerical solutions of transonic full potential equation. AIAA J. 1979，17（8）：838～844

29　Holst T L，Ballhaus W F. Fast conservative schemes for the full potential equation applied to transonic flows. AIAA J. 1979，17（2）：145～152

30 Jameson A. Acceleration of transonic potential flow calculations on arbitrary meshes by the multiple grid method. AIAA Paper 79-1458，(1979)
31 Holst T L. Implicit algorithm for the conservative transonic full-potential equation using an arbitrary mesh. AIAA J. 1979，17 (10)：1038～1045
32 Ballhaus W F，et al. Implicit approximate factorization schemes for the efficient solution of steady transonic flow problems. Proc. 3rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conf. June 1977，pp 27～34
33 Murman E M，Cole J D. Calculation of plane steady transonic flows. AIAA J. 1971，9 (1)：114～121.
34 罗时钧，郑郁文，王蝶茜，钱鸿. 跨音速定常势流的混合差分法. 北京：国防工业出版社，1979
35 王保国等. 非结构网格下含冷却孔的涡轮转子三维流场计算. 航空动力学报，2001，16 (3)：224～231
36 王保国等. 非结构网格生成方法的改进及气膜冷却三维静子流场的求解. 航空动力学报，2001，16 (3)：232～237
37 von Neumann J，Richtmyer R D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. J. of Applied Physics，1950，21：232～257
38 Lax P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communication on Pure and Applied Mathematics，1954，7：159～193
39 Godunov S K. A finite differe, ce method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. Sov. Math. Sb. 1959，47：271～306
40 Lax P D，Wendroff B. Systems of conservation laws. Communication on Pure and Applied Mathematics，1960，13：217～237
41 Rusanov V V. Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. Zhur. Vychislitel noi Mathematicheskoi Fiziki，1961，1 (2)：267～279
42 Steger J L，Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods. J. of Comp. Phys. 1981，40：263～293
43 Van Leer B. Flux vector splitting for the Euler equations. Lect. Notes in Phys.，1982，170：507～512
44 Roe P L. Approximate Riemann solvers，parameter vectors，and difference schemes. J. of Comp. Phys. 1981，43：357～372
45 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation law. J. Comput. Phys. 1983，49：357～393
46 Harten A，Engquist S，Osher S，Chakravarthy S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes III. Journal of Computational Physics，1987，71：231～303
47 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. 空气动力学学报，1988，6 (2)：143～165.
48 Zhang H X，Zhuang F G. NND schemes and their applications to numerical simulation of two-and three-dimensional flow. Advances in Applied Mechanics，1992，29：193～256
49 Wu H M，Wang L. Non existence of third order accurate semi-discrete MUSCL type scheme for nonlinear



conservation laws, and unified construction of high accurate ENO schemes. Proc. Sixth Intern Symp on CFD, Lake Tahoe, Nevada, 1995: 1381～1386

50 Chi-Wang Shu. High order ENO and WENO scheme. In: High-order Methods for Computational Physics (Eds: Barth T J, Deconinck H). Lecture Notes in Computational Science and Engineering (9), New York: Springer-Verlag, 1999

51 Fedkiw R F, Aslam T, Merriman B, Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interface in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method). J. of Comput. Phys. 1999, 152 (2): 457～492.

52 Harvie C J, Fletcher D F. A new volume of fluid advection algorithm. The stream scheme. J. of Comput. Phys. 2000, 162: 1～32

53 王保国，黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法. 北京：国防工业出版社，2000

54 Harten A. On a class of high resolution total-variation stable finite difference scheme. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1984, 21 (1): 1～23

55 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes I. J. of Comput. Phys., 1988, 77: 439～471

56 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II. J. of Comput. Phys., 1989, 83: 32～78

57 Shu C W. Total variation diminishing time discretizations. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1988, 9: 1073～1084

58 Sod G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. J. of Comput. Phys. 1978, 27: 1～31

习　题

1. 试证明跨声速小扰动时扰动位势φ满足方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\left(\frac{\gamma+1}{a_*}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{2}{a_*}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

式中，a_*为临界声速；φ为小扰动位势。

2. 试证在跨声速范围内下式成立，即

$$\beta^2=1-M^2=(\gamma+1)(1-\lambda)\left[1-(\gamma-\frac{1}{2})(1-\lambda)+\cdots\right]$$

$$=(\gamma+1)(\frac{1}{\lambda}-1)\left[1-(\gamma+\frac{1}{2})(\frac{1}{\lambda}-1)+\cdots\right]$$

式中，λ为速度系数（即$\lambda=V/a_*$）。

3. 在小扰动理论中，$V_\infty+u'=u,v=v',w=w'$，试由方程

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=M_\infty^2(\gamma+1)\frac{u}{V_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+M_\infty^2(\gamma-1)\frac{u}{V_\infty}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+ \tag{*1}$$

$$M_\infty^2\frac{v}{V_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+M_\infty^2\frac{w}{V_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

出发，证明在二维小扰动跨声速位势流动时，（*1）式可简化为

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=M_\infty^2(\gamma+1)\frac{u}{V_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{*2}$$

说明所省略的各项量级以及保留下来各项的量级。

4. 试证明：在跨声速范围内密流比为：$\dfrac{\rho V}{\rho_* V_*}=1-\dfrac{\gamma+1}{2}(\lambda-1)^2+\cdots$ （*3）

5. 在普朗特–迈耶流动中，气流的折转角 δ 与当地气流 M 数间的关系为

$$\delta=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)}-\arctan\sqrt{M^2-1} \tag{*4}$$

试证明：在跨声速范围内，可近似为

$$\delta-\delta_*=\pm\frac{2}{3}\frac{1}{(\gamma+1)}(M^2-1)^{\frac{3}{2}}+\cdots \tag{*5}$$

或者

$$\delta-\delta_*=\pm\frac{2}{3}\sqrt{\gamma+1}(\lambda-1)^{\frac{3}{2}}+\cdots \tag{*6}$$

式中，δ 表示流速为 M 的气流与 x 轴之间的夹角；δ_* 表示声速流与 x 轴之间的夹角。

6. 薄翼的升力系数 C_L 可用上下翼面压力系数的积分来求得，即

$$C_L=\frac{1}{b}\int_0^b\left[C_{P-}-C_{P+}\right]_w \mathrm{d}x$$

这里 b 为弦长。试证明跨声速薄翼绕流的升力系数 C_L 的相似律为

$$C_L=\frac{\left(\bar{C}_m\right)^{2/3}}{\Gamma^{1/3}}L\left(B\lambda,\frac{B}{\left(\Gamma\bar{C}_m\right)^{1/3}},\lambda\tan\chi\right) \tag{*7}$$

式中，$\bar{C}_m$ 与 χ 分别为平均相对厚度与后掠角，λ 为展弦比。

7. 试从跨声速小扰动势方程式（7－2－32）出发，推导跨声速细长旋成体轴对称绕流的压力系数相似律。

8. 设有某一后掠薄机翼，其 $\lambda_1=2,\chi_1=56°,\bar{C}_m=0.08$，当气流比热比 $\gamma_1=1.4$，来流



$(M_\infty)_1 = 0.9$，攻角 $\alpha = 0°$ 时，升力系数 $(C_L^\alpha)_1 = 0.045$ 的情况下，试求该机翼在 $\gamma = 1.4$，$(M_\infty)_2 = 0.94$ 时，与其仿射相关机翼的 $\lambda_2, \chi_2, (\bar{C}_m)_2$ 以及 $(C_L^\alpha)_2$ 的值。

9. 设有两个仿射相关的矩形机翼，其中一个 $\lambda_1 = 4, (\bar{C}_m)_1 = 0.08$；在 $\gamma_1 = 1.4$，$(M_\infty)_1 = 0.9$ 的气流中 $(C_{DW})_1 = 0.45$（这里 C_{DW} 为波阻系数），试求另一个机翼在 $\gamma_2 = 1.2$，$(M_\infty)_2 = 0.9$ 的气流中，其 $\lambda_2, (\bar{C}_m)_2, (C_{DW})_2$ 以及 $(C_L^\alpha)_2 / (C_L^\alpha)_1$ 的值。

10. 在轴对称收敛–扩张喷管内，假设气流为量热完全气体作无旋流动，其比热比 $\gamma = 1.2$，$R = 320\ \text{J/kg} \cdot \text{K}$，$P_0 = 70 \times 10^5\ \text{Pa}$，$T = 3\ 000\ \text{K}$，喉道半径 $r_t = 0.025\ \text{m}$，喉道型线为圆弧，其上游曲率半径 $\rho_t = 0.05\ \text{m}$（参阅图 7.4），试用 Sauer 方法计算：

（1）声速线的位置；（2）超声速区流动的起始线位置。

11. 对于题 10 所述的流动，在起始线上沿 y 轴方向等间距选取 6 个点时，试计算这 6 个点上的流动参数其中包括气流速度 V，马赫数 M，压强 P，密度 ρ 和温度 T 值。

12. 小扰动速度势方程在驻点附近是不适用的。在驻点邻近的区域，虽然 v' 与 w' 是小量，但 x 方向的扰动速度分量 u' 并不是小量，试证明 x 方向大扰动的扰动速度势方程为

$$\frac{1 - M_\infty^2 - \dfrac{\gamma+1}{V_\infty} M_\infty^2 \varphi_x - \dfrac{\gamma+1}{2V_\infty^2} M_\infty^2 \varphi_x^2}{1 - \dfrac{\gamma-1}{V_\infty} M_\infty^2 \varphi_x - \dfrac{\gamma-1}{2V_\infty^2} M_\infty^2 \varphi_x^2} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \tag{*8}$$

13. 在跨声速问题的早期研究中，Tricomi 方程是非常著名的方程。请绘制出压缩性函数 K 与 σ 间的关系曲线（即绘制图 7.6），并比较式（7–4–19）～式（7–4–21）所表达的近似在 $\sigma = 0$ 点处它们之间曲线斜率到底有多大差异？

14. 跨声速流函数方法是解决二维无粘有旋流动非常有效的方法。在流函数方法的使用中，对于纯亚声速或者纯超声速问题采用 $\Sigma - \Phi$ 法（即式（6–1–16））可以十分方便的得到与 ψ 相对应的密度值 ρ，试用 FORTRAN 语言或 C 语言编制出 Σ 与 Φ 之间变化曲线（即图 6.1）的源程序，并绘出该曲线。分析跨声速区域这条曲线的变化规律，可否对这条曲线提出你的近似？

15. 在我国跨声速二维定常位势流的求解中，文献[34]的作者们作出过贡献。试用 FORTRAN 语言或 C 语言，用现代差分方法编制小扰动位势方程式（7–6–33）求解的源程序（也可以采用本书介绍的 Murman-Cole 方法），并用所编的程序计算 NACA0012 翼型在 $M_\infty = 0.63$，攻角 $\alpha = 2°$ 工况时压强沿翼面的分布曲线。为便于校验计算，图 7.7 给出了几种数值方法所得的计算结果，其中小圆圈与小黑点为精确数值解，它可作为校核计算的标准。

16. TVD 是 20 世纪 80 年代提出的重要概念，Harten 给出了判断 TVD 性质的充分条件即式（7–7–31）。试由这个条件出发，证明：

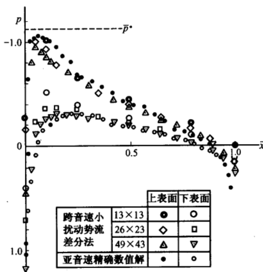


图 7.7　NACA0012 翼型绕流的压力分布曲线

如果方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{*9}$$

的差分格式为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda\left(\tilde{f}^n_{j+\frac{1}{2}}-\tilde{f}^n_{j-\frac{1}{2}}\right),\qquad \lambda=\Delta t/\Delta x \tag{*10}$$

式中

$$\begin{cases}\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}\equiv\dfrac{1}{2}\left[f_j+f_{j+1}-Q\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right]\\ a_{j+\frac{1}{2}}\equiv\begin{cases}\left(f_{j+1}-f_j\right)/\Delta_{j+\frac{1}{2}}u & (\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\neq 0)\\ a(u_j) & (\Delta_{j+\frac{1}{2}}u=0)\end{cases}\\ Q\text{ 是关于 }\lambda\text{ 和 }a_{j+\frac{1}{2}}\text{ 的函数}\end{cases}$$

则满足式（7-7-31）就等价于使下式成立



$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{2}\left[-a_{j+\frac{1}{2}}+Q\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]\geqslant 0\\
&\frac{\lambda}{2}\left[a_{j+\frac{1}{2}}+Q\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]\geqslant 0\\
&\lambda Q\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\leqslant 1
\end{aligned}\right\}\tag{*11}
$$

17. 对于方程（*9）来讲，可以将差分离散整理为式（*10）的形式。今采用下面三种格式：

① Lax-Wendroff 格式，这时数值通量 $\tilde{f}$ 为

$$
\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[f_j+f_{j+1}-\lambda\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)^2\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right],\quad Q\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\equiv\lambda\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{*12}
$$

② Lax-Friedrichs 格式，这时数值通量 $\tilde{f}$ 为

$$
\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[f_j+f_{j+1}-\frac{1}{\lambda}\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right],\quad Q\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\equiv\frac{1}{\lambda} \tag{*13}
$$

③ Courant-Isaacson-Rees 格式，这时数值通量 $\tilde{f}$ 为

$$
\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[f_j+f_{j+1}-\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right],\quad Q\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)=\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right| \tag{*14}
$$

试证明：L-W 格式不是 TVD 格式，L-F 与 C-I-R 格式是 TVD 格式。

18. ① Sod 模型[58]是国际上校核高分辨率格式以及求解黎曼问题时最常使用的模型算例之一。设在激波管的左侧初始分布为 $\rho_1=1$，$P_1=1$，$u_1=0$；右侧分布为 $\rho_2=0.125$，$\rho_2=0.1$，$u_2=0$；两种状态气体之间置一隔膜于 $x=0.5$ 处。今将隔膜突然去掉，试给出 $t=0.14$ 时刻 Euler 方程的精确解，并给出这一时刻在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 区间的 P,ρ,u 的分布曲线。

② 用 FORTRAN 语言或 C 语言编制采用 Harten 的 TVD 格式去逼近一维 Euler 方程的源程序，并且用该程序求解上述 Sod 问题。计算出流动参数在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 区间上的分布曲线，并与上面精确解作比较。

第 8 章　二维及三维超声速流动

§8.1　定常二维超声速无粘、无旋、等熵流动的特征线方法

定常、无粘、等熵、无旋流动的基本方程已由式（6－1－49）与式（6－5－2）给出。在超声速二维流动下，它们变为

$$(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2uv\frac{\partial u}{\partial y}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{8-1-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{8-1-2}$$

考虑到轴对称流动，则式（8－1－1）可修改为

$$(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2uv\frac{\partial u}{\partial y}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}-\delta\frac{a^2}{y}v=0 \tag{8-1-3}$$

其中对于平面流动，$\delta=0$；对于轴对称流动，$\delta=1$，并且这时 y 代表柱坐标中的 r；而声速 a 由式（6－1－48）定义，即

$$a^2=a_\infty^2+\frac{\gamma-1}{2}\left[V_\infty^2-(u^2+v^2)\right] \tag{8-1-4}$$

另外，补充两个全微分关系，即

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{8-1-5}$$

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{8-1-6}$$

于是式(8－1－3)、式(8－1－2)、式(8－1－5)与式(8－1－6)便构成了以 $\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$，$\partial v/\partial x$ 与 $\partial v/\partial y$ 为未知量的代数方程组，即



$$
\left.\begin{aligned}
&L_1 \equiv (u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2uv\frac{\partial u}{\partial y}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}-\delta\frac{a^2}{y}v=0\\
&L_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0\\
&(\mathrm{d}x)\frac{\partial u}{\partial x}+(\mathrm{d}y)\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{d}u\\
&(\mathrm{d}x)\frac{\partial v}{\partial x}+(\mathrm{d}y)\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{d}v
\end{aligned}\right\} \tag{8-1-7}
$$

显然，未知量 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ 与 $\partial v/\partial y$ 不确定的条件是式（8－1－7）的系数行列式 Δ 为零，由此可获得特征线方程。这里使 $\Delta=0$，即

$$
\Delta=\begin{vmatrix} u^2-a^2 & 2uv & 0 & v^2-a^2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{vmatrix}=0 \tag{8-1-8}
$$

将上式展开便得

$$
(u^2-a^2)(\mathrm{d}y)^2-2uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(v^2-a^2)(\mathrm{d}x)^2=0
$$

令 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\lambda$，则上式变为

$$
(u^2-a^2)\lambda^2-2uv\lambda+(v^2-a^2)=0
$$

由此解得

$$
\lambda_{\pm}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\pm}=\frac{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}{u^2-a^2} \qquad \text{（特征线）} \tag{8-1-9}
$$

下脚标“±”分别代表第 I 族和第 II 族特征线。考虑到式（8－1－7）是关于 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ 与 $\partial v/\partial y$ 为未知量的代数方程组，该方程组的解可由相应的分子与分母行列式得到，因此如果令方程组式（8－1－7）的某一个分子行列式等于零，便可得到沿特征线上变量 u 和 v 之间所应满足的相容性方程。这样做有时会遇到高阶行列式的运算，为避开这点这里采用下面的办法：考虑如下形式的线性组合

$$
L=\sigma_1L_1+\sigma_2L_2 \tag{8-1-10}
$$

其中，σ_1 和 σ_2 不同时为零，即有

$$
\sigma_1(u^2-a^2)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sigma_1(2uv)+\sigma_2}{\sigma_1(u^2-a^2)}\frac{\partial u}{\partial y}\right]-\sigma_2\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\sigma_1(v^2-a^2)}{-\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right]-\frac{\sigma_1\delta a^2}{y}v=0 \tag{8-1-11}
$$

要使方程式（8－1－11）沿某一曲线可简化为常微分方程，只要使式中第一个方括号与第二个方括号内的表达式分别写成 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，并且令 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\lambda$，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(2\sigma_1 uv+\sigma_2)}{\sigma_1(u^2-a^2)}\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{8-1-12}$$

这里 λ 就是特征线斜率，故有

$$\lambda=\frac{2\sigma_1 uv+\sigma_2}{\sigma_1(u^2-a^2)}\text{ 与 }\lambda=-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(v^2-a^2)\qquad（特征线）\tag{8-1-13}$$

沿着由式（8-1-13）所表示的特征线，方程式（8-1-11）简化为

$$\sigma_1(u^2-a^2)\mathrm{d}u-\sigma_2\mathrm{d}v-\sigma_1\delta\frac{a^2v}{y}\mathrm{d}x=0\qquad（相容关系）\tag{8-1-14}$$

换句话说，式（8-1-14）是在式（8-1-13）所给定的 λ 值下才能成立。下面来求 λ 值的具体表达式。将式（8-1-13）改写为下列形式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1[(u^2-a^2)\lambda-2uv]-\sigma_2=0\\ \sigma_1[(v^2-a^2)+\sigma_2\lambda]=0\end{aligned}\right\}\tag{8-1-15}$$

因为 σ_1 与 σ_2 不能同时为零，因此上述方程组有非零解。其有非零解的条件是系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix}[(u^2-a^2)\lambda-2uv] & -1\\ (v^2-a^2) & \lambda\end{vmatrix}=0$$

展开后得到

$$(u^2-a^2)\lambda^2-2uv\lambda+(v^2-a^2)=0\tag{8-1-16}$$

于是得到的特征线斜率就是式（8-1-9）。为了得到相容性方程式（8-1-14），可由式（8-1-15）中的第一个方程中求出 σ_2，即

$$\sigma_2=\sigma_1[(u^2-a^2)\lambda-2uv]$$

将上式代到式（8-1-14）便有

$$(u^2-a^2)\mathrm{d}u+[2uv-(u^2-a^2)\lambda]\mathrm{d}v-\left(\delta\frac{a^2v}{y}\right)\mathrm{d}x=0\tag{8-1-17}$$

因为式（8-1-17）是沿特征线才成立的，因此将式（8-1-9）所规定的 $\lambda_\pm$ 值代入到式（8-1-17）便得到沿第 I 族与沿第 II 族特征线上的相容性关系，即

$$(u^2-a^2)(\mathrm{d}u)_\pm+[2uv-(u^2-a^2)\lambda_\pm](\mathrm{d}v)_\pm-\left(\delta\frac{a^2v}{y}\right)(\mathrm{d}x)_\pm=0\tag{8-1-18}$$

下标“+”与“-”代表沿着第 I 族与第 II 族特征线时 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 和 $\mathrm{d}x$ 之间的关系式。不难证明，式（8-1-18）还有如下等价形式即



$$(\mathrm{d}u)_{\pm}+(\lambda_{\mp})(\mathrm{d}v)_{\pm}-\left[\delta\frac{a^2v}{y(u^2-a^2)}\right](\mathrm{d}x)_{\pm}=0 \tag{8-1-19}$$

为便于下面的研究，引进速度矢量$\boldsymbol{V}$的模V和速度矢量与x轴的夹角θ，并引进马赫角μ，于是

$$\left.\begin{aligned}&u=V\cos\theta,\ v=V\sin\theta,\ \theta=\arctan\left(\frac{v}{u}\right)\\&\mu=\arcsin\left(\frac{1}{M}\right),\quad \cot\mu=\sqrt{M^2-1},\quad a^2=V^2\sin^2\mu\end{aligned}\right\} \tag{8-1-20}$$

将上式代到式（8－1－9）得

$$\lambda_{\pm}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\pm}=\tan(\theta\pm\mu) \tag{8-1-21}$$

上式说明：特征线上各点的切线与该点流速方向的夹角为马赫角μ，如图 8.1 所示。另外，按照观察者的目光顺着流速方向规定：特征线c_+为左伸特征线（又称第 I 族特征线）；特征线c_-为右伸特征线（又称第 II 族特征线）。类似地，可将相容性关系式（8－1－19）用V与θ表示为

$$\frac{(\mathrm{d}V)_{\pm}}{V}\mp\tan\mu(\mathrm{d}\theta)_{\pm}-\delta\frac{\sin\theta}{\cos\mu}\frac{\sin^2\mu}{\cos(\theta\pm\mu)}\frac{(\mathrm{d}x)_{\pm}}{y}=0 \tag{8-1-22}$$

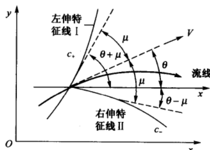


图 8.1　定常二维无旋超声速流动的特征线

对于特征线c_+，上式中的正负号均取上面的一个；对于特征线c_-，则取下面的一个。

对于平面二维、无粘、无旋定常流动，则式（8－1－22）还可以进一步化简为

$$\pm\mathrm{d}\theta=(\cot\mu)\frac{\mathrm{d}V}{V}=\left(\sqrt{M^2-1}\right)\frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{8-1-23}$$

所以，对于平面无旋流，相容关系式在速度平面上具有确定的关系，它不随物理平面上具体的流动情况而变化。另外，对于完全气体，则式（8－1－23）很易于积分。为此，利用式（1－8－9），可得

$$V^2=M^2a^2=\frac{M^2a_0^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$$

对上式取对数再微分得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{\mathrm{d}M}{M} \tag{8-1-24}$$

代入到式（8－1－23）并积分便得到了相容性关系式的积分形式，即

$$\pm\theta=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)}-\arctan\sqrt{M^2-1}+\text{const} \tag{8-1-25}$$

注意，上式在速度平面上表示一族外摆线，它的每条线对应着一个常数值。此外，对于平面流动，式（8－1－19）可简化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_{\pm}=\frac{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}{a^2-v^2} \tag{8-1-26}$$

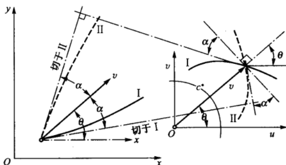


图 8.2　物理面与速度面上特征线的几何关系

于是由式（8－1－9）与式（8－1－26）容易证明[1, 2]

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{+}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_{-}=-1$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{-}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_{+}=-1 \tag{8-1-27}$$

上式表明：物理面上的某族特征线的斜率与速度面上相应的另一族特征线的斜率互为负的倒数，如图 8.2 所示，也就是说这两族特征线正交。

§8.2　定常二维超声速、无粘、等熵、有旋流动的特征线方法

二维超声速、定常、等熵、有旋流动的基本方程由式（6－1－26）、式（6－1－41）、式（6－1－43）组成，即

$$L_1\equiv\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho+\delta\frac{\rho v}{y}=0 \tag{8-2-1}$$

$$L_2\equiv\rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla u+\frac{\partial P}{\partial x}=0 \tag{8-2-2}$$

$$L_3\equiv\rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla v+\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{8-2-3}$$

$$L_4=\boldsymbol{V}\cdot\nabla P-a^2\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho=0 \tag{8-2-4}$$

式中，对平面流动，$\delta=0$；对轴对称流动，$\delta=1$。另外，还应注意到声速 a 也是 P 与 ρ 的函数，即 $a=a(P,\rho)$，因此上述四个方程含 u、v、P、ρ 这四个因变量，组成一个封闭的方



程组。为了推导这个方程组的特征线与相容关系，引进线性组合 L，注意这里 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 和 σ_4 不可同时为零，L 的表达式为

$$L\equiv\sigma_1L_1+\sigma_2L_2+\sigma_3L_3+\sigma_4L_4 \tag{8-2-5}$$

并按 u,v,P 和 ρ 的导数进行分项整理，得到

$$\begin{aligned}&(\sigma_1\rho+\sigma_2\rho u)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sigma_2 v}{(\sigma_1+\sigma_2 u)}\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\sigma_3\rho u\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{(\sigma_1+\sigma_3 v)}{\sigma_3 u}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\\&(\sigma_2+\sigma_4 u)\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{(\sigma_3+\sigma_4 v)}{(\sigma_2+\sigma_4 u)}\frac{\partial P}{\partial y}\right]+\left(\sigma_1 u-\sigma_4 a^2 u\right)\left[\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\left(\sigma_1 v-\sigma_4 a^2 v\right)}{\left(\sigma_1 u-\sigma_4 a^2 u\right)}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right]+\\&\delta\frac{\sigma_1\rho v}{y}=0\end{aligned} \tag{8-2-6}$$

令 q 代表 u、v、P 与 ρ 这四个因变量中的任意一个，并假定 q 是 (x,y) 的连续函数，于是有

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial q}{\partial x}+\lambda\frac{\partial q}{\partial y}$$

其中 $\lambda=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 表示特征线的斜率。令

$$\lambda=\frac{\sigma_2 v}{\sigma_1+\sigma_2 u}=\frac{\sigma_1+\sigma_3 v}{\sigma_3 u}=\frac{\sigma_3+\sigma_4 v}{\sigma_2+\sigma_4 u}=\frac{\sigma_1 v-\sigma_4 a^2 v}{\sigma_1 u-\sigma_4 a^2 u} \tag{8-2-7}$$

于是式（8－2－6）改写成全微分形式为

$$\rho(\sigma_1+\sigma_2 u)\mathrm{d}u+\sigma_3\rho u\mathrm{d}v+(\sigma_2+\sigma_4 u)\mathrm{d}P+u(\sigma_1-\sigma_4 a^2)\mathrm{d}\rho+\delta\frac{\sigma_1\rho}{y}v\mathrm{d}x=0 \tag{8-2-8}$$

注意上式仅在给定的 λ 特征线上成立。将式（8－2－7）写成

$$\begin{cases}\lambda\sigma_1+(u\lambda-v)\sigma_2=0\\-\sigma_1+(u\lambda-v)\sigma_3=0\\\lambda\sigma_2-\sigma_3+(u\lambda-v)\sigma_4=0\\(u\lambda-v)\sigma_1-a^2(u\lambda-v)\sigma_4=0\end{cases} \tag{8-2-9}$$

因为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 与 σ_4 不同时为零，因此上式有非平凡解，也就是说式（8－2－9）的系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix}\lambda & B & 0 & 0\\-1 & 0 & B & 0\\0 & \lambda & -1 & B\\B & 0 & 0 & -a^2B\end{vmatrix}=0 \tag{8-2-10}$$

式中，$B=u\lambda-v$。将式（8－2－10）展开，可得

$$B^2[B^2-a^2(1+\lambda^2)]=0 \tag{8-2-11}$$

显然，这个代数方程有四个根。令式中第一个因子为零，得 $B=0$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda_0=\frac{v}{u} \qquad （特征线 C_0） \tag{8-2-12}$$

这是流线方程。再令式（8-2-11）中第二个因子为零，并将 $B=u\lambda-v$ 代入，得到

$$(u^2-a^2)\lambda^2-2uv\lambda+(v^2-a^2)=0 \tag{8-2-13}$$

这个式子与前面无旋流动问题中所得到的式（8-1-16）相同，因此有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda_{\pm}=\tan(\theta\pm\mu) \qquad （特征线 C_{\pm}） \tag{8-2-14}$$

因此在二维有旋流动中有三族特征线即 C_0, C_+ 与 C_-。下面推导沿着特征线的相容关系：

1. 沿流线

将 $\lambda=v/u$ 代到式（8-2-9）中，可解出：$\sigma_1=0,\sigma_3=\lambda\sigma_2,\sigma_2$ 与 σ_4 可取任意值；将上述结果代入到式（8-2-8），并注意按 σ_2 和 σ_4 合并同类项，整理为

$$\sigma_2(\rho u\mathrm{d}u+\rho v\mathrm{d}v+\mathrm{d}P)+\sigma_4(u\mathrm{d}P-a^2u\mathrm{d}\rho)=0 \tag{8-2-15}$$

因为 σ_2 与 σ_4 值可任意取值，所以上式两个括号内的项必须同时为零，即

$$\rho u\mathrm{d}u+\rho v\mathrm{d}v+\mathrm{d}P=0 \qquad （沿 c_0 线） \tag{8-2-16}$$

$$\mathrm{d}P-a^2\mathrm{d}\rho=0 \qquad （沿 c_0 线） \tag{8-2-17}$$

注意到 $V\mathrm{d}V=u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v$，于是式（8-1-43）可变为

$$\rho V\mathrm{d}V+\mathrm{d}P=0 \qquad （沿 c_0 线） \tag{8-2-18}$$

这就是沿流线的伯努利方程。因此式（8-2-18）与式（8-2-17）给出了沿着特征线 c_0 的两个相容关系式，这里 c_0 线就是流线。

2. 沿特征线 $C_{\pm}$

因为式（8-2-11）的第二个因子为零，即

$$\frac{1+\lambda^2}{B}=\frac{B}{a^2}$$

于是将式（8-2-9）写为

$$\begin{cases}\lambda\sigma_1=-B\sigma_2\\ \sigma_1=B\sigma_3\\ B\sigma_4=\sigma_3-\lambda\sigma_2\\ a^2B\sigma_4=B\sigma_1\end{cases}$$

解得 $\sigma_1=-\dfrac{B}{\lambda}\sigma_2$，$\sigma_3=\dfrac{\sigma_1}{B}=-\dfrac{1}{\lambda}\sigma_2$，$\sigma_4=\dfrac{1}{a^2}\sigma_1=-\dfrac{B}{a^2\lambda}\sigma_2$

把这些结果代入到式（8-2-8）后得到



$$\rho v \mathrm{d}u-\rho u \mathrm{d}v+[\lambda-u(u\lambda-v)/a^2]\mathrm{d}P-\delta\frac{\rho v}{y}(u\lambda-v)\mathrm{d}x=0 \qquad (8-2-19)$$

由于 λ 可取为 λ_+ 与 λ_-，因此式（8－2－19）中的 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}P$ 与 $\mathrm{d}x$ 也相应的有“+”与“-”，也就是说有如下表达式[3]

$$\rho v(\mathrm{d}u)_\pm-\rho u(\mathrm{d}v)_\pm+[(\lambda)_\pm-u(u\lambda_\pm-v)/a^2](\mathrm{d}P)_\pm-\delta\frac{\rho v}{y}(u\lambda_\pm-v)(\mathrm{d}x)_\pm=0 \quad (8-2-20)$$

也就是说，式中下标 ± 分别表示沿着左行特征线 c_+ 与沿着右行特征线 c_-；利用式（8－1－20）与式（8－2－14），则式（8－2－20）又可用 V,θ,μ 和 M 表示为

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{\rho V^2}\mathrm{d}P+\mathrm{d}\theta+\delta\frac{\sin\theta}{M\cos(\theta+\mu)}\frac{\mathrm{d}x}{y}=0 \qquad (\text{沿 } C_+ \text{ 线}) \qquad (8-2-21\mathrm{a})$$

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{\rho V^2}\mathrm{d}P-\mathrm{d}\theta+\delta\frac{\sin\theta}{M\cos(\theta-\mu)}\frac{\mathrm{d}x}{y}=0 \qquad (\text{沿 } C_- \text{ 线}) \qquad (8-2-21\mathrm{b})$$

综上所述，对于二维超声速无粘有旋定常流动，有三族特征线（即 c_0,c_+,c_-）和沿特征线有四个相容关系（即式（8－2－18）、式（8－2－17）、式（8－2－21a）与式（8－2－21b））。

§8.3* 无粘、定常三维等熵超声速流动中的特征面及相容性关系

对于二维问题，在定常超声速均匀流动中，一点引起的扰动是沿着两条直线（又称马赫线）传播的，扰动所影响的区域是以两条马赫线所夹的角形区域，在非均匀流动中，扰动沿弯曲的所谓马赫波包线传播，影响区是两条马赫波包线所夹的区域，图 8.3 所示。图 8.4 给出了自 Q 点引出的两条马赫线所夹的阴影区域，该区域称为点 Q 的影响区。在该图上自点 P 引出两条特征线，它们与初始曲线交于 A 与 B 点，则起始线段 AQB 线为 P 点的依赖域。同理，对于三维问题，在定常超声速均匀流动中，一点引起的扰动是沿正圆锥面传播，扰动所影响的区域是以该点为顶点的前马赫锥（这里约定：顺流方向的称为前马赫锥，逆流方向的称为后马赫锥）。在非均匀流动中，一点引起的扰动传播是马赫劈锥（Mach conoid），它是沿流线由小扰动所产生的所有球形声波的包络面，而这些球心的连线就是通过扰动点的一条流线，如图 8.5 所示。正如定常二维超声速流动中存在特征线（又称马赫线）与流线一样，在定常三维超声速流动中，存在着空间中的特征面（又称马赫劈锥）与流线。在三维特征线方法中，通常不是用整个马赫劈锥上的相容关系而是只用沿着其中某些特征曲线上的相容关系。为此，文献[4～6]等提出了双特征曲线的概念。设空间曲线 AB 是通过某扰动点 P 的一条非流线，如图 8.5 所示，曲线 AB 上的每一点都有一条流线通过，因此这些流线的组合就是通过曲线 AB 的一张流面。而曲线 AB 上的每一点又都存在着一个马赫劈锥，这些劈锥的包络面就是通过曲线 AB 的两个曲面，我们定义为波面，如图 8.5 所示。这两个波面与顶点

在 P 的马赫劈锥相切得到两条曲线，该曲线便称为双特征线。显然，每选定一条空间非流线的曲线，就有相应确定的一对双特征线。因此沿着双特征线这样的空间特征线（仅在二维流动时，特征线才为平面曲线）上的相容关系就不再是常微方程而是偏微分方程了。

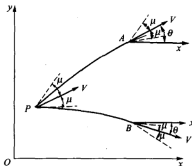


图 8.3　非均匀流场中马赫波的包线

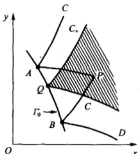


图 8.4　P 点的依赖域与 Q 点的影响区

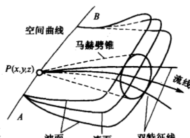


图 8.5　定常三维超声速流动中的流面、波面、马赫劈锥与双特征线

8.3.1　特征曲面及一般相容性方程

定常三维、无粘等熵流动的基本方程组由式（6-1-26）、式（6-1-41）、式（6-1-43）组成，即

$$L_1 \equiv \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{8-3-1}$$

$$L_2 \boldsymbol{i} + L_3 \boldsymbol{j} + L_4 \boldsymbol{k} \equiv \rho \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} + \nabla P = 0 \tag{8-3-2}$$

$$L_5 \equiv \boldsymbol{V} \cdot \nabla P - a^2 \boldsymbol{V} \cdot \nabla \rho = 0 \tag{8-3-3}$$

式中，声速 a 是 P 与 ρ 的函数，即 $a = a(P, \rho)$。

显然上述方程组是关于 u、v、w、P 和 ρ 的一阶齐次偏微分方程组，这里速度矢量 $\boldsymbol{V} \equiv u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$。引进线性组合算子 L，使其为

$$L = \sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2 + \sigma_3 L_3 + \sigma_4 L_4 + \sigma_5 L_5 \tag{8-3-4}$$

式中，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 和 σ_5 不同时为零。

于是考虑到式（8-3-1）、式（8-3-2）与式（8-3-3），便有

$$\boldsymbol{W}_1 \cdot (\nabla u) + \boldsymbol{W}_2 \cdot (\nabla v) + \boldsymbol{W}_3 \cdot (\nabla w) + \boldsymbol{W}_4 \cdot (\nabla P) + \boldsymbol{W}_5 \cdot (\nabla \rho) = 0 \tag{8-3-5}$$

这就是一般相容性方程。式中，矢量 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \boldsymbol{W}_3, \boldsymbol{W}_4$ 与 $\boldsymbol{W}_5$ 的定义为



$$\begin{cases} \boldsymbol{W}_1 = \rho(u\sigma_1 + \sigma_4)\boldsymbol{i} + \rho\sigma_1 v\boldsymbol{j} + \rho\sigma_1 w\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{W}_2 = \rho\sigma_2 u\boldsymbol{i} + \rho(v\sigma_2 + \sigma_4)\boldsymbol{j} + \rho\sigma_2 w\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{W}_3 = \rho\sigma_3 u\boldsymbol{i} + \rho\sigma_3 v\boldsymbol{j} + \rho(w\sigma_3 + \sigma_4)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{W}_4 = (\sigma_1 + u\sigma_5)\boldsymbol{i} + (\sigma_2 + v\sigma_5)\boldsymbol{j} + (\sigma_3 + w\sigma_5)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{W}_5 = u(\sigma_4 - a^2\sigma_5)\boldsymbol{i} + v(\sigma_4 - a^2\sigma_5)\boldsymbol{j} + w(\sigma_4 - a^2\sigma_5)\boldsymbol{k} \end{cases} \tag{8-3-6}$$

因此式（8－3－5）变为

$$\mathrm{d}_{W1}u + \mathrm{d}_{W2}v + \mathrm{d}_{W3}w + \mathrm{d}_{W4}P + \mathrm{d}_{W5}\rho = 0 \tag{8-3-5*}$$

这里 $\mathrm{d}_{W1}u$ 代表 u 在矢量 $\boldsymbol{W}_1$ 方向上的导数，$\mathrm{d}_{W2}v$ 等等的含义与前面的定义类同。方程式（8－3－5）*就是三维超声速无粘等熵定常流动的相容性方程。现在提出这样的一个问题，即能否选择适当 $\sigma_i(i=1\sim5)$ 使矢量 $\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_5$ 都在同一个曲面上？这样的 $\sigma_i(i=1\sim5)$ 存在时，包含矢量 $\boldsymbol{W}_j(j=1\sim5)$ 的曲面便称为特征曲面[4]。这个曲面的法线 $\boldsymbol{N}$ 称作特征法线。令 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{i}N_1+\boldsymbol{j}N_2+\boldsymbol{k}N_3$（这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为直角笛卡儿坐标系 (x,y,z) 的单位矢量）。因此有

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{W}_j = 0 \qquad (j=1\sim5) \tag{8-3-7}$$

注意到式（8－3－5a），则式（8－3－7）可改写为

$$\begin{bmatrix} \rho U & 0 & 0 & \rho N_1 & 0 \\ 0 & \rho U & 0 & \rho N_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho U & \rho N_3 & 0 \\ N_1 & N_2 & N_3 & 0 & U \\ 0 & 0 & 0 & U & -a^2U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = 0 \tag{8-3-8}$$

式中，U 定义为

$$U = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N} \tag{8-3-9}$$

由于 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4 与 σ_5 不能同时为零，也就是说方程式（8－3－8）有非零解，故式（8－3－8）的系数行列式必须为零。令这个系数行列式为零便得到

$$U^3\left(U^2 - a^2|\boldsymbol{N}|^2\right) = 0 \tag{8-3-10}$$

其中

$$|\boldsymbol{N}| = (N_1)^2 + (N_2)^2 + (N_3)^2 \tag{8-3-11}$$

式（8－3－10）就是特征曲面所满足的方程。在下面的章节中我们将分别讨论流特征与波特征两种情况。

8.3.2 流特征面及沿流面的相容关系

令式（8-3-10）的第一个因子为零，即

$$U^3=0 \quad \text{或者} \quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}=0 \tag{8-3-12}$$

得到流特征。将上式代到方程式（8-3-8）得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho N_3 & 0 \\ N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = 0 \tag{8-3-13}$$

很容易证明：式（8-3-13）系数矩阵的秩[7, 8]为 2，因此在由式（8-3-13）所定义的流特征面（即流面）上，$\sigma_i(i=1\sim5)$ 中仅有 3 个独立的解。由式（8-3-13），显然，$\sigma_4=0$，σ_5 为任意值时，σ_1,σ_2 和 σ_3 必须满足

$$\sigma_1 N_1+\sigma_2 N_2+\sigma_3 N_3=0 \tag{8-3-14}$$

满足式（8-3-14）三个可能的解为

$$\sigma_1=u,\ \ \sigma_2=v,\ \ \sigma_3=w,\ \ \sigma_4=0,\ \sigma_5=0 \tag{8-3-15}$$

$$\sigma_1=0,\ \ \sigma_2=0,\ \ \sigma_3=0,\ \ \sigma_4=0,\ \sigma_5\ \text{为任意} \tag{8-3-16}$$

$$\sigma_1=S_1,\ \ \sigma_2=S_2,\ \ \sigma_3=S_3,\ \ \sigma_4=0,\ \sigma_5=0 \tag{8-3-17}$$

这里 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{i}S_1+\boldsymbol{j}S_2+\boldsymbol{k}S_3$ 是流面上与速度矢量不平行的任意一个矢量。将上面三个可能的解分别代到式（8-3-5）便得到在流面上成立的三个相容性方程，即

$$\rho\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V})+\boldsymbol{V}\cdot\nabla P=0\ \text{（沿流面）} \tag{8-3-18}$$

$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla P-a^2\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho=0\ \text{（沿流面）} \tag{8-3-19}$$

$$\rho\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V})+\boldsymbol{S}\cdot\nabla P=0\boldsymbol{V}\ \text{（沿流面）} \tag{8-3-20}$$

其中

$$\nabla\boldsymbol{V}=(\nabla u)\boldsymbol{i}+(\nabla v)\boldsymbol{j}+(\nabla w)\boldsymbol{k} \tag{8-3-21}$$

因为在三维空间中沿任意一个面仅有两个独立的微分方向，因此式（8-3-18）～式（8-3-20）可以选用沿流面两个独立方向的偏导数予以表达。另外，方向式（8-3-18）与式（8-3-19）还可以用沿流线的全导数来表达。令 $f(x,y,z)$ 为任意一个函数，于是

$$\mathrm{d}f=(\nabla f)\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}t \tag{8-3-22}$$

$$\boldsymbol{V}\mathrm{d}t=\boldsymbol{i}\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\mathrm{d}y+\boldsymbol{k}\mathrm{d}z \tag{8-3-23}$$

因此式（8-3-22）还可写为



$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{V}\cdot(\nabla f)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V}\cdot(\nabla f) = u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (8-3-24)^*$$

为了强调式（8－3－24）*是沿流线方向的导数，现将 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 记作 $\partial f/\partial c$，即

$$\partial f/\partial c \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V}\cdot(\nabla f) \qquad (8-3-24)$$

借助于式（8－3－24），则式（8－3－18）与式（8－3－19）可改写为

$$\rho\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{或者} \quad \rho\boldsymbol{V}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial c} + \frac{\partial P}{\partial c} = 0 \text{（沿流线）} \qquad (8-3-25)$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} - a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{或者} \quad \frac{\partial P}{\partial c} - a^2\frac{\partial \rho}{\partial c} = 0 \text{（沿流线）} \qquad (8-3-26)$$

式中，$\partial/\partial c$ 表示沿流线方向的导数，其具体表达式已由式（8－3－24）给出。

值得注意的是，式（8－3－20）不能写成沿流线的全导数，因为 $\boldsymbol{S}$ 是流面上不平行于速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 的一个向量。

8.3.3　波特征面及沿双特征线的相容关系

令式（8－3－10）的第二个因子为零，即

$$U^2 - a^2|\boldsymbol{N}|^2 = 0 \qquad (8-3-27)$$

或者

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N} = \pm a|\boldsymbol{N}| \qquad (8-3-28)$$

引进单位法矢量 $\boldsymbol{n}$，其定义为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|} = \boldsymbol{i}n_1 + \boldsymbol{j}n_2 + \boldsymbol{k}n_3 \qquad (8-3-29)$$

于是式（8－3－28）变为

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} = \pm a \qquad (8-3-30)$$

这里 a 为声速。式（8－3－30）表明：垂直于特征面的流体速度分量的大小等于当地声速 a，因此这时的特征曲面为波特征面。在每一个空间点上有无限多个波面，这无限多个波面的包络便形成了马赫劈锥（又称作 Monge 锥）。可以证明[9, 3]：对于现在的情况，马赫劈锥的方程为

$$\begin{aligned}&[u^2-(V^2-a^2)](\mathrm{d}x)^2+[v^2-(V^2-a^2)](\mathrm{d}y)^2+[w^2-(V^2-a^2)](\mathrm{d}z)^2+\\&2uv(\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y)+2uw(\mathrm{d}x)(\mathrm{d}z)+2vw(\mathrm{d}y)(\mathrm{d}z)=0\end{aligned} \qquad (8-3-31)$$

另外，式（8－3－30）代到式（8－3－8）后得

$$\begin{bmatrix} \rho a & 0 & 0 & \rho n_1 & 0 \\ 0 & \rho a & 0 & \rho n_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho a & \rho n_3 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & -a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = 0 \tag{8-3-32}$$

可以证明：式（8-3-32）系数矩阵的秩为 4，因此σ_1、σ_2、σ_3、σ_4与σ_5中仅有一个独立解；令$\sigma_5=-1$，可得到如下的解

$$\sigma_1 = an_1,\quad \sigma_2 = an_2,\quad \sigma_3 = an_3,\quad \sigma_4 = -a^2,\quad \sigma_5 = -1 \tag{8-3-33}$$

将上式代入到一般相容性方程式（8-3-5）便可得到波特征面上的相容性方程，即

$$\rho a\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}) + a\boldsymbol{n}\cdot\nabla P - \boldsymbol{V}\cdot\nabla P - \rho a^2(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) = 0 \tag{8-3-34}$$

同样地，在波特征面上式（8-3-34）可以用沿两个独立方向的偏导数来表达。令$f(x,y,z)$为任意一个函数，如果选定双特征线方向作为考察流体微团移动的方向，于是$\mathrm{d}f=(\nabla f)\cdot(\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{S}})$；这里$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{S}}$为沿双特征线方向上移动量，如图 8.6 所示，于是

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{V} - a\boldsymbol{n})\mathrm{d}t = \boldsymbol{I}\mathrm{d}t \tag{8-3-35}$$

$$\boldsymbol{I} \equiv (\boldsymbol{V} - a\boldsymbol{n}) \equiv \boldsymbol{i}(u - an_1) + \boldsymbol{j}(v - an_2) + \boldsymbol{k}(w - an_3) \tag{8-3-36}$$

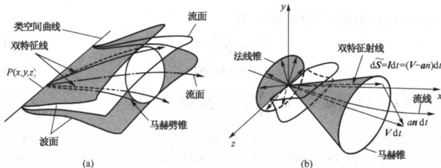


图 8.6　沿双特征线方向上的 $\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{S}}$

因此有

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{I}\cdot(\nabla f)\mathrm{d}t \equiv (\boldsymbol{V} - a\boldsymbol{n})\cdot(\nabla f)\mathrm{d}t \tag{8-3-37}$$

为了区别沿流线方向上的导数$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$，即式（8-3-24），因此将沿双特征线方向的导数$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$特记为$\mathrm{d}^*f/\mathrm{d}t$或者$\partial f/\partial c^*$，即

$$\frac{\mathrm{d}^*f}{\mathrm{d}t} = \partial f/\partial c^* = (\boldsymbol{V} - a\boldsymbol{n})\cdot(\nabla f) \equiv \boldsymbol{I}\cdot(\nabla f) \tag{8-3-38}$$

因此借助于式（8-3-38），则式（8-3-34）可改写为



$$
\begin{aligned}
&\rho an\cdot\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial c^*}-\frac{\partial P}{\partial c^*}+\rho a^2\left[(n_1)^2\frac{\partial u}{\partial x}+(n_2)^2\frac{\partial v}{\partial y}+(n_3)^2\frac{\partial w}{\partial z}+\right.\\
&\left.n_1n_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+n_1n_3\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+n_2n_3\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]=0
\end{aligned}
\tag{8-3-39}
$$

上式便是沿双特征线的相容方程。式中 $\partial/\partial c^*$ 表示沿特征线的方向导数，其具体表达式由式（8－3－38）给出。另外，还需指出的是：在定常超声速流场的任一点上，它有无限多个特征面，而独立的相容性方程的数目又不能超过气动基本方程组中方程的个数（即 5 个）。因此这就有必要去确定相容性方程可能组合中那些是独立的关系式。文献[5]给出了定常三维、无粘、等熵超声速流动时独立相容性方程组的一种给法，它由下面的两小点组成：① 沿流线给两个独立的相容方程即式（8－3－25）与式（8－3－26）；② 取任意的三个波特征面，相应地就有三条双特征线。这样，沿每一个波特征面，只给一个独立的相容性方程（即式（8－3－39））；因此三个波特征面，便提供出三个独立的相容性方程，再加上沿流线有两个独立的相容性关系，所以 5 个因变量，5 个独立的相容关系，故上述问题封闭。此外，沿流线的特征线方程当然为

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=w
\tag{8-3-40}
$$

而式（8－3－31）决定了马赫劈锥的方程。

§ 8.4* 多个自变量一阶方程组的特征分析

8.4.1 两个自变量一阶方程组的特征方向

今考虑 2 个自变量 (x,y)，n 个因变量 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 的 n 个一阶方程所构成的方程组

$$
\begin{cases}
L_1\equiv a_{1j}\dfrac{\partial w_j}{\partial x}+b_{1j}\dfrac{\partial w_j}{\partial y}+C_1=0\\
\quad\vdots\\
L_n\equiv a_{nj}\dfrac{\partial w_j}{\partial x}+b_{nj}\dfrac{\partial w_j}{\partial y}+C_n=0
\end{cases}
\tag{8-4-1}
$$

这里采用了爱因斯坦求和规约，注意对 j 作和，$j=1\sim n$。引进线性组合 $\lambda_k L_k$，即

$$
\lambda_k L_k=\lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2+\cdots\lambda_n L_n=0
$$

或者写为

$$
\lambda_k L_k=\lambda_k a_{kj}\frac{\partial w_j}{\partial x}+\lambda_k b_{kj}\frac{\partial w_j}{\partial y}+\lambda_k C_k=0
\tag{8-4-2}
$$

注意这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不可同时为零。将上式按 j 展开便为

$$\lambda_k L_k = \left(\lambda_k a_{k1}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \lambda_k b_{k1}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) + \left(\lambda_k a_{k2}\frac{\partial w_2}{\partial x} + \lambda_k b_{k2}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) + \cdots + \left(\lambda_k a_{kn}\frac{\partial w_n}{\partial x} + \lambda_k b_{kn}\frac{\partial w_n}{\partial y}\right) + \lambda_k C_k = 0 \tag{8-4-3}$$

为了使上式每一个括号内的导数都在相同的方向上，因此要求下式成立，即

$$\frac{\lambda_k b_{k1}}{\lambda_k a_{k1}} = \frac{\lambda_k b_{k2}}{\lambda_k a_{k2}} = \cdots = \frac{\lambda_k b_{kn}}{\lambda_k a_{kn}} = \xi \tag{8-4-4}$$

也就是说应该有 n 个必须满足的方程，即

$$\begin{cases} \lambda_k b_{k1} = \lambda_k a_{k1}\xi \\ \lambda_k b_{k2} = \lambda_k a_{k2}\xi \\ \vdots \\ \lambda_k b_{kn} = \lambda_k a_{kn}\xi \end{cases}$$

或者

$$(a_{kj}\xi - b_{kj})\lambda_k = 0 \quad (j = 1 \sim n, k = 1 \sim n) \tag{8-4-5}$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 不同时为零，也就是说方程组式（8－4－5）有非零解，换句话说就是要求方程组式（8－4－5）的系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}\xi - b_{11} & a_{21}\xi - b_{21} & \cdots & a_{n1}\xi - b_{n1} \\ a_{12}\xi - b_{12} & a_{22}\xi - b_{22} & \cdots & a_{n2}\xi - b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}\xi - b_{1n} & a_{2n}\xi - b_{2n} & \cdots & a_{nn}\xi - b_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{8-4-6}$$

令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的元素分别为 a_{kj} 与 b_{kj} 时，则上式可写为

$$\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\xi - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) = 0 \tag{8-4-7}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的转置，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8-4-8}$$

式（8－4－7）是关于 ξ 的 n 次多项式，于是可得 n 个根，即 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$；因此 n 个特征方向为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_l = \xi_l \qquad (l = 1 \sim n) \tag{8-4-9}$$

确定了特征方向之后，借助于式（8－4－2）便可以很方便的得到沿特征线的相容性关系。



8.4.2　n个自变量一阶方程组的特征分析

令$x_1,x_2,\cdots x_n$为n个自变量；$w_1,w_2,\cdots,w_m$为m个因变量，令$\boldsymbol{a}_{jk}$为n维行矢量，算子∇为n维空间的Hamilton算子[10]，在n维欧氏空间中∇w_k与$\boldsymbol{a}_{jk}$分别定义为

$$\nabla w_k=\left[\frac{\partial w_k}{\partial x_1},\frac{\partial w_k}{\partial x_2},\cdots\frac{\partial w_k}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}} \tag{8-4-10}$$

$$\boldsymbol{a}_{jk}=[(a_{jk,1}),(a_{jk,2}),\cdots,(a_{jk,n})] \tag{8-4-11}$$

今考虑一阶拟线性偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}L_1&=\boldsymbol{a}_{11}\cdot\nabla w_1+\boldsymbol{a}_{12}\cdot\nabla w_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{1m}\cdot\nabla w_m=b_1\\L_2&=\boldsymbol{a}_{21}\cdot\nabla w_1+\boldsymbol{a}_{22}\cdot\nabla w_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{2m}\cdot\nabla w_m=b_2\\&\vdots\\L_m&=\boldsymbol{a}_{m1}\cdot\nabla w_1+\boldsymbol{a}_{m2}\cdot\nabla w_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{mm}\cdot\nabla w_m=b_m\end{aligned}\right\} \tag{8-4-12}$$

引进线性组合算子

$$\sum_{l=1}^{m}(\alpha_l L_l)=\sum_{k=1}^{m}\left(\boldsymbol{a}_k^{*}\cdot\nabla w_k\right)=\sum_{l=1}^{m}(\alpha_l b_l) \tag{8-4-13}$$

这里$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$不同时为零；$n$维行矢量$\boldsymbol{a}_k^{*}$的定义为

$$\boldsymbol{a}_k^{*}\equiv\sum_{l=1}^{m}(\alpha_l\boldsymbol{a}_{lk}) \tag{8-4-14}$$

采取与§8.3节相类似的方法即适当选择$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的值，使下面一组式子成立，即

$$\boldsymbol{a}_1^{*}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0,\quad \boldsymbol{a}_2^{*}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0,\cdots,\boldsymbol{a}_m^{*}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0 \tag{8-4-15}$$

这里$\boldsymbol{\lambda}$为n维列矢量，它是广义特征曲面的法矢量。换句话说，适当选择$\alpha_i(i=1\sim m)$，使这m个矢量$\boldsymbol{a}_i^{*}(i=1,m)$位于同一个超平面上，那么该超平面就是广义特征曲面。将式（8－4－14）代入到式（8－4－15）便得到

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{a}_{11}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{21}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{m1}\cdot\boldsymbol{\lambda})\\(\boldsymbol{a}_{12}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{22}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{m2}\cdot\boldsymbol{\lambda})\\\vdots & & & \vdots\\(\boldsymbol{a}_{1m}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{2m}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{mm}\cdot\boldsymbol{\lambda})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}=0 \tag{8-4-16}$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$不同时为零，换句话说式（8－4－16）的系数矩阵应该为零，即

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_{11}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{21}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{m1}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \\ (\boldsymbol{a}_{12}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{22}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{m2}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_{1m}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{2m}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & (\boldsymbol{a}_{mm}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = 0 \tag{8-4-17}$$

由此可得到流特征与波特性。下面，我们结合一道例题较详细的说明流特征与波特征的有关内容。

例 8.1 如果三维定常超声速气体运动的基本方程组为

$$\boldsymbol{A}_1\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{A}_2\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{A}_3\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}=0 \tag{8-4-18}$$

试对这组方程作特征分析。式中 $\boldsymbol{U}=[\rho \quad u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}}$； $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 均为 4×4 的矩阵，其表达式分别为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ a^2/\rho & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ a^2/\rho & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \tag{8-4-19a}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ a^2/\rho & 0 & 0 & w \end{bmatrix} \tag{8-4-19b}$$

解 这里 $n=3, m=4$。 $[w_1,w_2,w_3,w_4]=[\rho,u,v,w]$； $[x_1,x_2,x_3]=[x,y,z]$； 令矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{A}_3$ 的元素分别记作 $a_{jk,1}$， $a_{jk,2}$ 与 $a_{jk,3}$； 例如

$$\boldsymbol{A}_\mu=\begin{bmatrix} a_{11,\mu} & a_{12,\mu} & a_{13,\mu} & a_{14,\mu} \\ a_{21,\mu} & a_{22,\mu} & a_{23,\mu} & a_{24,\mu} \\ a_{31,\mu} & a_{32,\mu} & a_{33,\mu} & a_{34,\mu} \\ a_{41,\mu} & a_{42,\mu} & a_{43,\mu} & a_{44,\mu} \end{bmatrix} \quad (\mu=1\sim 3) \tag{8-4-20}$$

$$\boldsymbol{a}_{jk}=[(a_{jk,1}) \quad (a_{jk,2}) \quad (a_{jk,3})] \tag{8-4-21}$$

$$\nabla w_k=\left[\frac{\partial w_k}{\partial x} \quad \frac{\partial w_k}{\partial y} \quad \frac{\partial w_k}{\partial z}\right]^{\mathrm{T}} \tag{8-4-22}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^{\mathrm{T}} \tag{8-4-23}$$

于是式（8-4-17）此时变为



$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_{11}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{21}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{31}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{41}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \\ (\boldsymbol{a}_{12}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{22}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{32}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{42}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \\ (\boldsymbol{a}_{13}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{23}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{33}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{43}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \\ (\boldsymbol{a}_{14}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{24}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{34}\cdot\boldsymbol{\lambda}) & (\boldsymbol{a}_{44}\cdot\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = 0 \tag{8-4-24}$$

将式（8－4－19a）与式（8－4－19b）代入到式（8－4－24）中，便得到

$$\begin{vmatrix} b & \rho\lambda_1 & \rho\lambda_2 & \rho\lambda_3 \\ a^2\lambda_1/\rho & b & 0 & 0 \\ a^2\lambda_2/\rho & 0 & b & 0 \\ a^2\lambda_3/\rho & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \tag{8-4-25}$$

式中，$b \equiv u\lambda_1 + v\lambda_2 + w\lambda_3$。将式（8－4－25）展开便有

$$b^2(b^2 - a^2) = 0 \tag{8-4-26}$$

显然，该方程有四个根：$b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = a, b_4 = -a$。另外，这时式（8－4－16）变为

$$\begin{bmatrix} b & a^2\lambda_1/\rho & a^2\lambda_2/\rho & a^2\lambda_3/\rho \\ \rho\lambda_1 & b & 0 & 0 \\ \rho\lambda_2 & 0 & b & 0 \\ \rho\lambda_3 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{8-4-27}$$

1. 对于流特征

当 $b_1 = 0$（或 $b_2 = 0$）时，将 $b = 0$ 代到式（8－4－27）中，可得

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = u, \alpha_3 = v, \alpha_4 = w$$

或者

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{I}} \equiv [0 \quad u \quad v \quad w] \tag{8-4-28}$$

另外，若设 $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{V}$ 也能满足式（8－4－27），于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{II}} \equiv [0, w\lambda_2 - v\lambda_3, u\lambda_3 - w\lambda_1, v\lambda_1 - u\lambda_2] \tag{8-4-29}$$

显然，$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{I}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{II}}$ 是线性无关的。

2. 对于波特征

当 $b_3 = a$ 或 $b_4 = -a$ 时，代到式（8－4－27）得到

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{III}} = \left[1 \quad -\frac{\rho}{a}\lambda_1 \quad -\frac{\rho}{a}\lambda_2 \quad -\frac{\rho}{a}\lambda_3\right] \tag{8-4-30}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{IV}} = \left[1 \quad \frac{\rho}{a}\lambda_1 \quad \frac{\rho}{a}\lambda_2 \quad \frac{\rho}{a}\lambda_3\right] \tag{8-4-31}$$

如果将式（8－4－18）改写为矢量式，即



$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{8-4-32}$$

$$\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho=0 \tag{8-4-33}$$

于是流特征面上的相容关系为

$$\boldsymbol{V}\cdot\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho\right]=0 \tag{8-4-34}$$

$$(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{V})\cdot\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho\right]=0 \tag{8-4-35}$$

波特征面上的相容关系为

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})-\frac{\rho}{a}\boldsymbol{\lambda}\cdot\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho\right]=0 \tag{8-4-36}$$

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})+\frac{\rho}{a}\boldsymbol{\lambda}\cdot\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho\right]=0 \tag{8-4-37}$$

§ 8.5 平面定常超声速流动特征线法的几种提法

这里介绍四种提法。

1. 第一种提法（又称 Cauchy 问题的提法）

如图 8.7 所示，在 (x,y) 平面上曲线 AB 为非特征曲线，其方程为 $f(x,y)=0$；在这条曲线上给定流动参数（例如给定马赫数 M 和气流角 θ）。另外，由曲线的端点 A 与 B 分别作异族特征线 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$，两线交于点 C，于是曲边三角形 ABC 内各点的 M 与 θ 值均可由特征线法确定。而特征线 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 上各点参数值需在逐点求解的过程中确定。这里以平面无旋流动为例，如图 8.7 所示，当点 1 与点 2 已知时，则点 3 处的 M 与 θ 值便可由 1 与 2 点确定。由特征线方程

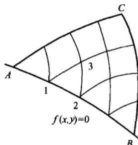


图 8.7　第一种提法

$$\begin{cases} y_3-y_1=(x_3-x_1)\tan(\theta_1-\mu_1) \\ y_3-y_2=(x_3-x_2)\tan(\theta_2+\mu_2) \end{cases}$$

可算得 x_3 与 y_3 值。再由特征相容条件便能确定 M_3 与 θ_3 值。



2. 第 2 种提法

如图 8.8 所示，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 是两条交于点 A 的异族特征线。另外，由点 B 与点 C 分别作异族特征线交于 D 点。如果给定 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 线上的流动参数，则曲边四边形 $ABCD$ 内各点的流动参数均可由特征线法求得。

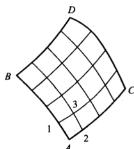


图 8.8　第二种提法

3. 第 3 种提法

设点 A 在固体壁面上，AB 为一条特征线，由点 B 作异族特征线交壁面于 C 点，如图 8.9 所示。如果 $\overset{\frown}{AB}$ 线上的流动参数已知并且壁面 $\overset{\frown}{AC}$ 形状也已知，则曲边三角形 ABC 内各点的流动参数可由特征线法确定。

4. 第 4 种提法

设 $\overset{\frown}{AB}$ 为某条特征线，其上流动参数已知。点 A 落在压强已知的等压面上（$\overset{\frown}{AC}$ 为等压面）。由点 B 作异族特征线交等压面于 C 点，如图 8.10 所示，则曲边三角形 ABC 内各点的流动参数可由特征线法确定。

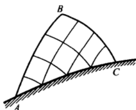


图 8.9　第三种提法

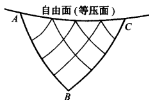


图 8.10　第四种提法

需要说明的是，在特征线理论的柯西问题（即第 1 种提法）中，尽量不要选用声速线作初始线。这是由于声速线附近的特征线方向都几乎与流动方向正交，因此导致特征线网格十分密集。另外，当 $M \to 1$ 时，θ 角的微小误差都将引起马赫数 M 或马赫角 μ 相当大的误差。

§ 8.6　特征线方法数值计算的预估与校正

为便于说明超声速流动中特征线法数值计算的要点，今以平面问题为例，其特征线方程和相容方程分别为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\pm} = \lambda_{\pm} = \tan(\theta \pm \mu) \qquad \text{（马赫线、特征线）} \qquad (8-1-21)$$

$$(u^2 - a^2)(\mathrm{d}u)_{\pm} + \left[2uv - (u^2 - a^2)\lambda_{\pm}\right](\mathrm{d}v)_{\pm} = 0 \qquad \text{（沿马赫线）} \qquad (8-1-18)$$

$$\frac{(\mathrm{d}V)_\pm}{V} \mp \tan\mu(\mathrm{d}\theta)_\pm = 0 \qquad \text{（沿马赫线）} \qquad (8-1-22)$$

8.6.1 内部点计算的预估–校正方法

假设点 1 和点 2 的位置 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 以及其上的速度 u_1、u_2、v_1、v_2 都是已知的。自点 1 与点 2 处分别作特征线，它们相交于点 4，如图 8.11 所示，这里点 4 为待求点。首先，确定点 4 的位置。借助于差分方法将式（8-1-21）用于点 2 与点 4，便有

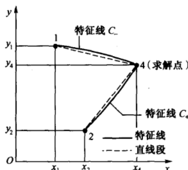


图 8.11 由已知点去决定待求点

$$y_4 - y_2 = (\lambda_+)(x_4 - x_2) \qquad (8-6-1)$$

用于点 1 与点 4，便有

$$y_4 - y_1 = (\lambda_-)(x_4 - x_1) \qquad (8-6-2)$$

式中 $(\lambda_+) = \tan[\theta + \mu]$，$(\lambda_-) = \tan[\theta - \mu]$

$$\theta_\pm = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)_\pm, \qquad \mu_\pm = \arcsin\left(\frac{1}{M_\pm}\right)$$

从已知点到待求点的特征线，一般说来都是曲线，但现在都以直线近似取代了。这条直线的斜率，在预估步时是以已知点的 λ 值代表。显然这是近似的，等到待求点的数值求出来后再用两点处的平均值去代替这条直线的斜率。上述过程用式子表达便为

1. 预估步

$$\begin{cases} y_4 - y_2 = \tan(\theta_2 + \mu_2)(x_4 - x_2) & \text{（沿 24 线）} \\ y_4 - y_1 = \tan(\theta_1 - \mu_1)(x_4 - x_1) & \text{（沿 14 线）} \end{cases} \qquad (8-6-3)$$

解此方程组，可得到点 4 的坐标 (x_4^0, y_4^0)；再对式（8-1-22）进行差分便得

$$\begin{cases} \dfrac{V_4 - V_2}{V_2} - (\tan\mu_2)(\theta_4 - \theta_2) = 0 & \text{（沿24线）} \\ \dfrac{V_4 - V_1}{V_1} + (\tan\mu_1)(\theta_4 - \theta_1) = 0 & \text{（沿14线）} \end{cases} \qquad (8-6-4)$$

解此方程组，得到 V_4^0 与 θ_4^0 以及 μ_4^0 的值。这里 μ_4^0 由下式定出，即

$$\mu_4^0 = \arcsin\left[\frac{a}{V_4^0}\right], \quad a = a(V_4^0)$$



2. 校正步

为了提高精度，对预估步的值进行校正，即用 $\tan\frac{1}{2}\left[(\theta_1-\mu_1)+(\theta_4^0-\mu_4^0)\right]$ 与 $\tan\frac{1}{2}\left[(\theta_2+\mu_2)+(\theta_4^0+\mu_4^0)\right]$ 分别代替差分方程式（8-6-3）中的 $\tan(\theta_1-\mu_1)$ 与 $\tan(\theta_2+\mu_2)$，并解出新的 $x_4^{(1)}$ 与 $y_4^{(1)}$ 值。对式（8-6-4）则采用如下的修正办法

$$\begin{cases}\dfrac{V_4^{(1)}-V_2}{\frac{1}{2}\left(V_2+V_4^0\right)}-\left(\tan\dfrac{\mu_2+\mu_4^0}{2}\right)\left(\theta_4^{(1)}-\theta_2\right)=0 \quad (\text{沿}24\text{线}) \\ \dfrac{V_4^{(1)}-V_1}{\frac{1}{2}\left(V_1+V_4^0\right)}+\left(\tan\dfrac{\mu_1+\mu_4^0}{2}\right)\left(\theta_4^{(1)}-\theta_1\right)=0 \quad (\text{沿}14\text{线})\end{cases} \tag{8-6-5}$$

解此方程组可得到 $V_4^{(1)}$ 与 $\theta_4^{(1)}$ 值，并用下式

$$\mu_4^{(1)}=\arcsin\left(\frac{a}{V_4^{(1)}}\right),\quad a\equiv a\left(V_4^{(1)}\right)=\left\{a_\infty^2+\frac{\gamma-1}{2}\left[V_\infty^2-\left(V_4^{(1)}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

算出 $\mu_4^{(1)}$ 值。如有必要，可重复使用校正步，直至

$$\left|q_i^{(n)}-q_i^{(n-1)}\right|\leqslant\varepsilon_i \tag{8-6-6}$$

式中 q_i 代表 x_4、y_4、V_4、θ_4、μ_4 等参数；上标 n 为迭代次数；ε_i 为允许误差。

另外，对于轴对称问题，例如点2在对称轴上（这时会出现 $\theta_2=0$，$y_2=0$ 的情况），文献[2]给出了相应的办法，可供参考。同样地，如果待求点在对称轴上，已知点1在通过点4的一条特征线 C_- 上，如图8.12所示，则这时可以在对称轴线的另一侧确定点1的对称点作为点2，这样就与前面讨论的内部点处理过程相同了。

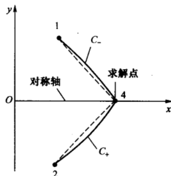


图 8.12 当待求点在对称轴线上的处理

8.6.2 壁面点处理的预估-校正方法

壁面点单元的处理过程可分以下两种情况：令点2为已知的内部点，由点2顺流而下发出一条特征线 c_+ 交壁面于点4，如图8.13（a）所示，我们称这种情况为情况1，又称直接壁面点；另一种情况是壁面上点4的位置是预先给定的，由点4逆流而上引出一条特征线 c_+ 与特征线 c_-（它是由已知点1与点3连接的）相交于点2，称这种情况为情况2，又称逆



置壁面点，如图 8.13（b）所示。

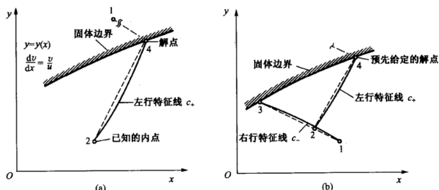


图 8.13　壁面点处理的两种情况

情况 1：与内部点相比，壁面上的点 4 位置与流动参数除了应满足 24 线的特征线方程和这条线上相容关系之外，还需要补充两个方程。显然，壁面的型线方程以及气流速度与壁面相切的条件刚好是两个补充条件，即

$$y = y(x) \tag{8-6-7}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{\mathrm{W}} = \tan\theta\,\bigg|_{\mathrm{W}} = \frac{v}{u}\bigg|_{\mathrm{W}} \tag{8-6-8}$$

于是由式（8-6-3）与式（8-6-7）便可求出点 4 的位置（x_4, y_4）；再由式（8-6-4）与式（8-6-8）便可得到点 4 的流动参数。

情况 2：由于点 4 的角度 θ_4 已知，而速度 V_4 是待求的，可用如下的预估–校正措施得到 V_4 值。

1. 预估步

首先取 $V_4 = V_3$，于是

$$\mu_4 = \arcsin\frac{a_4}{V_4},\quad a_4 = a_4(V_4)$$

再解方程组

$$\left.\begin{aligned} y_4 - y_2 &= \left[\tan(\theta_4 + \mu_4)\right](x_4 - x_2) \\ y_1 - y_2 &= \left[\tan(\theta_1 - \mu_1)\right](x_1 - x_2) \end{aligned}\right\} \tag{8-6-9}$$

可求出点 2 的位置 $\left(x_2^0, y_2^0\right)$；然后在点 1 和点 3 之间用插值的办法求出流动参数 V_2 和 θ_2 值。另外，由于 θ_4 已知，于是借助于式（8-6-4）中沿 24 线的相容方程便得到 V_4 值，并将它记作 V_4^0；进而又可求出 μ_4^0，所以再一次去求解式（8-6-9）又可解得新的 x_2^0 与 y_2^0 值；而后



再由已知点 1 与点 3 插值求出新的 V_2^0、θ_2^0 和 μ_2^0 值。

2. 校正步

将方程组式（8-6-9）中的 $(\theta_4+\mu_4)$ 用 $\frac{1}{2}\left[\left(\theta_2^0+\theta_4\right)+\left(\mu_2^0+\mu_4^0\right)\right]$ 代替，将式中 $(\theta_1-\mu_1)$ 用 $\frac{1}{2}\left[\left(\theta_1-\mu_1\right)+\left(\theta_2^0-\mu_2^0\right)\right]$ 代替，重解式（8-6-9）得到点 2 新的位置并记作 $\left(x_2^{(1)},y_2^{(1)}\right)$；而后再用已知点 1 与点 3 之间的插值求出 $V_2^{(1)}$，$\theta_2^{(1)}$ 与 $\mu_2^{(1)}$ 值；然后对式（8-6-5）中 24 线的相容关系作如下修正

$$\frac{V_4^{(1)}-V_2^{(1)}}{\frac{1}{2}\left(V_2^{(1)}+V_4^0\right)}-\left(\tan\frac{\mu_2^{(1)}+\mu_4^0}{2}\right)\left(\theta_4-\theta_2^{(1)}\right)=0 \tag{8-6-10}$$

从而解出 V_4 的一次校正值 $V_4^{(1)}$；如若需要再次迭代校正，应由 $V_4^{(1)}$ 值去求 $\mu_4^{(1)}$，然后重复上述校正步的计算过程。

8.6.3　自由边界点处理的预估–校正方法

如图 8.14 所示，设有超声速射流排入到静压为 P_2 的大气。图中 $\widehat{34}$ 实线为一条自由边界（又称射流边界），其上的 $P=P_2$；现在要确定的是自由边界的形状以及自由边界点上的流动参数。因为自由边界线 AB 是流线，并且自由边界上各点的压强都相等（即 $P_4=P_a$），注意到等熵流动这个特征，于是自由边界上各点的密度 ρ 都相等，进而推知：其上各点的速度值 V 也相等（即 $V_4=V_3$）。因为点 3 和点 2 为已知，而点 4 是待求点，可用如下的预估–校正措施得到 x_4,y_4 以及 θ_4 值：

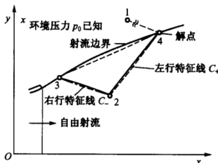


图 8.14　自由边界点单元的处理过程

1. 预估步

首先取自由边界上流线斜率为 $\lambda_0=\frac{v_3}{u_3}$，而特征线 $\widehat{24}$ 的斜率取为 $\lambda_+=\tan\left(\theta_2+\mu_2\right)$，于是

$$\left.\begin{aligned}&\text{流线:}\quad y_4-y_3=\lambda_0(x_4-x_3)\\&\text{特征线}(\widehat{24}\text{线}):y_4-y_2=(\lambda_+)(x_4-x_2)\end{aligned}\right\} \tag{8-6-11}$$

由上式可解出点 4 的位置 (x_4,y_4)；另外，考虑到这时 V_4 已知（因 $V_4=V_3$），因此只要利用一个相容关系（即用式（8-6-4）中 $\widehat{24}$ 线的关系式），便可求出 θ_4 值。

2. 校正步

如果将式（8－6－11）中的斜率用平均值代入，便可求出 x_4 与 y_4 的校正值。再将 x_4，y_4 与 V_4 代入到式（8－6－4）后便可求得 θ_4 的校正值。

§8.7 喷管内超声速流场的分析及相关计算域的确定

图 8.15 简略地画出一个已知几何形状的收敛–扩散喷管的结构。为了把所得的流场能用于所有几何上相似的喷管，因此采用把所有的 x 和 y 坐标都用喉道半径 y_t 去进行尺度变换，因此图 8.15 中喷管的坐标是用 x/y_t 与 y/y_t 来表示的。这个喷管有一个 15° 的锥形扩张和一个经过尺度变换的喉道半径 $y_t=1.0$，在喉道上游的喷管收敛部分，其曲率半径比 $\rho_{tu}/y_t=2.0$；喉道下游部分的曲率半径比 $\rho_{td}/y_t=0.5$；假设喷管中的气体为理想气体，比热比 $\gamma=1.2$，气态常数 $R=320\ \mathrm{J/kg\cdot K}$，压强 $P=70\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$，温度 $T=3\ 000.0\ \mathrm{K}$，这些数据对液体或固体推进剂火箭发动机所用的推力喷管来讲很典型[12, 13]。首先，必须根据喉道区域流场的情况选定一条初始线（又称起始线），这条线处处都是超声速流动。本书 §7.3 节给出了 Sauer 的方法，可供参考。图 8.16 中 *TO* 线为给定的一条超声速初始线，自 *T* 点作右行特征线 *TI* 交轴线于 *I* 点；显然，曲边三角形 *TIO* 所围的区域内流动参数是完全由初始线决定的，图 8.17 给出了这个区域计算时所使用的特征线网格。在完成图 8.17 的计算过程中会多次遇到两种单元过程的计算：一种是由初始线上最初两点（例如点 1 和点 2）开始的求内点（例如点 4）的过程（如图 8.18（a）所示）；另一种是为了确定喷管对称轴线上点（例图 8.18（b）中的点 4）的位置与流动参数。在计算了 *TOI* 区域后，为了进一步求解就必须使用壁面边界条件。由于喉道区域中流动参数梯度较大，所以在对壁面点应用直接步进法

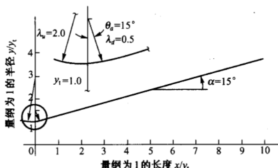


图 8.15 带有锥形扩张段的收敛–扩张喷管

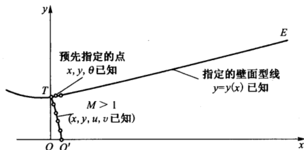


图 8.16 边界与初始线



（如图 8.13（a）所示）时，由左特征线所确定的壁面点间隔太大，精度太低，因而可以像图 8.16 所示的那样，在喉部圆弧部分，每隔几度（例如 10°）选一个壁面点，就这样选几个予定的壁面点，应用逆置壁面上单元的过程（如图 8.19（a）所示），得到它们的解。另外，喷管出口处的那个壁面点 E 也用这个方法处理。对于喉部下游的其余壁面点则仍然用直接壁面点单元的过程去确定（如图 8.19（b）所示）。显然，一旦壁面点的解确定了，由它发出的特征线将一直延伸到对称轴线上。重复运用这些处理方法一直到壁面点 E 发出的那条右行特征线 EA 为止（如图 8.19（c）所示）。因此曲边四边形 $TEAI$ 内的流动便完全确定了（如图 8.19（c）所示）。当喷管内部的流场被确定以后，就可以使用自由面（等压力面）边界点的单元过程（如图 8.14 所示）把解扩展到喷管的排气射流中去。这里分两种情况讨论：① 如果喷管出口边缘处气体的静压超过了周围大气的静压（即大于背压）时，那么在喷管出口边缘点上会发生普朗特—迈耶膨胀波（Prantle-Mayer）（又称中心波）。② 如果喷管出口边缘点处气体的压强小于周围环境背压，那么在喷管出口边缘就会有一道斜激波发出并传入流场，其详细细节可参阅文献[14，15]等，这里不再赘述。

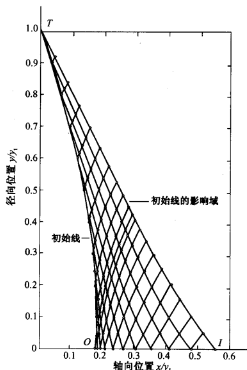


图 8.17　初始线的影响域

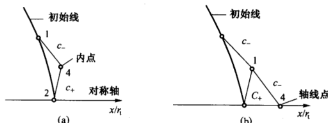


图 8.18　内点单元与轴线点单元的应用



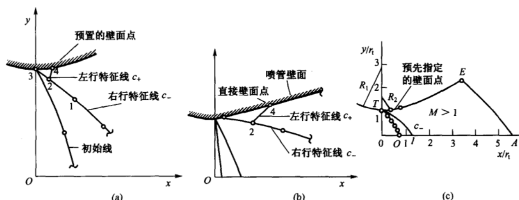


图 8.19 逆置壁面点与直接壁面点单元过程及壁面右端点 E 处的特征线

§ 8.8 超声速流动的空间推进求解方法

8.8.1 可压缩无粘与粘性气体基本方程组的数学性质及 PNS 方程

可压缩牛顿流体非定常流动的 Navier-Stokes 方程组已由式（5-2-3）给出，在二维情况下该式可简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial y}=0 \qquad (8-8-1)$$

式中

$$\boldsymbol{W}=[\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \varepsilon]^{\mathrm{T}} \qquad (8-8-2)$$

$\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{E}_v$ 与 $\boldsymbol{F}_v$ 也分别为含 4 个元素的列向量。可以证明：在 (x,t) 平面与 (y,t) 平面上，可压缩、粘性、常比热、牛顿流体二维非定常流动的 N-S 方程为双曲抛物型方程组，而在 (x,y) 平面上为双曲椭圆型方程组。对于定常流动，则式（8-8-1）简化为

$$\frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial y}=0 \qquad (8-8-3)$$

可以证明：对于可压缩、粘性、常比热、牛顿流体二维定常流动的 N-S 方程是双曲椭圆型方程组。如果省略式（8-8-1）中的粘性项，则这时式（8-8-1）简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=0 \qquad (8-8-4)$$

显然上式为 Euler 方程。可以证明，在 (x,t) 与 (y,t) 平面上，可压缩无粘二维非定常流动的 Euler



方程均为纯双曲型方程组；而在 (x,y) 平面上，当马赫数 $M>1$ 时为双曲型，当马赫数 $M<1$ 时为双曲椭圆型。另外，如果流动为定常，则式（8－8－4）便简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=0 \tag{8-8-5}$$

式中 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ 定义为

$$[\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}]\equiv\begin{bmatrix}\rho u & \rho v\\ \rho uu+P & \rho vu\\ \rho uv & \rho vv+P\\ (\varepsilon+P)u & (\varepsilon+P)v\end{bmatrix} \tag{8-6-6}$$

可以证明：可压缩无粘二维定常流动的 Euler 方程组，当马赫数 $M>1$ 时该方程组为双曲型，而当 $M<1$ 时为双曲椭圆型。另外，在高雷诺数的流动中，考虑到流动方向的粘性导数项要比法向和周向的粘性导数项小得多，因此时常可以略去粘性项沿流动方向的导数项，这时 Navier-Stokes 方程便被简化为 PNS（Parabolized Navier-Stokes）方程，又称作抛物化的 N－S 方程。今假设 x 方向为主流方向，于是式（8－8－1）变为 PNS 方程后为

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v^{*})}{\partial y}=0 \tag{8-8-7}$$

式中

$$\boldsymbol{F}_v^{*}\equiv\begin{bmatrix}0 & \tau_{xy}^{*} & \tau_{yy}^{*} & u\tau_{xy}^{*}+v\tau_{yy}^{*}-q_y^{*}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{8-8-8}$$

$$\tau_{xy}^{*}=\mu\frac{\partial u}{\partial y},\ \tau_{yy}^{*}=\frac{4}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y},\ q_y^{*}=-K\frac{\partial T}{\partial y} \tag{8-8-9}$$

可以证明：可压缩二维非定常 PNS 方程在 (x,t) 与 (y,t) 平面上都是双曲抛物型方程组，在 (x,y) 平面上也是双曲抛物型方程组。如果是定常流，则式（8－8－7）被简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v^{*})}{\partial y}=0 \tag{8-8-10}$$

同样还可以证明可压缩定常 PNS 方程是双曲抛物方程组。

8.8.2　隐式 LU 分解格式

在笛卡儿坐标系中，二维可压缩 Navier-Stokes 方程组已由式（8－8－1）给出。该方程组的显、隐组合格式是[16]

$$\frac{\left(W_{i,j}^{n+1}-W_{i,j}^{n}\right)}{\Delta t}+\theta\left[\delta_{x}E\left(W_{i,j}^{n+1}\right)+\delta_{y}F\left(W_{i,j}^{n+1}\right)\right]+(1-\theta)\left[\delta_{x}E\left(W_{i,j}^{n}\right)+\delta_{y}F\left(W_{i,j}^{n}\right)\right]=\delta_{x}E_{v}\left(W_{i,j}^{n}\right)+\delta_{y}F_{v}\left(W_{i,j}^{n}\right) \tag{8-8-11}*$$

或者简记为

$$\frac{W_{i,j}^{n+1}-W_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\theta\left[\delta_{x}E+\delta_{y}F\right]_{i,j}^{n+1}+(1-\theta)\left[\delta_{x}E+\delta_{y}F\right]_{i,j}^{n}=\left(\delta_{x}E_{v}+\delta_{y}F_{v}\right)_{i,j}^{n} \tag{8-8-11}$$

式中，δ_x 与 δ_y 分别是关于 x 与 y 的标准中心差分算子；上注脚 n 与 $n+1$ 分别表示第 n 时间层与第 $n+1$ 时间层；θ 为加权因子，当 $\theta=0$ 时为显格式，当 $\theta=1$ 时为隐格式。该格式的基本思想是对无粘通量项采用显、隐组合格式，而对粘性项采用显式格式。

显然，式（8-8-11）是一个高度非线性的代数方程组，因此常需要将无粘通量 E 与 F 作线化处理，这里为简洁起见，以下暂将下标 i,j 省略。于是将 E^{n+1} 与 F^{n+1} 在 n 时间层作泰勒级数展开，得到

$$\left.\begin{aligned}E^{n+1}&=E^{n}+A^{n}\Delta W^{n}+O\left(\|\Delta W\|^{2}\right)\\F^{n+1}&=F^{n}+B^{n}\Delta W^{n}+O\left(\|\Delta W\|^{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{8-8-12}$$

这里

$$A\equiv\frac{\partial E}{\partial W},\qquad B\equiv\frac{\partial F}{\partial W},\qquad \Delta W^{n}\equiv W^{n+1}-W^{n}, \tag{8-8-13}$$

将式（8-8-12）、式（8-8-13）代入到式（8-8-11）并略去二阶和高阶小量项后可得

$$\left[I+\theta\Delta t\left(\delta_{x}A^{n}+\delta_{y}B^{n}\right)\right]\Delta W^{n}=-(\Delta t)\tilde{R} \tag{8-8-14}$$

式中

$$\begin{aligned}\tilde{R}&=\delta_{x}E\left(W^{n}\right)+\delta_{y}F\left(W^{n}\right)-\delta_{x}E_{v}\left(W^{n}\right)-\delta_{y}F_{v}\left(W^{n}\right)\\&\equiv[\delta_{x}(E-E_{v})+\delta_{y}(F-F_{v})]^{n}\end{aligned} \tag{8-8-15}$$

式（8-8-14）的 Beam-Warming（比姆-沃明）格式[16]为

$$\left.\begin{aligned}&L_{x}L_{y}\Delta W_{i,j}^{n}=-(\Delta t)\tilde{R}\\&L_{x}\equiv I+\theta\Delta t\delta_{x}A_{i,j}^{n},\qquad L_{y}\equiv I+\theta\Delta t\delta_{y}B_{i,j}^{n}\end{aligned}\right\} \tag{8-8-16}$$

而隐式的 LU 格式[17, 18]为

$$\left.\begin{aligned}&LU\Delta W_{i,j}^{n}=-(\Delta t)\tilde{R}\\&L\equiv I+\theta\Delta t\left(\delta_{x}^{-}A_{1}+\delta_{y}^{-}B_{1}\right)_{i,j}^{n}\\&U\equiv I+\theta\Delta t\left(\delta_{x}^{+}A_{2}+\delta_{y}^{+}B_{2}\right)_{i,j}^{n}\end{aligned}\right\} \tag{8-8-17}$$



这里 δ_x^- 与 δ_y^+ 分别为关于 x 的单侧向后差分算子与关于 y 的单侧向前差分算子，其定义同式（7－6－26）。矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 的定义为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 &\equiv (\boldsymbol{A}+\rho_1\boldsymbol{I})/2, & \boldsymbol{A}_2 &\equiv (\boldsymbol{A}-\rho_1\boldsymbol{I})/2 \\ \boldsymbol{B}_1 &\equiv (\boldsymbol{B}+\rho_2\boldsymbol{I})/2, & \boldsymbol{B}_2 &\equiv (\boldsymbol{B}-\rho_2\boldsymbol{I})/2 \end{aligned}\right\} \tag{8-8-18}$$

其中，ρ_1 与 ρ_2 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径。值得注意的是，当 $\theta=1/2$ 时，该格式在时间方向上为二阶精度，否则在时间方向上是一阶精度。另外，对于差分方程式（8－8－14）还有两点需要加以说明：

（1）该式虽然是一个线性代数方程组，但是它所导致的带状块矩阵具有较大的带宽，因此该矩阵的求逆要花费较多的运算时间并且需要较多的计算机内存，所以这个方程组的快速求解值得研究。这里给出的隐式 LU 格式，便是一种高效率的快速算法。它将计算分为两步进行：

第一步：

$$\boldsymbol{L}\Delta\tilde{\boldsymbol{W}}_{i,j}^n = -(\Delta t)\tilde{\boldsymbol{R}} \tag{8-8-19a}$$

显然，上式对内点来讲，它的左端系数矩阵构成一个典型的块三对角的下三角阵，而这个矩阵的每个元素对二维问题是 4×4 的小矩阵（对三维问题来讲是 5×5 的），而且式（8－8－19a）的求解可逐点推进，十分简单。

第二步：

$$\boldsymbol{U}\Delta\boldsymbol{W}_{i,j}^n = \Delta\tilde{\boldsymbol{W}}_{i,j}^n \tag{8-8-19b}$$

上式左端系数矩阵构成一个典型的块三对角的上三角阵，这个方程组的求解也与第一步相类似，可逐点推进。最后由

$$\boldsymbol{W}_{i,j}^{n+1} = \boldsymbol{W}_{i,j}^n + \Delta\boldsymbol{W}_{i,j}^n \tag{8-8-20}$$

计算出 $\boldsymbol{W}_{i,j}^{n+1}$ 的值，然后进行下个时间步的计算。时间步长由下式估算

$$\Delta t = \frac{CFL}{|u|+|v|+a} \tag{8-8-21}$$

式中 CFL（Courant-Friedrichs-Levy）数（又称 Courant 数）的取值范围远大于 1。

（2）对于定常流动问题，借助于前面所述的时间推进法去求解定常流动，其差分方程中隐式部分的离散只会影响收敛过程的快慢，也就是说隐式部分的离散对定常解的性态（例如数值精度、激波分辨率等）没有影响。而显式部分（即残差 $\Delta t\tilde{\boldsymbol{R}}$ 值）的离散方法将会影响到定常解的性态。因此对显式部分应当考虑采用高精度和高分辨率格式，而对隐式部分离散则应着重考虑如何加速收敛过程和节省求解代数方程组的时间。正是出于这一思想，文献[18]率先提出了 LU-TVD 杂交格式，即隐式部分离散用 Jameson 的 LU 分解，而右端残差项（即显式部分）用 Harten 的 TVD 格式；文献[19]将这种杂交格式用于各种流动问题；文献[20]则提出了将矢通量分裂与 Harten 的 TVD 相结合，用于提高捕捉激波的分辨率及加快求解复杂流场的效率；文献[21～29]将这种杂交格式的思想用于有限体积法，提出了有限体积 LU-

TVD 杂交格式并用于叶轮机械三维复杂流场的求解及高速进气道流场的计算。另外，国内外大量的数值实践还表明：隐式 LU 分解方法，对任何维数空间问题都是稳定的，并且理论上已经证明这种隐式 LU 分解方法对于跨声速流动以及从低跨声速直至马赫数达 20 的高速流动都是适用的、有效的[30~32]。

8.8.3 PNS 方程的空间推进求解方法

采用空间推进方法[33~36]求解定常抛物化 N－S 方程（即 PNS 方程）来数值模拟定常粘性问题与采用时间相关方法求解非定常 N－S 方程或非定常 PNS 方程来数值模拟定常粘性问题，将两者相比较可以发现确实前者具有明显的优越性：一是大大节省计算时间和计算机内存；二是 PNS 方程不同于边界层方程，它在方程中不但包含了主要粘性项，而且保留了无粘 Euler 方程中的所有项，因此它能自动模拟边界层内的粘性流动与外流无粘流之间的相互干扰。对于流向不产生分离的粘性流动，它是一个效率较高的计算方法，因此国外已广泛用于超声速粘性复杂流动的数值计算[37]。为了便于描述，下面仍从直角坐标系下定常 PNS 方程出发讨论空间推进的求解方法，在三维情况下定常 PNS 方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v')}{\partial y}+\frac{\partial(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v')}{\partial z}=0 \qquad (8-8-22)$$

式中，$\boldsymbol{F}_v'$ 与 $\boldsymbol{G}_v'$ 分别代表粘性项 $\boldsymbol{F}_v$ 与 $\boldsymbol{G}_v$ 略去沿着流动方向（这里假定 x 为主要流动方向）的导数之后所剩余的项，其表达式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_v'=\left[0,\tau_{xy}',\tau_{yy}',\tau_{yz}',u\tau_{xy}'+v\tau_{yy}'+w\tau_{yz}'-q_y'\right]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{G}_v'=\left[0,\tau_{xz}',\tau_{yz}',\tau_{zz}',u\tau_{xz}'+v\tau_{yz}'+w\tau_{zz}'-q_z'\right]^{\mathrm{T}}\\ \tau_{yy}'=\dfrac{2}{3}\mu\left(2\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial z}\right),\qquad \tau_{zz}'=\dfrac{2}{3}\mu\left(2\dfrac{\partial w}{\partial z}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right),\\ \tau_{xy}'=\mu\dfrac{\partial u}{\partial y},\tau_{yz}'=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right),\qquad \tau_{xz}'=\mu\dfrac{\partial u}{\partial z},q_y'=-K\dfrac{\partial T}{\partial y},q_z'=-K\dfrac{\partial T}{\partial z}\end{cases} \qquad (8-8-23)$$

当流动满足：① 流场边界层外的主流区是超声速流动；② 流场中流动方向的速度分量处处都大于零；③ 在 PNS 方程组式（8－8－22）的流向动量方程中，流向压力梯度的存在可能会使相关信息通过边界层内的亚声速区向上游传播，所以为了采用空间推进方法，对流向压力梯度项要么是省略，要么是采用下面介绍的 Vigneron 处理方法去阻止数值解的指数增长（departure solutions）。在满足上述三个条件的情况下，PNS 方程式（8－8－2）可以采用类似于抛物型边界层方程的求解方法进行求解，即可以从给定的初始剖面出发（该面上的流场参数为已知量），沿流动方向逐个剖面向下游推进求解，一直推进到最后一个剖面为止。



1. 流向压力梯度对 PNS 方程数学性质的影响分析

为了更好的了解数值解产生指数增长的原因，现在分析流向压力对 PNS 方程组数学性质的影响。为了简便起见，这里考虑二维 PNS 方程，并假设式（8－8－22）这时被简化为下面的形式（取 x 为主要流动方向）。

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}=\frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial y} \tag{8-8-24}$$

式中 $\tilde{E},\tilde{F}$ 与 $\tilde{F}_v$ 定义为

$$\left[\tilde{E},\tilde{F}\right]=\begin{bmatrix} \rho u & \rho v \\ \rho u^2+\omega P & \rho v u \\ \rho u v & \rho v^2+P \\ \left(\dfrac{\gamma P}{\gamma-1}+\dfrac{\rho\left(u^2+v^2\right)}{2}\right)u & \left(\dfrac{\gamma P}{\gamma-1}+\dfrac{\rho\left(u^2+v^2\right)}{2}\right)v \end{bmatrix} \tag{8-8-25}$$

$$\tilde{F}_v=\mu\begin{bmatrix} 0 \\ \partial u/\partial y \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{4}{3}v\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{8-8-26}$$

这里 ω 为 x 方向动量方程中流向压力梯度项的系数；当 $\omega=0$ 时，则该项被省略，当 $\omega=1$ 时，则该项全部保留。首先考虑 $\mu\to 0$ 时，则式（8－8－24）变为如下形式，即

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}=0 \tag{8-8-27}$$

将上式变为非守恒形式便为

$$A_1\frac{\partial Q}{\partial x}+B_1\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \tag{8-8-28}$$

式中

$$Q=\left[\rho \quad u \quad v \quad P\right]^{\mathrm{T}} \tag{8-8-29a}$$

$$A_1=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & \omega \\ 0 & 0 & \rho u & 0 \\ 0 & C_1 & \rho u v & \dfrac{\gamma u}{\gamma-1} \end{bmatrix},\qquad B_1=\begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 1 \\ 0 & \rho u v & C_2 & \dfrac{\gamma v}{\gamma-1} \end{bmatrix} \tag{8-8-29b}$$

$$C_1 \equiv \rho u^2 + \frac{\gamma P}{\gamma-1},\ C_2 \equiv \rho v^2 + \frac{\gamma P}{\gamma-1}, \tag{8-8-29c}$$

将 A_1^{-1} 左乘式（8－8－28）得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + A_1^{-1} B_1 \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \tag{8-8-30}$$

可以看出，如果矩阵 $(A_1^{-1}B_1)$ 具有实特征值，则方程组式（8－8－27）为双曲型方程组。容易求得其特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{v}{u},\ \lambda_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b_1c_3}}{2b_1} \tag{8-8-31a}$$

$$\begin{cases} b_1 \equiv [\gamma - \omega(\gamma-1)]\ u^2 - \omega a^2 \\ b \equiv -uv[1+\gamma-\omega(\gamma-1)] \\ c_3 \equiv v^2 - a^2 \end{cases} \tag{8-8-31b}$$

这里 a 为声速。如果在 x 方向的动量方程中，流向的压力梯度完全保留（即 $\omega=1$）时，则不难看出只有当

$$u^2 + v^2 \geqslant a^2 \quad 或 \quad M \geqslant 1$$

时，所有的特征值才为实数；如果流向压力梯度只保留一部分（即取 $0 \leqslant \omega \leqslant 1$），则仅在如下条件成立时亚声速区域内的特征值才可以保持为实数，这个条件是

$$\omega \leqslant \frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2} \tag{8-8-32}$$

式中，$M_x \equiv u/a$。注意，以上不等式是假定法向速度分量 v 比流向速度分量 u 小得多的情况下推出的。

现在考虑粘性方程，这里先去掉式（8－8－24）中的 $\partial\tilde{F}/\partial y$ 项，则这时方程的非守恒形式为

$$A_2 \frac{\partial Q}{\partial x} = B_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \tag{8-8-33}$$

式中，A_2 与 B_2 为

$$A_2 = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ u^2 & 2\rho u & 0 & \omega \\ uv & \rho v & \rho u & 0 \\ b_2 & b_3 & \rho uv & \dfrac{\gamma u}{\gamma-1} \end{bmatrix},\quad B_2 = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ b_4 & u & \dfrac{4}{3}v & b_5 \end{bmatrix} \tag{8-8-34a}$$



$$\begin{cases} b_2 \equiv \dfrac{u(u^2+v^2)}{2}, & b_3 \equiv \dfrac{\gamma P}{\gamma-1}+\dfrac{\rho(3u^2+v^2)}{2}, \\ b_4 \equiv \dfrac{-\gamma P}{(\gamma-1)\rho^2 Pr}, & b_5 \equiv \dfrac{\gamma}{(\gamma-1)\rho Pr} \end{cases} \tag{8-8-34b}$$

这里 Pr 为 Prandtl 数。如果矩阵（$\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2$）的特征值是正实数，则方程组（8-8-33）对 x 的正向而言为抛物型方程组。可以证明[33]：当 $u>0$ 且

$$\omega < \frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2} \equiv f(M_x) \tag{8-8-35}$$

时，则矩阵（$\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2$）的特征值为正实数。显然，当 $M_x=1$ 时，则 $f(M_x)=1$；当 $M_x>1$ 时，则 $f(M_x)>1$，这时可以取 $\omega=1$ 即流向压力梯度完全被包含在方程中；当 $M_x<1$ 时，如果要求特征值为正实数，则只能部分流向压力梯度被保留（即 $\omega\partial P/\partial x$ 部分）。值得注意的是，因为在壁面上马赫数 $M_x=0$，故靠近壁面 $\omega\to 0$，所以在边界层内亚声速部分中，如果保留了整个流向压力梯度项的话，则 PNS 方程的空间推进解将是不稳定的（因这里包含了“椭圆型”特性）。为了保证空间推进方法的稳定性，通常的处理措施有两个：一个是在亚声速区完全丢掉流向压力梯度项（但这样做对流向压力梯度较大时的流场将导致误差）；第二是采用下面的具体办法：在亚声速区域内，对 $\partial P/\partial x$ 项采用单侧向后差分，即

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{P_i-P_{i-1}}{\Delta x} \tag{8-8-36}$$

正如文献[38]作 Fourier（傅里叶）稳定性分析时所指出的，如果 Δx 小于某个值（不妨令它为 $(\Delta x)_{\min}$）时，则将存在不稳定现象。所以采用 $\Delta x>(\Delta x)_{\min}$ 的办法去防止解的指数增长。这里 $(\Delta x)_{\min}$ 对于 x 方向步长的限制，表明了上游椭圆干扰区的存在。换句话说，应该对 x 方向的步长提出限制条件。对二维 PNS 方程则显式格式的 $(\Delta x)_{\min}$ 为

$$(\Delta x)_{\min}=\frac{\dfrac{1}{4}\dfrac{\rho u}{\mu}\left[\dfrac{1}{M_x^2}-1\right](\Delta y)^2}{\gamma\sin^2(\beta/2)}, \qquad \beta\equiv K_m\Delta y$$

式中，K_m 为正整数。另外，对于隐式格式，一些文献建议 $(\Delta x)_{\min}$ 取为两倍显式格式时的最小步长。

2. PNS 方程的空间推进

为了求解式（8-8-22），在流动的主方向（这里取为 x 方向）上可以采用 Beam & Warming 的 2 阶精度格式，即[16]

$$\begin{aligned}\left(\delta_x^+\boldsymbol{E}\right)_i=&\frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\delta_x^+\boldsymbol{E}\right)_i\right]+\frac{\Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{E}_i+\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\left(\delta_x^+\boldsymbol{E}\right)_{i-1}+\\&O\left[\left(\theta_1-\frac{1}{2}-\theta_2\right)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right]\end{aligned} \tag{8-8-37}$$

式中，δ_x^+ 为关于 x 的单侧前差算子，即 $\left(\delta_x^+ \boldsymbol{E}\right)_i = \boldsymbol{E}_{i+1} - \boldsymbol{E}_i$；$\theta_1$ 与 θ_2 为格式参数：当 $\theta_1 = 1$，$\theta_2 = 0$ 时为一阶隐格式；当 $\theta_1 = 1$，$\theta_2 = \frac{1}{2}$ 时，为二阶隐格式。

将式（8－8－22）代入到式（8－8－37），得

$$\begin{aligned}\left(\delta_x^+ \boldsymbol{E}\right)_i = &-\frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\delta_x^+\left(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v'\right)_i\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\delta_x^+\left(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v'\right)_i\right]\right\}-\frac{\Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v'\right)_i+\right.\\ &\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v'\right)_i\right]+\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\left(\delta_x^+ \boldsymbol{E}\right)_{i-1}+O\left[\left(\theta_1-\frac{1}{2}-\theta_2\right)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right]\end{aligned} \tag{8-8-38}$$

令 $\boldsymbol{W} = \left[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \varepsilon\right]^{\mathrm{T}} \equiv \left[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\right]^{\mathrm{T}}$，并令 $\partial \boldsymbol{F}/\partial w = \boldsymbol{B}$ 与 $\partial \boldsymbol{G}/\partial w = \boldsymbol{C}$，这里 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 均为 5×5 的矩阵。值得注意的是，关于粘性项 $\boldsymbol{F}_v'$ 与 $\boldsymbol{G}_v'$ 的 Jacobian 矩阵的计算，这里不妨假设粘性系数 μ 与热传导系数 k 都不依赖于 $\boldsymbol{W}$，并以 f_k 与 g_k 分别表示列矢量 $\boldsymbol{F}_v'$ 与 $\boldsymbol{G}_v'$ 的元素，于是 f_k 与 g_k 表达式为

$$f_k = \alpha_k \frac{\partial\left(\beta_k\right)}{\partial y}, \quad g_k = \alpha_k^* \frac{\partial\left(\beta_k^*\right)}{\partial z} \tag{8-8-39}$$

注意上式中省略了交叉导数项，并假定 α_k 与 α_k^* 不依赖于 $\boldsymbol{W}$，而 β_k 与 β_k^* 是 $\boldsymbol{W}$ 的函数，于是将 f_{i+1} 与 g_{i+1} 分别在 i 点作泰勒级数展开，便有

$$f_{i+1} = f_i + \left(\alpha_k\right)_i \frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_{l=1}^{5}\left[\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial w_l}\right)\left(\delta_x^+ w_l\right)\right]_i\right\} + O\left[(\Delta x)^2\right] \tag{8-8-40}$$

$$g_{i+1} = g_i + \left(\alpha_k^*\right)_i \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{l=1}^{5}\left[\left(\frac{\partial \beta_k^*}{\partial w_l}\right)\left(\delta_x^+ w_l\right)\right]_i\right\} + O\left[(\Delta x)^2\right] \tag{8-8-41}$$

由此可得到

$$\left(\delta_x^+ \boldsymbol{F}_v'\right)_i = \left(\boldsymbol{B}_1\right)_i \left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i + O\left(\Delta x^2\right), \quad \boldsymbol{B}_1 = \partial \boldsymbol{F}_v'/\partial \boldsymbol{W} \tag{8-8-42}$$

$$\left(\delta_x^+ \boldsymbol{G}_v'\right)_i = \left(\boldsymbol{C}_1\right)_i \left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i + O\left(\Delta x^2\right), \quad \boldsymbol{C}_1 = \partial \boldsymbol{G}_v'/\partial \boldsymbol{W} \tag{8-8-43}$$

对于 $\boldsymbol{E}$ 可作如下分解，即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{P}^* \tag{8-8-44}$$

式中

$$\boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \omega P \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (\varepsilon + P) u \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\omega) P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8-8-45}$$



于是，类似的有

$$\left(\delta_x^+ \boldsymbol{E}\right)_i = \left(\delta_x^+ \boldsymbol{E}'\right)_i + \left(\delta_x^+ \boldsymbol{P}^*\right)_i \tag{8-8-46}$$

$$\left(\delta_x^+ \boldsymbol{E}'\right)_i = \left(\boldsymbol{A}_1\right)_i \left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i + O\left(\Delta x^2\right), \quad \boldsymbol{A}_1 = \partial \boldsymbol{E}'/\partial \boldsymbol{W} \tag{8-8-47}$$

将式（8-8-46）、式（8-8-47）、式（8-8-42）、式（8-8-43）代入到式（8-8-38）后得

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{A}_1\right)_i \left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1\right)_i \left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)_i \left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i\right]\right\} \\ &= -\frac{\Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v'\right)_i + \frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v'\right)_i\right] + \frac{\theta_2}{1+\theta_2}\left(\delta_x^+ \boldsymbol{E}\right)_{i-1} - \left(\delta_x^+ \boldsymbol{P}^*\right)_i\end{aligned} \tag{8-8-48}$$

将式（8-8-48）的左端隐式部分近似因式分解为

$$\left\{\left[\left(\boldsymbol{A}_1\right)_i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)_i \cdot\right]\left(\boldsymbol{A}_1\right)_i^{-1}\left[\left(\boldsymbol{A}_1\right)_i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1\right)_i \cdot\right]\right\}\left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i = \text{RHS} \tag{8-8-49}$$

式中 RHS 表示式（8-8-48）的右端项。另外，在式（8-8-49）中采用了计算流体力学中因式分解算法里常用的书写约定，即用

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)_i \cdot\right]\left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i \text{代表} \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)_i \left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i\right] \tag{8-8-50}$$

因此，式（8-8-49）的求解可分三步进行：

第一步：求解

$$\left[\left(\boldsymbol{A}_1\right)_i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)_i \cdot\right]\left(\delta_x^+ \tilde{\boldsymbol{W}}\right)_i = \text{RHS} \tag{8-8-51}$$

将 $\frac{\partial}{\partial z}$ 采用中心差分算子 δ_z^0 取代，便得

$$\left(\boldsymbol{A}_1\right)_{i,j,k}\left(\delta_x^+ \tilde{\boldsymbol{W}}\right)_{i,j,k} + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\delta_z^0\left[\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)_{i,j,k}\left(\delta_x^+ \tilde{\boldsymbol{W}}\right)_{i,j,k}\right] = \text{RHS} \tag{8-8-52}$$

显然，上式涉及 $(i,j,k-1)$、(i,j,k) 与 $(i,j,k+1)$ 这三个点，也就是说式（8-8-52）左端系数构成了块三对角矩阵。因此对于固定的 i 截面，沿 z 向扫描的过程就是求解方程组式（8-8-52）的过程，注意这里 $\tilde{\boldsymbol{W}}$ 为中间求解变量。

第二步：求解

$$\left[\left(\boldsymbol{A}_1\right)_i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1\right)_i \cdot\right]\left(\delta_x^+ \boldsymbol{W}\right)_i = \left(\boldsymbol{A}_1\right)_i\left(\delta_x^+ \tilde{\boldsymbol{W}}\right)_i \tag{8-8-53}$$

用中心差分算子 δ_y^0 取代 $\frac{\partial}{\partial y}$，便得

$$(\boldsymbol{A}_1)_{i,j,k}\left(\delta_x^+\boldsymbol{W}\right)_{i,j,k}+\frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\delta_y^0\left[(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1)_{i,j,k}\left(\delta_x^+\boldsymbol{W}\right)_{i,j,k}\right]=(\boldsymbol{A}_1)_{i,j,k}\left(\delta_x^+\tilde{\boldsymbol{W}}\right)_{i,j,k} \quad (8-8-54)$$

上式涉及 $(i,j-1,k)$、(i,j,k) 与 $(i,j+1,k)$ 这三个点，也就是说式（8－8－54）左端系数构成了块三对角矩阵。同样的，对于固定的 i 截面，沿 y 向扫描的过程就是求解方程组式（8－8－54）的过程。

第三步：计算 $(i+1)$ 截面上的 $\boldsymbol{W}$ 值

$$\boldsymbol{W}_{i+1,j,k}=\boldsymbol{W}_{i,j,k}+\left(\delta_x^+\boldsymbol{W}\right)_{i,j,k} \text{ 或简记为 } \boldsymbol{W}_{i+1}=\boldsymbol{W}_i+\left(\delta_x^+\boldsymbol{W}\right)_i \quad (8-8-55)$$

至此通过这三步的计算，完成了由 i 截面向 $(i+1)$ 截面的推进。

最后还应该指出的是，空间推进算法在航空、航天工程中已经获得了巨大成功[39, 40]。对于没有大分离的超声速粘性流动，它是一个较为经济、实用的格式。应该看到，我国在采用空间推进求解超声速无粘流动方面开展工作还是较早的，例如文献[41]的作者们就在这一方面取得了较好的成果。另外，文献[42，43，44]在航天器的气动计算上也做了许多工作。

参 考 文 献

1 Shapiro A H. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. Vol.1, Vol.2,. New York: The Ronald Press, 1953

2 童秉纲，孔祥言，邓国华. 气体动力学. 北京：高等教育出版社，1990

3 Zucrow M J, Hoffman J D. Gas dynamics (volume II). John Wiley & Sons Inc, 1977

4 Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics II. New York: Interscience, 1962

5 Русанов В В. Характеристики общих уравнений газовой динамики. ЖВММФ, 1963, 3(3): 508～527

6 Butler D S. The numerical solution of hyperbolic system of partial differential equations in three independent variables. Proceedings of the Royal Society of London, 1960, Vol. 255 A: 232～252

7 Varga R S. Matrix iterative analysis. New York: Prentice-Hall, 1962

8 谢帮杰. 线性代数. 北京：人民教育出版社，1978

9 McConnell A J. Applications of tensor analysis. New York: Dover Publications, 1957

10 华罗庚. 高等数学引论（余篇）. 北京：科学出版社，1984

11 时爱民，苏铭德，刘季稔. 气体动力学基础. 北京：科学出版社，1988

12 雷瑞生，居贤铭. 火箭气体动力学. 北京：国防工业出版社，1985

13 何洪庆，张振鹏. 固体火箭发动机气体动力学. 西安：西北工业大学出版社，1988

14 姜正行. 飞机内流空气动力学. 徐华舫审校. 北京：航空工业出版社, 1989



15 潘锦珊. 气体动力学基础（修订版）. 北京：国防工业出版社，1989

16 Beam R M, Warming R F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA J. 1978, 16: 393～401

17 Jameson A, Turkel E. Implicit scheme and LU decompositions. Math. Comp. 1981, 37(156): 385～397

18 王保国. 新的解跨音速 Euler 方程的隐式杂交方法. 航空学报，1989, 10(7):309～315

19 王保国,陈乃兴. A new, high-resolution hybrid scheme for homogenous and nonhomogeneous hyperbolic conservation laws. 1st International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, 1990: 93～101, Beijing, China

20 王保国，陈乃兴. A new, high-resolution shock-capturing hybrid scheme of flux-vector splitting-Harten's TVD. Acta Mechanica Sinica, 1990, 6(3): 204～213

21 王保国，卞荫贵. 转动坐标系中三维跨声速欧拉流的有限体积——TVD 格式. 空气动力学学报，1992 年，10(4): 472～481

22 王保国，卞荫贵. An efficient implicit hybrid scheme for hyperbolic conservation law in curvilinear coordinates. First Chinese-Soviet Workshop on Complex Fields of Gas Flow, 1991: 1～8

23 王保国，卞荫贵. 求解三维欧拉流的隐-显式格式及改进的三维 LU 算法. 计算物理，1992，9(4): 423～425

24 王保国，刘秋生，卞荫贵. A high-resolution hybrid scheme for solving three dimensional Euler of high speed inlet flow. Journal of Thermal Science, 1996, 5(3): 164～167

25 王保国，卞荫贵. An LU-TVD finite volume scheme for solving 3-D Reynolds averaged Navier-Stokes equations of high speed inlet flows. First Asian Computational Fluid Dynamics Conference, 1995, Hong Kong, Vol.3: 1055～1060

26 王保国，刘秋生，沈孟育. High order accurate and high resolution upwind finite volume scheme for solving Euler/Reynolds averaged Navier-Stokes equations. Acta Mechanica Sinica, 1998, 14(1):10～17

27 王保国，郭延虎，沈孟育. High order accurate and high resolution implicit upuind finite volume scheme for solving Euler/Reynolds averaged Navier-Stokes equations. Tsinghua and Technology, 2000, 5(1): 47～53

28 王保国，沈孟育. 高速粘性内流的高分辨率高精度迎风型杂交格式. 空气动力学学报，1995，13 (4) :365～373

29 王保国，刘秋生，卞荫贵. 三维湍流高速进气道内外流场的高效高分辨率解. 空气动力学学报，1996, 14(2): 168～178

30 Jameson A. Current Status of future directions of computational transonics. Computational Mechanics-Advances and Trends (Noor A K, ed.), Publication AMD 75, ASME, New York, 1986

31 Jameson A. Successes and challenges in computational aerodynamics. AIAA Paper 87-1184, Honolulu, Hawaii, 1987

32 Jameson A, Baker T, Weatherill N. Calculation of inviscid flow over a complete aircraft. AIAA paper 86-0103, Reno, Nevada, 1986

33 Vigneron Y C, Rakich J V, Tannehill J C. Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with shap subsonic leading edges. AIAA Paper 78-1137 or NASA TM 78500, 1978

34 Rubin S, Tannehill J. Parabolized/reduced Navier-Stokes computational techniques. Annu. Rev. Fluid Mech., 1992, 24: 117～144

35 Rubin S G. A review of marching procedures for parabolized Navier-Stokes equations. Proceedings of Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, New York: Springer-Verlag, 1981

36 Lawrence S L, Chaussee D C, Tannehill J C. Application of an upwind algorithm to the three dimensional parabolied Navier-Stokes equations. AIAA Paper 87-1112, (1987)

37 Tannehill J C, Anderson D A, Pletcher R H. Computational fluid mechanics and heat transfer (Second Edition). Washington: Taylor & Francis, 1997

38 Lubard S C, Helliwell W S. Calculation of the flow on a cone at high angle of attach. AIAA J. 1974, 12: 965～974

39 Buelow P E, Tannehill J C, Ievalts J O, Lawrence S L. Three-dimensional, upwind, parabolized Navier-Stokes code for chemically reacting flows. J. Thermophys. Heat Transfer, 1991, 5: 274～283

40 Wadawadigi G, Tannehill J C, Lawrence S L, Edwards T A. Three-dimensional computation of the integrated aerodynamic and propulsive flowfields of a generic hypersonic space plane. AIAA Paper 94-0633, Reno, Nevada, 1994

41 朱幼兰，钟锡昌，陈炳木，张作民. 初边值问题差分方法及绕流. 北京：科学出版社，1980

42 纪楚群. 弯头钝锥的超声速无粘绕流数值计算方法. 空气动力学学报，1984, 2(1):29～39

43 马延文，傅德薰. A simple and efficient implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equation. Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Beijing, 1986

44 庄逢甘，张涵信. On a marching iterative method in solving gas dynamic equations. Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Beijing, 1986

45 Liepmann H W, Roshko A. Elements of gas dynamics. New York: John Wiley, California Institute of Technology, 1957

46 Краснов Н Ф. Аэродинамика тел вращения. Москва: Оборонгиз, 1958

47 王保国，黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法. 北京：国防工业出版社，2000

48 Mavriplis D J. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness. AIAA Paper 93-0671, (1993)



习　题

1. 适用于亚、跨、超声速定常、无粘、无旋、平面流动的小扰动方程组[45]为

$$
\begin{cases}
\left(1-M_{\infty}^{2}\right)\dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}=M_{\infty}^{2}(\gamma+1)\dfrac{u'}{U}\dfrac{\partial u'}{\partial x} \\
\dfrac{\partial u'}{\partial y}-\dfrac{\partial v'}{\partial x}=0
\end{cases}
\tag{*1}
$$

式中，u',v' 分别为沿 x,y 方向的小扰动速度分量，即：$u=U+u'$，$v=v'$，这里 u,v 为相应的速度分量。试求其特征线方程以及相容关系式。

2. 在自然坐标系 (s,n) 中，气体平面、定常、无旋、无粘、等熵运动的方程组为

$$
\begin{cases}
\dfrac{M^{2}-1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial S}-\dfrac{\partial \theta}{\partial n}=0 \\
\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial n}-\dfrac{\partial \theta}{\partial S}=0
\end{cases}
\tag{*2}
$$

式中，S,n 分别为沿流线及沿法线方向的坐标；V 和 θ 分别为速度的大小和速度矢量与 x 轴间的夹角，如图 8.20 所示。试求出该方程组的特征线以及相容关系式。画出物理平面上的特征线，阐述其物理意义。

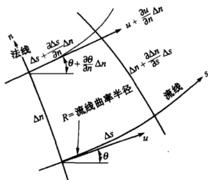


图 8.20　自然坐标系

3. 在气体动力学中，Prandtl-Meyer（普朗特–迈耶）函数 ν 是超声速问题中经常使用的气动函数之一，其定义为

$$
\nu=\int\frac{\cot\mu}{V}\mathrm{d}V \tag{*3}
$$

式中，V 为速度的模，μ 为马赫角。试证明：对于定常、无旋、无粘平面等熵流动，其基本方程组为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \nu}{\partial S}-(\tan\mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial n}=0 \\
(\tan\mu)\dfrac{\partial \nu}{\partial n}-\dfrac{\partial \theta}{\partial S}=0
\end{cases}
\tag{*4}
$$

式中，θ 为气流与 x 轴的夹角；坐标系 (S,n) 为自然坐标系。如果选用马赫线网格组成新的坐标系 (ξ,η) 时（如图 8.21 所示），注意到马赫线与流线之间的倾角为 $\pm\mu$，试证明：对于定常、无旋、无粘平面流动，有下面两式成立



$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\nu+\theta)=0 \tag{*5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\nu-\theta)=0 \tag{*6}$$

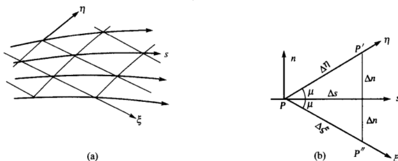


图 8.21　自然坐标系与特征线坐标系

我们可以借助于式（*5）与式（*6）完成超声速平面、无旋、定常等熵流动的计算。今给定初始曲线 AB（如图 8.22（a）所示）上点 1、点 4、点 6 与点 2 处（如图 8.22（b）所示）的 ν 与 θ 值，试计算：点 3、点 5、点 7、点 8、点 9 与点 10 上的 ν 与 θ 值。

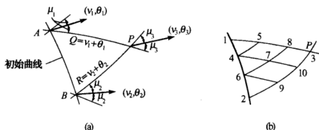


图 8.22　计算用的特征线网格

4. 前面题 3 主要考虑的是等熵流动问题。对于非等熵流动，可以证明：轴对称、定常、无粘、非等熵流动的其本方程组为

$$\frac{\cot^2\mu}{V}\frac{\partial V}{\partial S}-\frac{\partial \theta}{\partial n}=\frac{\sin\theta}{r} \tag{*7}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial n}-\frac{\partial \theta}{\partial S}=-\frac{T}{V^2}\frac{d\tilde{S}}{dn}+\frac{1}{V^2}\frac{dH}{dn} \tag{*8}$$

式中，H 与 $\tilde{S}$ 分别代表总焓与熵，T 为温度；试从式（*7）与式（*8）出发，证明在特征



线坐标系（ξ,η）中存在如下关系

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\nu+\theta)=(\sin\mu)\frac{\sin\theta}{r}-\frac{\cot\mu}{V^2}\left(T\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\xi}-\frac{\partial H}{\partial\xi}\right) \tag{*9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\nu-\theta)=(\sin\mu)\frac{\sin\theta}{r}-\frac{\cot\mu}{V^2}\left(T\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\eta}-\frac{\partial H}{\partial\eta}\right) \tag{*10}$$

提示：在完成式（*9）与式（*10）证明时，应注意到如下关系式成立，即

$$\frac{\partial\eta}{\partial n}=\csc\mu,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial n}=-\csc\mu \tag{*11}$$

5. 对于平面、无粘、均总焓、超声速流动，其基本方程组如下：

$$\begin{cases}\left(a^2-u^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-uv\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(a^2-v^2\right)\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})=-T\nabla S\end{cases} \tag{*12}$$

式中，S 为熵，T 为温度。试求出该问题的特征线方程和相容性关系式。

6. 在早期气体动力学及空气动力学的计算中，细长旋成体（又称细长锥）超声速定常、无粘、无旋绕流流动常采用轴对称小扰动近似，其基本方程组为[46]

$$\begin{cases}\left(M_\infty^2-1\right)\dfrac{\partial u'}{\partial x}-\dfrac{\partial v'}{\partial r}-\dfrac{v'}{r}=0\\ \dfrac{\partial v'}{\partial x}-\dfrac{\partial u'}{\partial r}=0\end{cases} \tag{*13}$$

式中，u',v' 为沿 x,y 方向的小扰动速度。试求出上述方程组的特征方程和相容关系式。如果我们引进小扰动速度势 $\varphi(x,r)$，使其满足 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=u'$，$\partial\varphi/\partial r=v'$，于是可得到如下关于 φ 的偏微分方程

$$B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \tag{*14}$$

这里 $B^2=M_\infty^2-1>0$；如果已知（*14）的基本解之一是

$$\varphi(x,r)=-\frac{A}{\sqrt{x^2-(Br)^2}} \tag{*15}$$

试求出式（*14）的通解。（提示：因为式（*14）是线性的，故可以利用流体力学基础课程讲过的通过沿 x 轴连续分布着“超声速点源”的办法去求在点 (x,r) 处产生的扰动速度势以便获得式（*14）的通解。）

7. 如图 8.23 所示，今有一平面超声速喷管，流动为定常、无粘、均熵。令 C 点在喷管轴线上，假设 AC 与 CB 分别为第二族与第 I 族特征线，并假定 BC 线后的流动均匀并且



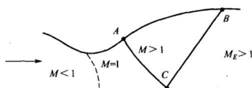


图 8.23 平面收缩扩张喷管

$M_E>1$；已知点 A 的 θ 与 v 值，并且 B 点的 θ 值也已知，试求出 B 点的 v 值（这里 θ 为速度倾角，v 为 Prandtl-Meyer 函数）。

8. 设空气以超声速流过平面尖头对称物体，来流参数 $\theta_\infty=0$，$P_\infty=10^5$ N/m²，$\rho_\infty=1.160$ kg/m³，$T_\infty=300$ K，$M_\infty=3.0$，如图 8.24 所示。若点 1 和点 2 的位置坐标和流动参数分别为 $x_1=0.221\,11$ m, $y_1=0.283\,15$ m, $V_1=691.50$ m/s, $\theta_1=30°$，$P_1=6.355\,8\times10^5$ N/m²，$\rho_1=3.678\,0$ kg/m³，令点 1 在激波上，并且点 1 处的激波角 $\beta_1=52.013°$；$x_2=0.269\,90$ m，$y_2=0.269\,85$ m，$V_2=697.14$ m/s，$\theta_2=29.535°$，$P_2=6.213\,0\times10^5$ N/m²，$\rho_2=3.618\,7$ kg/m³；试求出点 4 的位置和流动参数 V_4，θ_4 和点 4 处激波角 β_4，这里点 4 在激波上。

9. 设空气从 45° 角的斜切平面喷管流出（见图 8.25）。已知喷管宽度为 H=20 mm，OA=10 mm，出口处 M_1=2.0，$P_1=0.775\times10^5$ N/m²，令流动等熵，总密度 $\rho_0=4.96$ kg/m³，外界大气压 $P_a=1.013\times10^5$ N/m²，试求出图 8.25 中各个节点的位置和射流边界点的 V 和 θ 值。

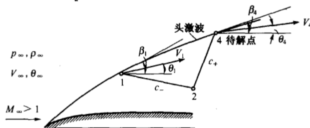


图 8.24 头部激波与尖头物体的超声速绕流

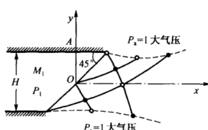


图 8.25 喷管出口的自由边界

10. 如图 8.26 所示，物体的顶部是尖的，其外形由三部分组成：① OA 段为直线，其斜率为 $\tan\delta_a$（这里 δ_a 为半顶角）。② AB 段为过渡段，它服从 $y=a+bx+cx^2$，即 $y/y_e=-0.008\,3+0.609\,4\left(\dfrac{x}{y_e}\right)-0.092\,6\left(\dfrac{x}{y_e}\right)^2$，并且 $x_e/y_e=3.291$，这里 x_e 与 y_e 为 E 点的 x 与 y 坐标。③ BE 段为直线并且平行于 x 轴。另外，$x_a/y_e=0.173$，这里 x_a 为 A 点的 x 坐标。试用 FORTRAN 语言或 C 语言编制附体激波生成程序以及附体激波与物面之间区域（如图 8.27 所示）的特征线生成源程序（提示：曲线激波的自动伸展过程可参考本书第 2 章 § 2.7 节进行），并完成本算例的特征线计算（计算时取 $M_\infty=3.0$, 比热比 $\gamma=1.4$，并且假定是定常、无粘、二维流动）。



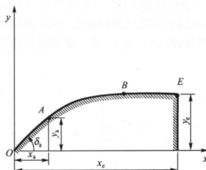


图 8.26　尖头物体的外形线

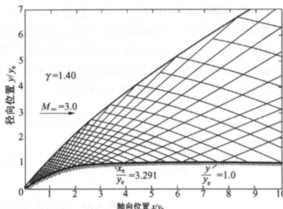


图 8.27　尖头物体超声速无粘绕流的特征线计算

11. GAMM 前台阶超声速绕流，是国际上考核数值格式捕捉激波能力的著名算例。图 8.28 给出了前台阶算例的形状：管道长为 3，宽为 1，台阶相距管道左端为 0.6，台高为 0.2；初始时刻管内充满着理想气体，$\gamma=1.4$，密度 $\rho=1.4$，压强 $P=1.0$（这里给出的均为量纲为 1 的值），气流沿 x 方向以马赫数 $M_\infty=3.0$ 的速度由左往右流入台阶风洞管道的入口，于是在管道内将产生一个比较复杂的流场：台阶前有脱体弓形激波，强度相当大，这里给出文献[47]采用非结构网格 Delaunay 三角形剖分[48]和 Roe 矢通量差分分裂格式相结合求解 Euler 方程组，所得到的某一时刻（这里取 $t=4.0$）的计算结果，如图 8.29 所示。从图上可清晰的看出，脱体激波、反射激波、滑移线以及声速线等。试用 FORTRAN 语言或 C 语言编制源程序完成采用空间推进法计算二维、定常、无粘、进口来流以 $M_\infty=3.0$ 作超声速流动时的流场，并与图 8.29 作比较。结合这一算例，试谈一下为什么要用高分辨率格式才能有效的提高捕捉激波间断面的能力？并请思考：本算例采用时间推进法求解与采取空间推进法求解时两个解法的本质区别？两种算法所计算出的流场是否能够反映物理流动的本质？

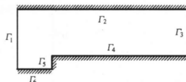
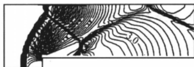
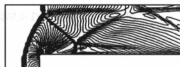


图 8.28　前台阶二维风洞



(a)



(b)

图 8.29　前台阶绕流的等压力线与等马赫线分布

12. 超声速粘性气体绕过平面尖锥物体，如图 8.30 所示。已知来流马赫数 $M_\infty = 2.0$，雷诺数 $R_e = 1.85\times10^5$（以锥的柱体半径 r_0 为特征长度），半锥角 $\theta_c = 10°$，裙倾角 $\theta_f = 7°$，$l_{cn} = 4.0$, $l_{cy} = 10.0$, $l_{cf} = 4.0$（这里全部为量纲为 1 量），试用空间推进求解定常 PNS 方程的办法确定物面压力分布曲线以及激波外形（要求用 FORTRAN 语言或 C 语言编制源程序完成本算例），并与图 8.31 及图 8.32 作比较。

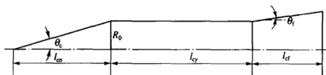


图 8.30　平面尖锥柱裙物体外形

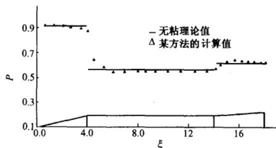


图 8.31　绕平面尖锥柱裙物体的压力分布曲线（$M_\infty = 2.0$, $Re = 1.85\times10^5$）

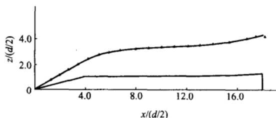


图 8.32　平面尖锥柱裙物体的激波外形（$M_\infty = 2.0$, $Re = 1.85\times10^5$）

第 9 章　高超声速流动

高超声速（Hypersonic）这一名词是钱学森先生在文献[1]中提出的。高超声速空气动力学是研究气体与高超声速飞行器相对运动时产生的力、热和其他物理现象的科学，是一门新兴分支学科。高超声速飞行器既包括穿越大气层的发射、上升段，在大气层外飞行的轨道飞行段以及再入大气层的返回段（这些航天飞行器（Space Vehicle）如卫星、飞船、航天飞机和空天飞机以及弹道式导弹等），也包括在大气层内以高超声速飞行的飞机和导弹。事实上，高超声速飞行器在它飞行的全过程中，要遇到各种速度范围，包括从亚声速、跨声速、超声速到高超声速范围内的气体动力学问题以及稀薄气体动力学问题，但本章主要讨论在高超声速范围内的气动问题。在高超声速流动的范围内，本章主要介绍三方面的内容：① 高超声速无粘流动。② 高超声速粘性流动。③ 高超声速与高温流动时的气动热力学问题。

§9.1　高超声速流动的特征

高超声速空气动力学的兴起是与火箭、导弹、卫星、载人飞船、航天飞机的发展密切相关的。半个世纪以来，在航天事业的推动下，高超声速空气动力学的理论和实验技术得到了迅速发展。所谓高超声速流是指速度远大于声速的流动，通常用自由来流马赫数 M_∞ 大于 5 作为高超声速流的一种标志，但这种 M_∞ 的界限不是很绝对的，流动是否是高超声速流还与飞行器的具体形状有关，例如对于钝体，当 $M_\infty > 3$ 时就开始出现高超声速流的特征，而对细长体，M_∞ 要高达 10 时才会出现这些特征。事实上，正如文献[2]指出的要给高超声速下一个简明而准确的定义较为困难，因此研究高超声速流动所具有的特征更显得重要[3, 4]。下面分五个方面介绍高超声速流动的主要特征。

一、薄激波层（Thin shock layer）和激波前后小密度比

根据斜激波理论（见本书第 2 章），在气流偏转角给定的情况下，激波波后的密度增量是随来流马赫数的增加而迅速增大的。由质量守恒定律可知，波后气体密度越高，所需面积越小。这意味着在高超声速流动中，激波与物面之间的距离很小。通常将激波与物面之间的流场定义为激波层[5~19]。高超声速绕物体流动的基本特征之一是激波层很薄。例如，马赫数 $M_\infty = 36$ 绕半楔角为 15° 的高超声速流动，假定气体的比热比 $\gamma = 1.4$，则按照完全气体的斜激波理论可得到这时激波倾角仅为 18°，如图 9.1 所示。如果计及高温化学反应的影响，则激波角将更小。另外，对于高超声速流动，激波前后密度之比是个小量，例如“阿波罗”（Apollo）飞船再入大气飞行时真实气体的密度比约为 1/20。

二、存在着熵层（Entropy layer），在这个区域内熵的梯度很大



图 9.1　高超声速薄激波层

高超声速飞行器都做成钝头体，这是因为头部驻点处的对流传热与头部曲率半径的平方根成反比，将头部钝化可以减轻头部的热载荷。在高马赫数下，钝头上的激波层很薄，而且脱体激波离头部的距离 d（如图 9.2 所示）亦很小。我们知道气体通过激波后引起熵增，激波越强，熵增越大。在头部区域，激波强烈弯曲。在流动的中心线附近，弯曲激波几乎与流线垂直，因此中心线附近的熵增较大。距流动中心线较远处，激波较弱，相应的熵增也较小。也就是说，穿过弯曲激波不同位置的流线经历了不同的熵增，于是具有熵梯度很大的气体层将覆盖在物体的表面上构成熵层，并伸展到头部下游的一个相当大的区域。由可压缩流的 Crocco（克罗柯）定理：对于均能流动，有

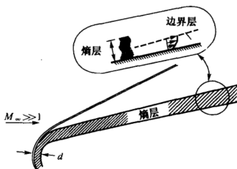


图 9.2　高超声速熵层

$$V\times(\nabla\times V)=-T\nabla S \tag{9-1-1}$$

上式表明熵的梯度是与旋度联系在一起，也就是说强熵梯度的熵层是与强旋度联系在一起，即熵层为强旋涡区，有时又把熵层影响称为“涡干扰”。显然，熵层的存在给物面边界层的计算带来困难。熵层处在激波层的内层，它和边界层是两个不同的概念，它是一层低密度、高熵、大的熵梯度、强旋涡的气体。熵层的存在是高超声速流动的又一个重要特征。

三、粘性的干扰强、边界层厚度与激波层相比不能省略

可以证明：在高超声速条件下，层流边界层厚度 δ 与自由流马赫数 M_∞ 及雷诺数 $Re_{\infty x}$ 间的关系可简化为

$$\frac{\delta}{x}\propto\frac{M_\infty^2}{\sqrt{Re_{\infty x}}} \tag{9-1-2}$$

这里符号 $\propto$ 表示比例关系。上述关系式可借助于高超声速平板边界层的流动予以定性说明：高超声速流动具有很大的动能，在边界层内，粘性效应使流速变慢时损失的动能部分转变为气体的内能，并且导致了边界层内温度的升高，图 9.3 给出了典型的温度分布剖面。



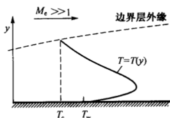


图 9.3 高超声速边界层内的温度剖面

这种温度升高控制了高超声速边界层的特征，例如随着温度的升高气体的粘性系数增大，密度减小边界层变厚，所以在高超声速流动下，边界层变厚的现象应当予以重视。边界层的变厚对外部无粘流产生影响，外部无粘流的变化又反过来影响边界层的增长，于是出现了高超声速外部无粘流动与边界层粘性之间的相互作用，这种作用常称为粘性干扰。而这种粘性干扰对物面压力分布有重要影响，尤其是对高超声速飞行器的升力、阻力和稳定性造成重要的影响；另外，粘性干扰还会使物面的摩擦力和传热率增大。在某些情况下，使得边界层的厚度变得与激波层的厚度相当。显然在这种情况下，激波层中的粘性作用不容忽视。

四、高温激波层内存在着高温效应

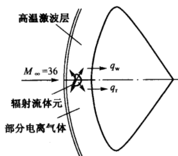


图 9.4 高温激波层

当高超声速气流通过激波压缩或粘性阻滞而导致减速时，极大的粘性耗散使得高超声速边界层内的温度达到非常高的值，它足以激发分子内的振动能并引起边界层内气体的离解，甚至电离。例如 1969 年 7 月 24 日“阿波罗”（Apllo）11 号飞船在完成了人类历史上第一次登月飞行之后重返地球大气层。在其飞行轨道上选取一个给定的空间点作计算，例如取高度为 53 km，马赫数 $M_\infty = 32.5$，在此高度上大气温度为 $T_\infty = 283$ K；如果飞船弓形激波后的温度 T_2 采用比热比 $\gamma = 1.4$ 的完全气体正激波关系式进行计算，这时得到的温度 $T_2 = 58\,128$ K，而考虑到气体的高温效应（即注意到真实气体的效应）之后，按照平衡流作计算得到的 T_2 仅为 11 600 K，显然这个温度与实际情况较为贴近。当然，这个温度还是非常高的。事实上，对于空气来讲当温度低于 800 K 时，要考虑分子的移动和转动自由度的激发[20]；当温度 T 超过 800 K，这时气体分子的振动自由度被激发；当温度达到 2 000 K（在一个大气压下），空气中的氧气开始离解 $(O_2 \to O + O)$；达到 4 000 K 时，氧分子全部离解；在此温度下，氮气开始离解 $(N_2 \to N + N)$；当达到 9 000 K 时，氮分子全部离解；在 9 000 K 以上，出现电离 $(N \to N^+ + e^-, O \to O^+ + e^-)$，气体变成部分电离的等离子体。所有这些现象被通称为高温效应，又称作真实气体效应（Real gas effect）。很显然，这种高温化学反应流动对高超声速飞行器的升力、阻力和力矩均会有重要影响，而且会产生对物面的高传热率。另外，如果激波层的温度足够高，则辐射加热量 q_r 便是一个不容忽视的量。例如 Apollo 飞船再入大气层时，辐射传热占加热率的 30%左右。此外，对于高超声速飞行器，高温流动产生的另一个物理现象是：当飞行器再入大气层期间，在某一个高度和某一速

度下将出现“通讯中断”(Communications blackout),这时飞行器不能向外发射或接收无线电波。这种现象是由于高温气体的电离反应所造成,是电离反应所产生的自由电子吸收了无线电波的缘故,因此精确地预测流场中的电子密度也是一项非常重要的工作。

五、高空、高超声速流动时存在着低密度效应

飞行器在高空进行高超声速飞行时,还会遇到稀薄气体动力学方面的问题。对于稀薄气体动力学来讲 Knudsen(克努森)数 Kn 是一个十分重要的相似参数[21~24]。Kn 定义为

$$Kn=\frac{\lambda}{l} \tag{9-1-3}$$

式中,l 是飞行器的特征长度;λ 是气体分子撞击的平均自由程(mean free path)。

根据气体的稀薄程度,将气体流动分为四种情况:

(1)$Kn<0.03$ 时为连续介质区域,这时 Navier-Stokes 方程,Fourier 热传导关系以及 Fick 质量扩散关系都适用,并且在物面处满足速度无滑移和温度无跳跃的假定。

(2)$0.03<Kn<0.1$ 时为速度滑移和温度跳跃区域。在这个区域内 N-S 方程,Fourier 关系和 Fick 扩散关系仍然适用,但在物面出现了速度滑移(Velocity slip)、温度跳跃(Temperature jump)和热滑移等现象。

(3)$0.1<Kn<10$ 时为过渡(transition)区域,这时气体分子的平均自由程与流动特征长度为同一量级,所以连续介质的假设不再成立,流动要用 Boltzmann 方程描述。

(4)$Kn>10$ 时为自由分子(free molecule)区域,在这个区域中气体分子的平均自由程远大于流动问题的特征长度,所以流动也要用 Boltzmann 方程予以描述。

综上所述,可以将高超声速流动定义为这样的一种流动,在这种流动中除了马赫数的限制之外,上述物理化学现象的全部或者部分变得十分重要。为了说明这个定义,这里不妨给出图 9.5,它总结了相关的一些重要物理现象以及与高超声速飞行之间的密切关系。

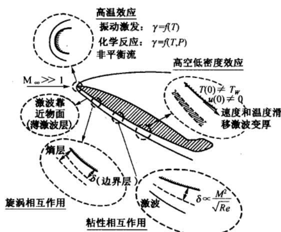


图 9.5 高超声速流动的物理特征



§ 9.2　高超声速流动的斜激波以及膨胀波关系

9.2.1　高超声速流的基本激波关系式

对于量热完全气体，激波间断面条件已由式（2－2－24）给出。今考虑斜激波，有

$$\frac{P_2}{P_1}=1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2\sin^2\beta-1\right) \tag{9-2-1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}{(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta+2} \tag{9-2-2}$$

$$\frac{u_2}{V_1}=1-\frac{2\left(M_1^2\sin^2\beta-1\right)}{(\gamma+1)M_1^2} \tag{9-2-3}$$

$$\frac{v_2}{V_1}=\frac{2\left(M_1^2\sin^2\beta-1\right)}{(\gamma+1)M_1^2}\cot\beta \tag{9-2-4}$$

式中，β 为激波角；γ 为比热比；取 x 轴与 $\boldsymbol{V}_1$ 同方向，y 轴垂直于 $\boldsymbol{V}_1$，并且 $\boldsymbol{V}_1$ 的模为 V_1；$V_{2x}\equiv u_2$ 表示 $\boldsymbol{V}_2$ 在 x 轴上的分量；$V_{2y}\equiv v_2$ 表示 $\boldsymbol{V}_2$ 在 y 轴上的分量。

对于高超声速流，当 $(M_1\sin\beta)^2>>1$，即激波前的法向气流马赫数 $M_{1n}>>1$ 时，则上面的四个式子分别被简化为

$$\frac{P_2}{P_1}\to\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1\sin\beta)^2 \tag{9-2-5}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\to\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{9-2-6}$$

$$\frac{u_2}{V_1}\to 1-\frac{2\sin^2\beta}{\gamma+1} \tag{9-2-7}$$

$$\frac{v_2}{V_1}\to\frac{\sin 2\beta}{\gamma+1} \tag{9-2-8}$$

另外

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{(P_2/P_1)}{(\rho_2/\rho_1)}\to\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}(M_1\sin\beta)^2 \tag{9-2-9}$$

由压力系数定义，可得

$$C_p\equiv\frac{P_2-P_1}{\frac{1}{2}\rho_1V_1^2}=\frac{2}{\gamma M_1^2}\left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)=\frac{4}{\gamma+1}\left(\sin^2\beta-\frac{1}{M_1^2}\right) \tag{9-2-10}$$

当 $(M_1\sin\beta)^2 >> 1$ 时，则

$$C_p \to \frac{4}{\gamma+1}\sin^2\beta \tag{9-2-11}$$

激波后的气流转折角 θ 与来流马赫数 M_1、激波角 β 之间的关系可由激波后的速度三角形来确定

$$\tan\theta = \frac{(v_2/V_1)}{(u_2/V_1)} = \frac{2\left(M_1^2\sin^2\beta-1\right)\cot\beta}{M_1^2(\gamma+\cos2\beta)+2} \tag{9-2-12}$$

图 9.6 平面斜激波的 $\theta-\beta-M_1$ 间关系曲线

图 9.6 给出了平面斜激波的 $\theta-\beta-M_1$ 间的关系曲线。在高超声速条件下，$\theta<<1$，$\beta<<1$，于是 $\sin\beta\approx\beta$，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\beta\approx1$，$\cos\theta\approx1$，$\tan\theta\approx\theta$，因此式（9－2－12）可简化为

$$\theta = \frac{2}{\beta}\left[\frac{M_1^2\beta^2-1}{M_1^2(\gamma+1)+2}\right] \tag{9-2-13}$$

当 $M_1\to\infty$ 时，则式（9－2－13）简化为

$$\frac{\beta}{\theta} \to \frac{\gamma+1}{2} \tag{9-2-14}$$

对于常温的空气，$\gamma=1.4$，则

$$\beta \to 1.2\theta \tag{9-2-15}$$

注意在上述各式中，符号 $\to$ 表示当 M_1 趋近 ∞ 时的逼近值。

9.2.2 高超声速小扰动时的激波关系

对于尖头细长体的高超声速流动，常引进高超声速相似参数 K，其定义为[3]

$$K \equiv M_1\theta \tag{9-2-16}$$

在角 β 较小时，则式（9－2－1），可简化为

$$\frac{P_2}{P_1} = 1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2\beta^2-1\right) \tag{9-2-17}$$

另外，角度较小时式（9－2－12）可简化为式（9－2－13），即

$$(M_1\beta)^2-1 = \left[\frac{M_1^2(\gamma+1)}{2}+1\right]\beta\theta \tag{9-2-18}$$



因为 β 值较小，M_1 值较大，相比之下 $\beta\theta$ 可以从上式省略，于是省略后上式可重新写为如下形式

$$\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2-\frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{\beta}{\theta}\right)-\frac{1}{M_1^2\theta^2}=0 \tag{9-2-19}$$

上式是关于 (β/θ) 的一元二次方程，于是可以得到它的两个根。又考虑到负根无意义，故下式仅取正根，其表达式为

$$\frac{\beta}{\theta}=\frac{\gamma+1}{4}+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2+\frac{1}{(M_1\theta)^2}} \tag{9-2-20}$$

将式（9-2-20）代到式（9-2-19）便得

$$\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2=\frac{\gamma+1}{2}\left[\frac{\gamma+1}{4}+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2+\frac{1}{(M_1\theta)^2}}\right]+\frac{1}{(M_1\theta)^2} \tag{9-2-21}$$

借助于式（9-2-21）与式（9-2-16），则式（9-2-17）变为

$$\frac{P_2}{P_1}=1+\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}K^2+\gamma K^2\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2+\frac{1}{K^2}} \tag{9-2-22}$$

于是由式（9-2-10）便可得到用高超声速相似参数 K 表达的压力系数 C_p 公式

$$C_p=2\theta^2\left[\frac{\gamma+1}{4}+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2+\frac{1}{K^2}}\right] \tag{9-2-23}$$

因此，上式可写为

$$C_p/\theta^2=f(K,\gamma) \tag{9-2-24}$$

这里 $f(K,\gamma)$ 表示它是关于 K 与 γ 的函数。

9.2.3　高超声速流动时的普朗特-迈耶膨胀波

普朗特-迈耶（简记为 P-M）流动的关系式已由式（2-1-21）给出。令气流从马赫数 M_1 膨胀加速到 M_2 时引起的气流方向偏转角为 θ（注意这里 θ 的定义与式（2-1-21）略有不同！），其表达式为

$$\theta=\nu(M_2)-\nu(M_1) \tag{9-2-25}$$

式中

$$\nu(M)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\left(M^2-1\right)\right]-\arctan\left(\sqrt{M^2-1}\right) \tag{9-2-26}$$

对于高超声速流动，式（9-2-26）可简化为

$$v(M)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\left[M\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right]-\arctan M \tag{9-2-27}$$

由三角恒等式

$$\arctan x=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \tag{9-2-28}$$

作级数展开得

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{7x^7}+\cdots \tag{9-2-29}$$

借助于式（9-2-28）与式（9-2-29），则式（9-2-27）变为

$$v(M)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{1}{M}+\cdots\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{M}+\cdots\right) \tag{9-2-30}$$

省略$1/(3M^3)$，$1/(5M^5)$等高阶小量后，上式简化为

$$v(M)=\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right)\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{1}{M}-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{M} \tag{9-2-31}$$

将式（9-2-31）代到式（9-2-25）后便得

$$\theta=\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{1}{M_1}-\frac{1}{M_2}\right) \tag{9-2-32}$$

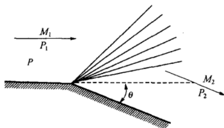


图 9.7 *P-M* 流动时的膨胀波

这里角θ如图 9.7 所示。

另外，由 P 与 M 间的等熵关系可以得到P_2/P_1的表达式为

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{9-2-33}$$

对于高超声速流动，则上式简化为

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \tag{9-2-34}$$

借助于式（9-2-32）与式（9-2-16），则上式可变为

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_1\theta\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}=\left(1-\frac{\gamma-1}{2}K\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \tag{9-2-35}$$



因此由式（9－2－10）又可得到用 K 表达的压力系数 C_p，即

$$C_p=\frac{2\theta^2}{\gamma K^2}\left[\left(1-\frac{\gamma-1}{2}K\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}-1\right] \tag{9-2-36}$$

§ 9.3　高超声速无粘流动分析

9.3.1　高超声速小扰动方程及边界条件

一、高超声速小扰动方程

今以小扰动高超声速平面流动为例，推导高超声速小扰动方程及边界条件。取 x 轴正方向与来流速度矢量 $\boldsymbol{V}_\infty$ 的方向一致，取 y 轴在流动平面内与 x 轴正交。设 u 和 v 分别表示速度 $\boldsymbol{V}$ 沿 x 和 y 方向的分速度，u' 与 v' 分别表示扰动速度沿 x 与 y 的分量。当细长体或薄体在静止空气中作匀速直线高超声速运动或者是均匀的高超声速气流小攻角时流经细长体或薄体，因此流场受到扰动。受到扰动的区域为物体附近的激波层内部，在这个区域内产生扰动速度，气体的其他参数也发生变化。为便于分析该问题，引进量纲为 1 的变量

$$\begin{cases}\bar{x}\equiv\dfrac{x}{l},\ \bar{y}\equiv\dfrac{y}{\tau l},\ \bar{u}'\equiv\dfrac{u'}{\tau^2V_\infty},\ \bar{v}'\equiv\dfrac{v'}{\tau V_\infty}\\[2ex]\bar{P}\equiv\dfrac{P}{\gamma\tau^2P_\infty M_\infty^2},\quad\bar{\rho}\equiv\dfrac{\rho}{\rho_\infty}\end{cases} \tag{9-3-1}$$

式中，l 是参考长度；$\tau\equiv d/l$ 称作细长比；d 为细长体厚度；l 表示长度（如图 9.8 所示）。

对于尖头细长体而言，τ 是一个小量，我们把它作为量级分析的基本参数。在小扰动情况下

$$\theta=O(\tau),\quad\alpha=O(\tau) \tag{9-3-2}$$

式中，θ 表示物面与来流方向之间的夹角；α 为攻角；符号 $O(\cdot)$ 表示量级分析中的量级。

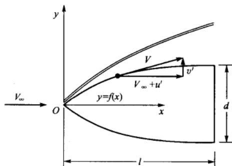


图 9.8　扰动速度示意图

另外可以证明：对于细长体高超声速无粘绕流，在激波层气体物理量的量级与激波处物理量的量级相同。于是有如下关系

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{u'}{V_\infty} = O(\tau^2),\quad \frac{v'}{V_\infty} = O(\tau) \\
\frac{P}{\rho_\infty V_\infty^2} = O(\tau^2),\quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = O(1)
\end{aligned}\right\} \tag{9-3-3}
$$

注意到

$$
\begin{cases} u = V_\infty + u' \\ v = v' \end{cases} \tag{9-3-4}
$$

于是用 u' 与 v' 表达的基本方程组为

$$
\frac{\partial\left[\rho\left(V_\infty + u'\right)\right]}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v'\right)}{\partial y} = 0 \tag{9-3-5}
$$

$$
\rho\left(V_\infty + u'\right)\frac{\partial\left(V_\infty + u'\right)}{\partial x} + \rho v'\frac{\partial\left(V_\infty + u'\right)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \tag{9-3-6}
$$

$$
\rho\left(V_\infty + u'\right)\frac{\partial v'}{\partial x} + \rho v'\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \tag{9-3-7}
$$

$$
\left(V_\infty + u'\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + v'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0 \tag{9-3-8}
$$

考虑到式（9-3-1），则上述基本方程组变为

$$
\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left[\overline{\rho}(1+\tau^2\overline{u}')\right] + \frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}')}{\partial \overline{y}} = 0 \tag{9-3-9}
$$

$$
\overline{\rho}(1+\tau^2\overline{u}')\frac{\partial \overline{u}'}{\partial \overline{x}} + \overline{\rho}\,\overline{v}'\frac{\partial \overline{u}'}{\partial \overline{y}} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{x}} \tag{9-3-10}
$$

$$
\overline{\rho}(1+\tau^2\overline{u}')\frac{\partial \overline{v}'}{\partial \overline{x}} + \overline{\rho}\,\overline{v}'\frac{\partial \overline{v}'}{\partial \overline{y}} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{y}} \tag{9-3-11}
$$

$$
(1+\tau^2\overline{u}')\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}^\gamma}\right) + \overline{v}'\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\left(\frac{\overline{P}}{\overline{\rho}^\gamma}\right) = 0 \tag{9-3-12}
$$

略去 τ^2 项，则上述方程组变为

$$
\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial(\overline{\rho}\,\overline{v}')}{\partial \overline{y}} = 0 \tag{9-3-13}
$$

$$
\overline{\rho}\frac{\partial \overline{u}'}{\partial \overline{x}} + \overline{\rho}\,\overline{v}'\frac{\partial \overline{u}'}{\partial \overline{y}} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{x}} \tag{9-3-14}
$$

$$
\overline{\rho}\frac{\partial \overline{v}'}{\partial \overline{x}} + \overline{\rho}\,\overline{v}'\frac{\partial \overline{v}'}{\partial \overline{y}} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{y}} \tag{9-3-15}
$$



$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^{\gamma}}\right)+\bar{v}'\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^{\gamma}}\right)=0 \tag{9-3-16}$$

显然上述高超声速小扰动方程组仍然是非线性的，它与超声速小扰动理论的重要区别就在于不能线化。事实上，在高超声速流动中，扰动速度相对于来流而言，可以当作小量处理，但扰动速度与来流声速相比，并非小量。

二、物面条件与激波条件

考虑无粘流动时物面边界条件，即

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad 或 \quad un_x+vn_y=0 \tag{9-3-17}$$

将上式用 u' 与 v' 表示便为

$$(V_\infty+u')n_x+v'n_y=0 \tag{9-3-18}$$

式中，n_x 与 n_y 表示在 (x,y) 空间中物面法矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦。

注意到式（9－3－1），则式（9－3－18）变为

$$(1+\tau^2\,\bar{u}')n_x+\bar{v}'\tau n_y=0 \tag{9-3-19}$$

令物面法矢量在 $(\bar{x},\bar{y})$ 空间中的方向余弦为 $\bar{n}_x$ 与 $\bar{n}_y$，容易证明有

$$n_x=\tau\bar{n}_x, \qquad n_y=\bar{n}_y \tag{9-3-20}$$

借助于式（9－3－20），则式（9－3－18）变为

$$(1+\tau^2\,\bar{u}')\,\bar{n}_x+\bar{v}'\bar{n}_y=0 \tag{9-3-21}$$

略去 τ^2 项后上式变为

$$\bar{n}_x+\bar{v}'\bar{n}_y=0 \tag{9-3-22}$$

考虑斜激波条件，由式（9－2－2）可得

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty}=\bar{\rho}_2=\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\left[\frac{M_\infty^2\sin^2\beta}{M_\infty^2\sin^2\beta+2/(\gamma-1)}\right] \tag{9-3-23}$$

注意这里将激波前参数取为来流参数值。对于细长体高超声速绕流，β 是小量，因此有

$$\sin\beta\approx\beta\approx\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_S=\tau\left(\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)_S \tag{9-3-24}$$

式中，下标 S 表示激波处的量。借助于式（9－3－24），则式（9－3－23）可变为

$$\bar{\rho}_2=\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{(\mathrm{d}\bar{y}/\mathrm{d}\bar{x})_S^2}{(\mathrm{d}\bar{y}/\mathrm{d}\bar{x})_S^2+\dfrac{2}{(\gamma-1)\tau^2M_\infty^2}} \tag{9-3-25}$$

由式（9－2－1）可得

$$\frac{P_2}{P_\infty}=1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_\infty^2\sin^2\beta-1\right) \tag{9-3-26}$$

这里取激波前参数为来流参数值。仿照式（9－3－25）的推导过程，则式（9－3－26）可变为

$$\bar{P}_2=\frac{2}{\gamma+1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)_s^2+\frac{1-\gamma}{2\gamma\tau^2M_\infty^2}\right] \tag{9-3-27}$$

类似地，方程式（9－2－3）与式（9－2－4）可分别变为

$$\bar{u}_2'=-\frac{2}{\gamma+1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)_s^2-\frac{1}{\tau^2M_\infty^2}\right] \tag{9-3-28}$$

$$\bar{v}_2'=\frac{2}{\gamma+1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)_s^2-\frac{1}{\tau^2M_\infty^2}\right]\frac{1}{(\mathrm{d}\bar{y}/\mathrm{d}\bar{x})_s} \tag{9-3-29}$$

考虑来流条件

$$\bar{u}'=0,\ \bar{v}'=0,\ \bar{P}=\frac{1}{\gamma\tau^2M_\infty^2},\ \bar{\rho}=1 \tag{9-3-30}$$

3. 高超声速相似律

设来流速度矢量V_∞与Ox轴平行，Oxy为直角坐标系；设Ox_1为尖头细长体对称轴线，Ox_1y_1为直角坐标系，角α为攻角（如图 9.9 所示）。于是(x,y)与(x_1,y_1)间的变换关系为

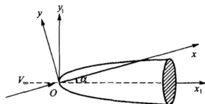


图 9.9　尖头细长体的小攻角绕流

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} \tag{9-3-31}$$

考虑到角α为小量，故上式又可近似为

$$\begin{cases}x\approx x_1+\alpha y_1\approx x_1\\y\approx-\alpha x_1+y_1\end{cases} \tag{9-3-32}$$

引进量纲为 1 的量$\bar{\alpha}$，其定义为

$$\bar{\alpha}\equiv\frac{\alpha}{\tau} \tag{9-3-33}$$

令细长体物面在$(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$坐标系的方程是

$$\bar{y}_1=f_1(\bar{x}_1),\quad \bar{x}_1\equiv\frac{x_1}{l},\quad \bar{y}_1=\frac{y_1}{\tau l} \tag{9-3-34}$$

于是在(x,y)坐标系中，物面方程为

$$y=y_1-\alpha x_1=\tau lf_1(\bar{x}_1)-\alpha x_1\quad 或者\quad \bar{y}=f_1(\bar{x}_1)-\frac{\alpha}{\tau}\bar{x}_1 \tag{9-3-35}$$

注意到物面上$x\approx x_1$，于是上式可变为

$$\bar{y}=f_1(\bar{x})-\frac{\alpha}{\tau}\bar{x}\quad 或者\quad \bar{y}=f_b\left(\bar{x},\frac{\alpha}{\tau}\right)\equiv f_b(\bar{x},\bar{\alpha}) \tag{9-3-36}$$



式（9－3－36）表明：细长比为τ，攻角为α的物体，其物面方程除了含有$\bar{x}$之外，还与α/τ有关。引进高超声速参数K，其定义为

$$K \equiv \tau M_\infty \tag{9-3-37}$$

现在分析细长体高超声速绕流的基本方程式（9－3－13）～式（9－3－16）和边界条件式（9－3－17）、式（9－3－25）、式（9－3－27）～式（9－3－30）以及物面方程式（9－3－36）。显然，对于两个几何仿射相似的尖头细长体，只要γ,K与$\bar{\alpha}$相同，则这两个仿射相似尖头细长体的绕流情况就相同。这就是高超声速相似律，并且将γ,K与$\bar{\alpha}$称作高超声速相似参数。

9.3.2　马赫数无关原理

高超声速流动有一个重要的性质，即当来流马赫数高过某个范围以后，物体绕流的解便趋于极限解，也就是说这时的流场与来流马赫数的变化无关。这一原理叫马赫数无关原理，它对于任意物体的高超声速绕流都成立，它既适用于无粘的完全气体，也适用于计入高温效应（又称真实气体效应）和粘性效应的气体。这个定理首先由奥斯瓦梯许（Oswatitsch，1951年）提出，海斯（Hayes，1959 年）等人[5]把它推广到包含真实气体效应和边界层流动的情况。事实上，高超声速气流流过厚物体或钝头体时，常在头部形成脱体激波；马赫数增加到一定程度后，脱体激波的形状变化不大；当来流马赫数很大时，高超声速流场的某些特性趋向于与马赫数的变化无关。现在，我们仅以无粘、定常、平面流动为例来说明这一原理。首先定义无量纲量

$$\left.\begin{aligned}
&x_* = \frac{x}{l},\ y_* = \frac{y}{l},\ u_* = \frac{u}{V_\infty}\\
&v_* = \frac{v}{V_\infty},\ P_* = \frac{P}{\rho_\infty V_\infty^2},\ \rho_* = \frac{\rho}{\rho_\infty}
\end{aligned}\right\} \tag{9-3-38}$$

式中，l为物体特征长度；ρ_∞与V_∞分别为来流的密度与速度。

借助于式（9－3－38）则基本方程组式（9－3－5）～式（9－3－8）变成量纲为 1 后为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho_* u_*)}{\partial x_*} + \frac{\partial(\rho_* v_*)}{\partial y_*} = 0\\
&\rho_* u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \rho_* v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} = -\frac{\partial P_*}{\partial x_*}\\
&\rho_* u_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + \rho_* v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = -\frac{\partial P_*}{\partial y_*}\\
&u_* \frac{\partial}{\partial x_*}\left(\frac{P_*}{\rho_*^\gamma}\right) + v_* \frac{\partial}{\partial y_*}\left(\frac{P_*}{\rho_*^\gamma}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9-3-39}$$

物面条件式（9－3－17）变为



$$u_* n_x + v_* n_y = 0 \tag{9-3-40}$$

斜激波关系式（9-2-1）～式（9-2-4）分别变为

$$(P_*)_2 = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{M_\infty^2 \sin^2\beta - 1}{M_\infty^2}\right) \tag{9-3-41}$$

$$(\rho_*)_2 = \frac{(\gamma+1)M_\infty^2 \sin^2\beta}{(\gamma-1)M_\infty^2 \sin^2\beta + 2} \tag{9-3-42}$$

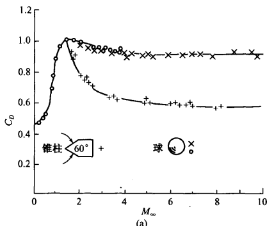
$$(u_*)_2 = 1 - \frac{2\left(M_\infty^2 \sin^2\beta - 1\right)}{(\gamma+1)M_\infty^2} \tag{9-3-43}$$

$$(v_*)_2 = \frac{2\left(M_\infty^2 \sin^2\beta - 1\right)\cot\beta}{(\gamma+1)M_\infty^2} \tag{9-3-44}$$

上述四个表达式为量纲为1的激波边界条件。显然，当 $M_\infty^2 \sin^2\beta \to \infty$ 时，则激波边界条件变为

$$\left.\begin{aligned} &(P_*)_2 \to \frac{2\sin^2\beta}{\gamma+1},\ (u_*)_2 \to 1 - \frac{2\sin^2\beta}{\gamma+1} \\ &(\rho_*)_2 \to \frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ (v_*)_2 \to \frac{\sin^2\beta}{\gamma+1} \end{aligned}\right\} \tag{9-3-45}$$

分析量纲为 1 的基本方程组式（9-3-39）、物面边界条件式（9-3-40）以及激波边界条件式（9-3-41）～式（9-3-44），在这些方程中马赫数 M_∞ 仅出现在激波边界条件中。而在 $M_\infty \to \infty$ 时，式（9-3-45）中并不出现 M_∞；于是可得出结论：在马赫数 M_∞ 较高时，量纲为 1 的方程的解与来流马赫数无关。这里还需强调的是：这里所讲的与来流马赫数无关是针对一些量纲为1的量而言，对于有量纲量并不一定如此。图 9.10（a）给出了马赫数无关原



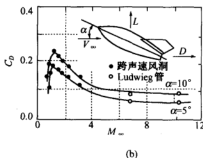


图 9.10 高超声速马赫数无关原理的例证与应用



理的例证[9]。由图中可以看出，当 M_∞ 超过 5 时阻力系数对马赫数的变化不再敏感。图 9.10（b）给出了马赫数无关原理在粘性流动与大攻角细长体绕流方面应用的例证[17]。很显然，利用马赫数无关原理，人们可以把较低马赫数的实验结果推广到较高马赫数的情况使用。

9.3.3 高超声速流的等价原理

取 x 轴的正方向与来流速度矢量 $\boldsymbol{V}_\infty$ 的方向一致，引进式（9-3-1）所定义的量纲为 1 量并补充定义

$$\bar{z} \equiv \frac{z}{\tau l}, \qquad \bar{w}' \equiv \frac{w'}{\tau V_\infty}, \tag{9-3-46}$$

式中，τ 为细长比；l 为参考长度。

仿照式（9-3-13）～式（9-3-16）的推导过程，可以十分方便地得出三维定常高超声速小扰动基本方程组为

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{v}')}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{w}')}{\partial\bar{z}}=0 \tag{9-3-47}$$

$$\left[\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial\bar{x}},\ \bar{\rho}\,\bar{v}'\frac{\partial}{\partial\bar{y}},\bar{\rho}\,\bar{w}'\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right]\begin{bmatrix}\bar{v}' & \bar{w}'\\ \bar{v}' & \bar{w}'\\ \bar{v}' & \bar{w}'\end{bmatrix}=-\left[\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{y}},\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{z}}\right] \tag{9-3-48}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^{\gamma}}\right)+\bar{v}'\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^{\gamma}}\right)+\bar{w}'\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^{\gamma}}\right)=0 \tag{9-3-49}$$

$$\bar{\rho}\frac{\partial\bar{u}'}{\partial\bar{x}}+\bar{\rho}\,\bar{v}'\frac{\partial\bar{u}'}{\partial\bar{y}}+\bar{\rho}\,\bar{w}'\frac{\partial\bar{u}'}{\partial\bar{z}}=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}} \tag{9-3-50}$$

在式（9-3-48）中，分别含有沿 y 方向与 z 方向的动量方程。值得注意的是，$\bar{u}'$ 只在 x 方向的动量方程式（9-3-50）中出现，因此可以由式（9-3-47）、式（9-3-48）以及式（9-3-49）所构成的方程组得到 $\bar{P}$, $\bar{\rho}$, $\bar{v}'$ 与 $\bar{w}'$ 值，然后再由下式求出 $\bar{u}'$ 值，即

$$\bar{u}'=\frac{1}{(\gamma-1)\tau^2M_\infty^2}-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}-\frac{1}{2}\left[(\bar{v}')^2+(\bar{w}')^2\right] \tag{9-3-51}$$

这里式（9-3-51）是由总焓守恒方程出发，省略了 $\tau^2(\bar{u}')^2$ 项后得出的。今考察横向平面上的非定常二维欧拉方程，即



$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0\\ \rho\dfrac{\partial v}{\partial t}+\rho v\dfrac{\partial v}{\partial y}+\rho w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{\partial P}{\partial y}\\ \rho\dfrac{\partial w}{\partial t}+\rho v\dfrac{\partial w}{\partial y}+\rho w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{\partial P}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{P}{\rho^{\gamma}}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{P}{\rho^{\gamma}}\right)+w\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{P}{\rho^{\gamma}}\right)=0\end{cases}\tag{9-3-52}$$

引进如下量纲为1的量

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\rho}\equiv\frac{\rho}{\rho_\infty},\ \tilde{v}\equiv\frac{v}{V_\infty},\ \tilde{w}\equiv\frac{w}{V_\infty},\ \tilde{P}\equiv\frac{P}{\rho_\infty V_\infty^2}\\&\tilde{t}\equiv\frac{t}{(l/V_\infty)},\ \tilde{y}\equiv\frac{y}{l},\ \tilde{z}\equiv\frac{z}{l}\end{aligned}\right\}\tag{9-3-53}$$

借助于式（9-3-53），则式（9-3-52）中的第一个方程可变为

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial(\tilde{\rho}\,\tilde{v})}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial(\tilde{\rho}\,\tilde{w})}{\partial\tilde{z}}=0\tag{9-3-54}$$

将它与三维高超声速小扰动方程组的式（9-3-47）对照，很显然如果假定

$$\tilde{x}=\frac{x}{l}=\tilde{t}=\frac{tV_\infty}{l}\qquad(9-3-55)^*$$

也就是说令

$$x=V_\infty t\tag{9-3-55}$$

则方程式（9-3-54）与式（9-3-47）具有相同的表达形式。因此，如果令式（9-3-55）成立，则方程组式（9-3-47）～式（9-3-49）与方程组式（9-3-52）等价。至此，高超声速流的等价原理可叙述如下：绕细长体的定常三维高超声速流等价于二维固定平面上的非定常运动。现在对等价原理作如下物理说明：如图 9.11 所示，我们将固定平面取在 $x=0$ 处并且垂直于 x 轴。今有一高超声速物体

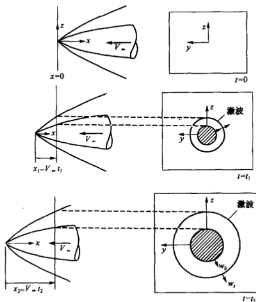


图 9.11 高超声速流的等价原理



以速度 V_∞ 穿过该平面。图中分别给出了三个时刻下高超声速物体以及它所产生的激波在 $y-z$ 平面上的截线。这就是高超声速等价原理的简要物理说明。显然，等价原理的重要作用是借助于这个原理由已知的非定常二维流场的解去获取未知的三维定常高超声速绕流的流场特性。

9.3.4 高超声速无粘流数值计算简介

对于高超声速无粘绝热流动，可由基本方程组式（1-4-39）～式（1-4-41）简化得到，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=0\\&\frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{VV}+P\boldsymbol{I})=\rho \boldsymbol{f}\\&\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t}+\nabla\cdot\left[(\rho e_t+P)\boldsymbol{V}\right]=\rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}\end{aligned}\right\} \tag{9-3-56}$$

式中，$\boldsymbol{VV}$ 为并矢张量；$\boldsymbol{I}$ 为单位张量；e_t 为单位质量气体具有的广义内能（又称总能），即

$$e_t=e+V^2/2 \tag{9-3-57}$$

为了减少头部产生的热流，高超声速飞行器一般采用钝的形状，如图 9.12 所示。图 9.12

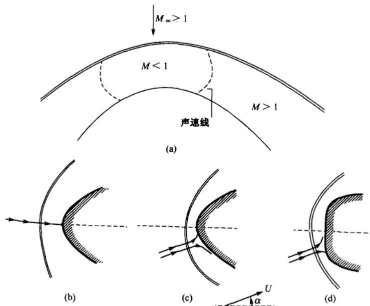


图 9.12 钝体绕流

(a) 给出了钝体激波层；图 9.12 (b) 给出了零攻角气流时的滞止点（又称驻点）；图 9.12 (c) 与 (d) 是有攻角时的流动，显然这时驻点的位置是未知的，是要通过流场求解而决定的。求解高超声速钝体绕流曾经是高超声速空气动力学发展过程中的一个难题[3, 15]，尤其是 20 世纪 60 年代人们一直探讨用定常的欧拉方程去求解钝体绕流，结果遇到了困难。1966 年 Moretti 和 Abbett（莫利蒂和阿比特）提出了用时间相关法求解钝体绕流而使问题得以成功的解决[25]。目前，已有许多求解钝体无粘绕流的优秀数值格式，本节因篇幅所限故不作详述，这里仅介绍一下发展趋势，总的趋势有三点：① 提高捕捉激波的分辨率，发展高分辨率格式。② 发展快速高效求解方法，发展高效率差分格式。③ 发展非结构网格，使网格点布局更合理。图 9.13 (a) 与 (b) 给出了结构网格下钝体绕流的网格布局，显然，采用非结构网格后布点将会变得更合理些（如图 9.13 (c) 所示）。

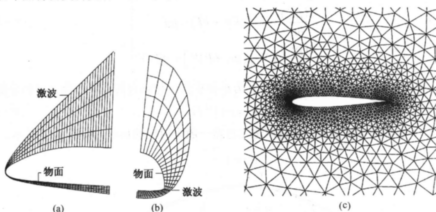


图 9.13　结构网格与非结构网格

§ 9.4　高超声速粘性流动分析

9.4.1　驻点的层流边界层方程及热流计算

完全气体粘性流动的 N－S 方程组已由式（1－4－45）给出，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial y}+\frac{\partial(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v)}{\partial z}=0 \tag{9-4-1}$$

式中

$$\boldsymbol{U}\equiv[\rho,\rho V_1,\rho V_2,\rho V_3,\varepsilon]^{\mathrm{T}} \tag{9-4-2}$$

速度矢量 $\boldsymbol{V}\equiv \boldsymbol{i}V_1+\boldsymbol{j}V_2+\boldsymbol{k}V_3$； $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ 分别为沿 x,y,z 方向的无粘矢通量； $\boldsymbol{E}_v,\boldsymbol{F}_v$ 与 $\boldsymbol{G}_v$ 分别代



表 x,y 与 z 方向由于粘性及热传导所引起的矢通量项，其表达式为

$$[\boldsymbol{E}_v,\boldsymbol{F}_v,\boldsymbol{G}_v]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix} \tag{9-4-3}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & k\partial T/\partial x\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} & k\partial T/\partial y\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} & k\partial T/\partial z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\\ 1\end{bmatrix} \tag{9-4-4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right),\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}+\frac{\partial V_2}{\partial z}\right),\\ &\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}+\frac{\partial V_3}{\partial x}\right),\ \tau_{xx}=\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+2\mu\frac{\partial V_1}{\partial x},\\ &\tau_{yy}=\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+2\mu\frac{\partial V_2}{\partial y},\ \tau_{zz}=\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+2\mu\frac{\partial V_3}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{9-4-5}$$

如果引进边界层理论的两个基本假设：

（1）边界层厚度 δ 与物体的特征尺度 l 相比为很小量，即

$$\delta \ll l \tag{9-4-6}$$

（2）假设雷诺数很大，大到足以使 $\frac{1}{Re_\infty}$ 与 $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ 同一量级，也就说有

$$\frac{1}{Re_\infty}=O\left[\left(\frac{\delta}{l}\right)^2\right] \tag{9-4-7}$$

在上述两个假设下，对 N－S 方程组式（9－4－1）进行量级分析后可以得到边界层方程。为便于叙述下面以二维平面流动为例，并且选取边界层坐标系，取 x 轴沿物面，y 轴与物面垂直，其边界层方程组的表达式为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{9-4-8}$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{9-4-9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{9-4-10}$$

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+u\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}x}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{9-4-11}$$

式中，h 为静焓；u 与 v 分别为沿 x 与 y 方向的分速度；下标 e 表示边界层外缘处的参数。

正如本书第 5 章在讨论边界层问题时所指出的，不同的 x 处边界层的速度剖面通常是不同的，例如 $u(x_1,y)\neq u(x_2,y)$，但在某些情况下通过适当的变换，例如由 (x,y) 坐标系变到 (ξ,η) 坐标系后能够使得不同的 ξ 处具有相同的速度剖面，即 $u(\xi_1,\eta)=u(\xi_2,\eta)$，如图 9.14 所示。那么具有这种性质的边界层便称为自相似边界层，该问题的解称为相似解。其具体做法如下：先引进李斯–德罗尼津（Lees–Дородицын）变换

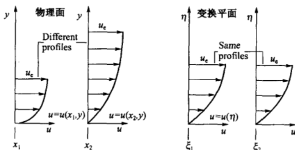


图 9.14 边界层自相似解

$$\xi=\int_0^x\rho_e u_e\mu_e\mathrm{d}x \qquad \eta=\frac{u_e}{\sqrt{2\xi}}\int_0^y\rho\mathrm{d}y \tag{9-4-12}$$

式中，ρ_e、u_e 与 μ_e 分别为边界层外缘的密度、速度与粘性系数，它们仅是 x 的函数，所以有 $\xi=\xi(x)$；而 $\eta=\eta(x,y)$，于是微分算子的变换是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\left(\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)\dfrac{\partial}{\partial\eta}=\rho_e u_e\mu_e\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)\dfrac{\partial}{\partial\eta}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\rho u_e}{\sqrt{2\xi}}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\end{cases} \tag{9-4-13}$$

引进流函数 ψ，其满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\rho u, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\rho v \tag{9-4-14}$$

引进函数 $f(\xi,\eta)$ 与 $g(\xi,\eta)$，有

$$\frac{u}{u_e}=\frac{\partial f}{\partial\eta}\equiv f' \tag{9-4-15}$$

$$g(\xi,\eta)=g=\frac{h}{h_e} \tag{9-4-16}$$

式中，上标一撇表示对 η 求偏导；h 代表静焓；h_e 表示边界层外缘处的静焓值。

因此很容易建立起 ψ 与 f 间的联系，其关系式为



$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}=f'\sqrt{2\xi} \tag{9-4-17}$$

将上式对η积分，得

$$\psi(\xi,\eta)=f\sqrt{2\xi}+f_1(\xi) \tag{9-4-18}$$

这里 $f_1(\xi)$ 是 ξ 的任意函数。对于没有质量交换的物面，当然应有 $\psi(\xi,0)=0$；为了满足这个条件，则式（9-4-18）中的函数 f 和 f_1 在物面上的值必须分别为零，于是推知

$$\psi(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)\sqrt{2\xi} \tag{9-4-19}$$

由此得到

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi}=\sqrt{2\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{1}{\sqrt{2\xi}}f \tag{9-4-20}$$

将式（9-4-15）、式（9-4-17）与式（9-4-20）代入到式（9-4-9），并注意边界层外缘的如下关系式

$$\mathrm{d}P_e=-\rho_e u_e \mathrm{d}u_e \tag{9-4-21}$$

于是 x 方向的动量方程变为

$$(Cf'')'+ff''=\frac{2\xi}{u_e}\left(\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}\xi}\right)\left[(f')^2-\frac{\rho_e}{\rho}\right]+2\xi\left(f'\frac{\partial f'}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \xi}f''\right) \tag{9-4-22}$$

式中，$C\equiv\rho\mu/(\rho_e\mu_e)$。

y 方向的动量方程变为

$$\partial P/\partial \eta=0 \tag{9-4-23}$$

能量方程式（9-4-11）变为

$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right)'+fg'=2\xi\left[f'\frac{\partial g}{\partial \xi}-g'\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\rho_e u_e}{\rho h_e}f'\frac{du_e}{d\xi}\right]-C\frac{u_e^2}{h_e}(f'')^2 \tag{9-4-24}$$

式中，$Pr\equiv\mu C_p/k$，C 的定义同式（9-4-22）。

变换后的边界条件为：

在壁面 $(\eta=0)$ 处：　$f=0,\ f'=0,\ g=g_w$（给定壁温）或 $g'=0$（绝热壁）　(9-4-25)

在边界层外缘 $(\eta\to\infty)$ 处：　$f'=1,\ \ g=1$　(9-4-26)

高超声速飞行器的表面摩擦系数和气动热的计算具有着非常重要的意义[26]，下面就讨论这方面的计算问题。由表面摩擦系数 C_f 的定义

$$C_f\equiv\frac{\tau_W}{\rho_e u_e^2/2} \tag{9-4-27}$$

$$\tau_W = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_W \tag{9-4-28}$$

式中，下标W表示壁面；下标e表示边界层外缘。

借助于式（9－4－13）与式（9－4－15），则式（9－4－27）变为

$$C_f = \frac{2\rho_W \mu_W}{\rho_e \sqrt{2\xi}} f''(\xi,0) \tag{9-4-29}$$

引进 Nusselt（努塞尔）数 Nu 与 Stanton（斯坦顿）数 St，其定义为

$$Nu = \frac{q_W x}{K_e (T_{aW} - T_W)} \tag{9-4-30}$$

$$St = \frac{q_W}{\rho_e u_e (h_{aW} - h_W)} \tag{9-4-31}$$

式中，k_e 为边界层外缘处的热传导系数；q_W 是壁面上的当地热流；h_{aW} 是绝热壁的焓值；h_W 为壁面静焓。

显然

$$Nu \equiv \frac{q_W x}{k_e (T_{aW} - T_W)} = \left[\frac{q_W}{\rho_e u_e C_P (T_{aW} - T_W)}\right]\left[\frac{\rho_e u_e x}{\mu_e}\right]\left[\frac{\mu_e C_P}{k_e}\right] = StRePr \tag{9-4-32}$$

式中

$$q_W = \left[k \frac{\partial T}{\partial y}\right]_W \tag{9-4-33}$$

借助于式（9－4－13）、式（9－4－33）和式（9－4－16），则式（9－4－31）变为

$$St = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \frac{k_W}{C_{PW}} \frac{\rho_W}{\rho_e} \frac{h_e}{(h_{aW} - h_W)} g'(\xi,0) \tag{9-4-34}$$

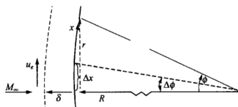


图 9.15　驻点区域的几何参数

现在来考虑图 9.15 所示的柱体，在驻点的曲率半径是 R，边界层厚度为 δ，并假设 f 与 g 只是 η 的函数，因此这时

$$\frac{\partial f'}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \tag{9-4-35}$$

所以式（9－4－22）与式（9－4－24）被分别简化为

$$(Cf'')' + ff'' = \frac{2\xi}{u_e}\left[(f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho}\right]\frac{du_e}{d\xi} \tag{9-4-36}$$



$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right)' + fg' = 2\xi\left(\frac{\rho_e u_e}{\rho h_e}f'\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}\xi}\right) - C\frac{u_e^2}{h_e}(f'')^2 \qquad (9-4-37)$$

注意，上述两个方程仍然与 ξ 有关。但对于驻点，还可以有下列关系

① 在驻点附近 u_e 很小，而 $h_e = H$ 是很大的焓值（这里 H 为总焓），因此

$$\frac{u_e^2}{h_e} \approx 0 \qquad (9-4-38)$$

② 驻点区域内气流速度很低，在驻点区域可以证明下面三个式子成立[3, 15]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\xi}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}\xi} = 1 \\ &2\xi\frac{\rho_e u_e}{\rho h_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}\xi} = 0 \\ &\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{P_e}{P}\frac{h}{h_e} = g \end{aligned}\right\} \qquad (9-4-39)$$

借助于式（9－4－38）与式（9－4－39），则式（9－4－36）与式（9－4－37）简化为

$$(Cf'')' + ff'' = (f')^2 - g \qquad (9-4-40)$$

$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right)' + fg' = 0 \qquad (9-4-41)$$

方程式（9－4－40）与式（9－4－41）就是驻点的边界层方程，显然它们与 ξ 无关。换言之，驻点的边界层问题具有相似性解。类似地还可以推出轴对称驻点的边界层方程，其表达式为

$$(Cf'')' + ff'' = \frac{1}{2}\left[(f')^2 - g\right] \qquad (9-4-42)$$

$$\left(\frac{C}{Pr}g'\right)' + fg' = 0 \qquad (9-4-43)$$

式中

$$\left\{\begin{aligned} &f \equiv f(\eta),\quad g \equiv g(\eta) && \text{（对于驻点区域）} \\ &\xi \equiv \int_0^x \rho_e u_e r^2 \mu_e \mathrm{d}x, && \eta \equiv \frac{r u_e}{\sqrt{2\xi}}\int_0^y \rho \mathrm{d}y \\ &\frac{\partial(\rho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial y} = 0 && \text{（连续方程）} \end{aligned}\right. \qquad (9-4-44)$$

这里r是由中心线量起的垂直坐标。值得注意的是，在驻点区域内，f与g只是η的函数，而一般情况下f与g都应是(ξ,η)的函数。显然，方程式（9-4-42）与式（9-4-43）具有相似性解。另外，文献[27]还分别给出了圆柱与球的驻点热流q_W表达式

$$q_W = 0.57Pr^{-0.6}\left(\rho_e\mu_e\right)^{1/2}\left(h_{aw}-h_W\right)\left(\mathrm{d}u_e/\mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad (\text{柱的驻点}) \tag{9-4-45}$$

$$q_W = 0.763Pr^{-0.6}\left(\rho_e\mu_e\right)^{1/2}\left(h_{aw}-h_W\right)\left(\mathrm{d}u_e/\mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad (\text{球的驻点}) \tag{9-4-46}$$

可以证明，在驻点边界层的区域内，边界层外缘速度u_e沿x的变化率$\mathrm{d}u_e/\mathrm{d}x$可以用式（9-4-47）表示，即

$$\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{2P_0}{\rho_0}} \tag{9-4-47}$$

式中，下标0表示驻点处的值；R_0代表驻点处的曲率半径。

显然，将式（9-4-47）分别代到式（9-4-45）与式（9-4-46）后，便可推出

$$q_W \propto 1/\sqrt{R_0} \tag{9-4-48}$$

也就是说，驻点热流与头部半径的平方根成反比。所以，为了减小飞行器头部的热流就必须增加头部的半径。

9.4.2 激波与边界层相互干扰的数值计算

一、流动图案分析及计算域网格生成

在高超声速流动中，由于激波与边界层的相互作用而使得干扰区产生局部的峰值热流，甚至发生局部结构被烧坏的现象。例如 1967 年 10 月美国 X-15 研究机第二次试飞时，虽然对飞机构件进行了烧蚀防护，但相互干扰产生的局部高热流仍使试飞的发动机模型和模型吊架产生了严重的损伤。为了分析激波与边界层干扰的流动，我们先考察图 9.16 所示的入射激波引起平板上边界层分离的算例。由该图可以看出，由于激波后出现很大的压力增高而使得边界层产生局部的分离。激波后的高压通过边界层内的亚声速区传到上游，从而使得分离发生在入射

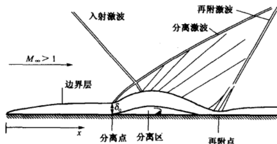


图 9.16 激波与边界层相互干扰的流动图案



激波与边界层撞击点的上游。另外，分离的边界层诱导出一个分离激波，而当边界层在平板下游的某处再附时，又形成一个再附激波。在分离激波和再附激波之间，产生一系列的膨胀波。在再附点附近，边界层变得比较薄而且压力较高，因此这是一个局部高热流区域。而干扰加热的严重程度以及这个局部区域的范围都依赖于边界层是层流还是湍流状态。层流边界层比湍流边界层更容易分离，因此层流边界层更易产生干扰，并形成较严重的局部加热。图 9.17 给出了绝热平板 St 数随 M_∞ 与 Re_x 的变化曲线。从图中可以清楚地看出，湍流的 St 数明显的大于层流值。它从另一个侧面也表明了区分边界层气流的流动状态（到底是层流还是湍流）还是非常重要的。

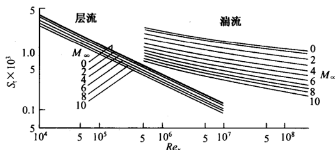


图 9.17　绝热平板 St 数随 M_∞ 与 Re_x 的变化曲线[27]

另一个激波与边界层干扰的例子是绕压缩拐角的流动。高超声速飞行器襟翼附近的流动就属于这类流动。图 9.18 给出了美国 NASA 兰利（Langley）研究中心研制的 HL-20 升力体风洞的试验模型。对于这个构形，NASA 完成了马赫数从 0.1 到 20 的广泛试验，并认为 HL-20 升力体构形是一种很有前途的高超声速飞行器构形[28, 29]。

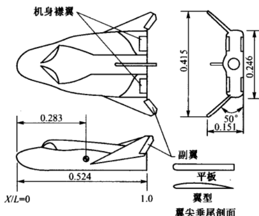


图 9.18　HL-20 升力体的风洞试验模型[28]

分析高超声速飞行器襟翼附近的气体绕过压缩拐角的流动，可以发现：由于压缩拐角引起了逆压梯度，导致了边界层的流动分离。由于分离便引起了分离激波和再附激波的产生。显然，边界层外的无粘流动与边界层内的粘性分离流动是通过压力干扰发生相互作用的，图 9.19 给出了绕压缩拐角引起分离流动的图案。图中压缩拐角的偏转角为 θ，当 θ 大到某个值时，便产生了分离流动。图上给出了分离区。另外，在分离区外面的粘流层，通常可以认为是



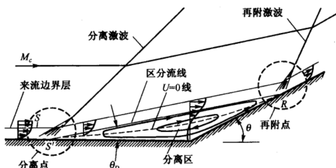


图 9.19　绕压缩拐角的流动图案

一个剪切层。图 9.20 给出了层流与湍流两种状态下的压力分布。由该图可以清楚地看出，压力扰动可以传递到分离点的上游，并且在再附点出现最高压力，相应的最大热流值也在再附点处出现。值得一提的是：对于层流流动，在分离点后常出现一段压力为常值（又称作平台压力）的现象；而对于湍流情况，分离区明显缩小，而且平台压力也不明显。综上所述，由于激波和边界层的相互干扰，使流动出现了分离区，所以如果采用边界层方程和无粘外流迭代的方式去计算这类流动则往往会遇到困难，因此人们多采用求解 N－S 方程组去获得这类流场的数值解。下面就简述一下这类解法的主要过程。

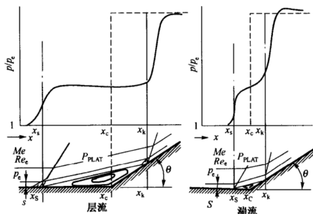


图 9.20　两种流动状态下沿压缩拐角的压力分布

首先，为了获得激波与边界层相互作用的数值解，除了数值格式要精心选取之外，网格设计也至关重要。根据边界层理论，物面处的层流边界层厚度 $\delta(x)$ 可用下式估计



$$\delta(x) \approx \frac{7x}{\sqrt{Re_x}}$$

例如欲在边界层内垂直于物面的方向上设置 10 个网格点的话，则物面网格尺寸 $\Delta y \approx \dfrac{\delta}{10}$；显然，若来流马赫数 M_∞ 很大时则 Δy 将很小，如 $M_\infty = 2.0$，$L = 30$ cm，对空气选取 $Re_\mathrm{L} = 10^6$ 时，则这时物面网格尺寸 Δy 应为

$$\Delta y \approx \frac{7}{10} \frac{L}{\sqrt{Re_\mathrm{L}}} \approx 0.02 \text{ mm}$$

通常引进网格雷诺数 $Re_{\Delta x}$ 与 $Re_{\Delta y}$，其定义为

$$Re_{\Delta x} \equiv \frac{\rho_{ij} u_{ij} \Delta x}{\mu_{ij}}, \quad Re_{\Delta y} \equiv \frac{\rho_{ij} u_{ij} \Delta y}{\mu_{ij}} \tag{9-4-49}$$

文献[30]建议取：

$$Re_{\Delta x} \leqslant 30 \sim 40, \; Re_{\Delta y} \leqslant 3 \sim 4 \tag{9-4-50}$$

这里给出一种便于求解激波与边界层干扰问题的简便代数网格生成方法：在物理平面（即 (x, y) 平面）上，令 x 沿着物面方向，y 沿物面的法线方向，并且沿 y 方向取高度为 b_0 的计算域。令 δ 与 δ_0 分别代表预估的边界层厚度与预估的近物面粘性底层区的高度，于是便可将计算域 $[0, b_0]$ 分成三个区域：① $[0, \delta_0]$ 为近物面粘性底层区。在此区域内，采取沿 y 方向取等间距的细网格。② $[\delta, b_0]$ 为无粘区。在此区域取等间距的粗网格；③ 在两个区域之间的 $[\delta_0, \delta]$ 区域则采取变间距网格。令计算平面为 (ξ, η)，并假定两个坐标系间的变换关系为

$$\begin{cases} t = \tau \\ x = \xi \\ y = y(\eta) \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} \tau = t \\ \xi = x \\ \eta = \eta(y) \end{cases} \tag{9-4-51}$$

我们希望在计算平面内，整个计算区域都是等间距网格。此外，为了避免坐标变换影响数值解，因此还必须要求不同网格之间的接点处例如 $y = \delta_0$ 与 $y = \delta$ 处，坐标函数值分别相等并且导数值也分别相等。于是利用这两个条件便可以确定坐标变换函数中的系数。在计算中如果选用了式（9－4－51）的坐标变换，则此时具体表达式为

$$\eta = \begin{cases} a_1 (y - b_0) + 1 & (\delta \leqslant y \leqslant b_0) \\ b_1 \ln(1 + by) + a_2 & (\delta_0 \leqslant y \leqslant \delta) \\ a_3 y & (0 \leqslant y \leqslant \delta_0) \end{cases} \tag{9-4-52}$$

或者

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{a_1}(\eta-1)+b_0 & \left(\tilde{\delta}\leqslant\eta\leqslant 1\right)\\ \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{b_1}(\eta-a_2)}-1\right]\dfrac{1}{b} & \left(\tilde{\delta}_0\leqslant\eta\leqslant\tilde{\delta}\right)\\ \eta/a_3 & \left(0\leqslant\eta\leqslant\tilde{\delta}_0\right)\end{cases}\qquad(9-4-53)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&a_1=\frac{b_1b}{1+b\delta},\qquad a_3=\frac{b_1b}{1+b\delta_0},\\&a_2=a_3\delta_0-b_1\ln\left(1+b\delta_0\right),\\&b_1=\frac{1}{\ln\left(\dfrac{1+b\delta}{1+b\delta_0}\right)+\dfrac{(b_0-\delta)b}{1+b\delta}+\dfrac{\delta_0 b}{1+b\delta_0}}\end{aligned}\right\}\qquad(9-4-54)$$

这里计算平面上的 $(0,\tilde{\delta}_0,\tilde{\delta},1)$ 对应于物理平面上的 $(0,\delta_0,\delta,b_0)$，b 为加密参数，用它控制细网格的尺度。图 9.21 给出了物理平面 (x,y) 与计算平面 (ξ,η) 上的网格。

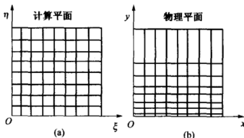


图 9.21 物理平面与计算平面的网格

二、基本方程组及隐式 LU-SGS 格式

在笛卡儿坐标系中，二维 Navier-Stokes 方程可由式（9－4－1）简化得出，即

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial\left(E-E_v\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(F-F_v\right)}{\partial y}=0\qquad(9-4-55)$$

借助式（9－4－51）及式（9－4－52）定义的坐标变换有

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau},\quad\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi},\quad\frac{\partial}{\partial y}=N\frac{\partial}{\partial\eta}\qquad(9-4-56)$$

式中

$$N\equiv\frac{\partial\eta}{\partial y}=\begin{cases}a_1 & \left(\delta\leqslant y\leqslant b_0\right)\\ \dfrac{b_1b}{1+by} & \left(\delta_0\leqslant y\leqslant\delta\right)\\ a_3 & \left(0\leqslant y\leqslant\delta_0\right)\end{cases}\qquad(9-4-57)$$

在 (ξ,η) 坐标系中，经过量纲为 1 化之后式（9－4－55）变为



$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+\frac{\partial E}{\partial \xi}+N\frac{\partial F}{\partial \eta}=H \tag{9-4-58}$$

式中

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \varepsilon\end{bmatrix},\qquad [E,F]=\begin{bmatrix}\rho u & \rho v\\ \rho u^2+P & \rho uv\\ \rho uv & \rho v^2+P\\ u(\varepsilon+P) & v(\varepsilon+P)\end{bmatrix} \tag{9-4-59a}$$

$$H\equiv\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\\ H_3\\ H_4\end{bmatrix},\qquad [H_2,H_3]=\left[\frac{\partial}{\partial \xi},N\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\begin{bmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{21}\\ \sigma_{12}, & \sigma_{22}\end{bmatrix} \tag{9-4-59b}$$

$$H_1=0$$

$$H_4=\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(u\sigma_{11}+v\sigma_{12})+\frac{C_P}{RePr}K\frac{\partial T}{\partial \xi}\right]+N\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(u\sigma_{12}+v\sigma_{22})+N\frac{C_P}{RePr}K\frac{\partial T}{\partial \eta}\right] \tag{9-4-59c}$$

$$\sigma_{11}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{2}{3}N\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \tag{9-4-59d}$$

$$\sigma_{12}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}+N\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),\quad \sigma_{22}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}N\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{9-4-59e}$$

逼近方程式（9－4－58）的一个典型显、隐式组合格式为

$$\begin{aligned}U_{i,j}^{n+1}=U_{i,j}^{n}-\theta\Delta t\left[\delta_\xi^0 E\left(U_{i,j}^{n+1}\right)+N_{i,j}\delta_\eta^0 F\left(U_{i,j}^{n+1}\right)\right]-\\ (1-\theta)\Delta t\left[\delta_\xi^0 E\left(U_{i,j}^{n}\right)+N_{i,j}\delta_\eta^0 F\left(U_{i,j}^{n}\right)\right]+(\Delta t)H_{i,j}^{n}\end{aligned} \tag{9-4-60}$$

式中，δ_ξ^0 与 δ_η^0 分别为逼近 $\partial/\partial\xi$ 与 $\partial/\partial\eta$ 的中心差分算子；θ 为格式加权因子。

显然当 $\theta=0$ 时为显格式；当 $\theta=1$ 时为隐格式；当 $\theta=1/2$ 时，该格式在时间方向为二阶精度，否则在时间方向是一阶精度。应该指出：这个格式的基本思想是对无粘项采用显、隐式组合格式，而对粘性项则采用显格式。为了简洁起见，以下暂将下标 (i,j) 省略。将 E 与 F 作如下线化处理，即

$$\left.\begin{aligned}E^{n+1}=E^n+A^n\Delta U^n+O\left(\|\Delta U\|^2\right)\\ F^{n+1}=F^n+B^n\Delta U^n+O\left(\|\Delta U\|^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{9-4-61}$$

这里 $A\equiv\partial E/\partial U$，$B\equiv\partial F/\partial U$；将式（9－4－61）代到式（9－4－60）并忽略二阶和高阶小量后可得到

$$\left[I+\theta\Delta t\left(\delta_\xi^0 A^n+N\delta_\eta^0 B^n\right)\right]\Delta U^n+(\Delta t)Q=0 \tag{9-4-62}$$

式中
$$Q\equiv\delta_\xi^0 E\left(U^n\right)+N\delta_\eta^0 F\left(U^n\right)-H^n \tag{9-4-63}$$

这里 Q 为残差（又称余项），它是由第 n 时间层的解 U^n 所决定。对于 $\theta=1$ 且 $\Delta t\to\infty$ 的极限情况，格式（9-4-62）简化为 Newton 迭代，即

$$\left(\delta_\xi^0 A+N\delta_\eta^0 B\right)\Delta U^n+Q=0 \tag{9-4-64}$$

如果将上式中的矩阵 A 和 B 按其正、负特征值进行分裂并且注意采用迎风格式，于是有

$$\left(\delta_\xi^- A^+ +\delta_\xi^+ A^- +N\delta_\eta^- B^+ +N\delta_\eta^+ B^-\right)\Delta U+Q=0 \tag{9-4-65}$$

这里 δ^- 与 δ^+ 分别代表向后差分算子与向前差分算子。对于定常流计算，为了使得离散化后的代数方程组系数矩阵对角占优，可采用两点差分算子。另外，$A^\pm$ 与 $B^\pm$ 可作如下分解，即

$$A^\pm=R_A\Lambda_A^\pm L_A,\quad B^\pm=R_B\Lambda_B^\pm L_B \tag{9-4-66}$$

式中，L_A 与 L_B 分别是 A 与 B 的左特征向量矩阵；R_A 与 R_B 则为 A 与 B 的右特征向量矩阵；Λ_A^+ 与 Λ_B^+ 是元素为非负的对角矩阵；Λ_A^- 与 Λ_B^- 为元素为非正的对角矩阵，并且

$$\Lambda_A=\Lambda_A^+ +\Lambda_A^-,\qquad \Lambda_B=\Lambda_B^+ +\Lambda_B^- \tag{9-4-67}$$

显然满足上述要求的矩阵分裂并不惟一，这里仅给出如下的分裂形式，即

$$\Lambda_A^\pm=\frac{1}{2}(\Lambda_A\pm r_A I),\qquad \Lambda_B^\pm=\frac{1}{2}(\Lambda_B\pm r_B I) \tag{9-4-68}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}r_A&=K_A\max\left(|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,|\lambda_3|,|\lambda_4|\right)_A\\ r_B&=K_B\max\left(|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,|\lambda_3|,|\lambda_4|\right)_B\end{aligned}\right\} \tag{9-4-69}$$

这里 I 为单位矩阵；K_A 与 K_B 均为大于 1 的常数。另外，在任一网格点 (i,j) 处，差分方程式（9-4-65）可表示为

$$\begin{aligned}&\left(A_{i,j}^+\Delta U_{i,j}-A_{i-1,j}^+\Delta U_{i-1,j}\right)+\left(A_{i+1,j}^-\Delta U_{i+1,j}-A_{i,j}^-\Delta U_{i,j}\right)+N_{i,j}\\ &\left[\left(B_{i,j}^+\Delta U_{i,j}-B_{i,j-1}^+\Delta U_{i,j}\right)+\left(B_{i,j+1}^-\Delta U_{i,j+1}-B_{i,j}^-\Delta U_{i,j}\right)\right]+Q_{i,j}=0\end{aligned} \tag{9-4-70}$$

可以证明上式可近似分解为（略去下标 i,j）

$$\begin{aligned}&\left(\delta_\xi^- A^+ +N\delta_\eta^- B^+ -A^- -NB^-\right)\left(\delta_\xi^+ A^- +N\delta_\eta^+ B^- +A^+ +NB^+\right)\Delta U^n\\ &=-\left(r_A+Nr_B\right)\ \left(\delta_\xi^0 E+N\delta_\eta^0 F-H\right)^n\end{aligned} \tag{9-4-71}$$

式中，r_A 与 r_B 由式（9-4-69）定义。

式（9-4-71）为针对式（9-4-58）作近似 Newton 迭代的 LU-SGS 格式。它可以用于高超声速流动中激波与边界层相互干扰问题的求解，也可用于一般跨声速或超声速流场的



N－S 方程计算[31, 32]。式（9－4－71）的求解过程可归结为如下两步：

第一步求解

$$\left(\delta_\xi^- \boldsymbol{A}^+ + N\delta_\eta^- \boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{A}^- - N\boldsymbol{B}^-\right)_{i,j} \Delta \boldsymbol{U}_{i,j}^* = -\left(r_A + Nr_B\right)\left(\delta_\xi^0 \boldsymbol{E} + N\delta_\eta^0 \boldsymbol{F} - \boldsymbol{H}\right)_{i,j} \tag{9-4-72}$$

即

$$\left(r_A + Nr_B\right)\Delta \boldsymbol{U}_{i,j}^* = \boldsymbol{A}_{i-1,j}^+ \Delta \boldsymbol{U}_{i-1,j}^* + N\boldsymbol{B}_{i,j-1}^+ \Delta \boldsymbol{U}_{i,j-1}^* - \left(r_A + Nr_B\right)\boldsymbol{Q}_{i,j} \tag{9-4-73}$$

显然，上式的求解是一个向前扫描的过程，并且不需要进行矩阵求逆运算。

第二步求解

$$\left(\delta_\xi^+ \boldsymbol{A}^- + N\delta_\eta^+ \boldsymbol{B}^- + \boldsymbol{A}^+ + N\boldsymbol{B}^+\right)_{i,j} \Delta \boldsymbol{U}_{i,j}^n = \Delta \boldsymbol{U}_{i,j}^* \tag{9-4-74}$$

即

$$\left(r_A + Nr_B\right)\Delta \boldsymbol{U}_{i,j}^n = \Delta \boldsymbol{U}_{i,j}^* - \boldsymbol{A}_{i+1,j}^- \Delta \boldsymbol{U}_{i+1,j}^n - N\boldsymbol{B}_{i,j+1}^- \Delta \boldsymbol{U}_{i,j+1}^n \tag{9-4-75}$$

可以看出，上式的求解是一个向后扫描的过程，而且也不需要进行矩阵求逆运算。应该指出的是：为了更好的捕捉激波，抑制激波附近的非物理振荡，可以在式（9－4－73）的残差项 $\boldsymbol{Q}_{i,j}$ 中显式加入适当的人工粘性项。对此感兴趣的读者可参阅计算流体力学方面的文献，例如文献[30，33～44]等，这里因篇幅所限不予讨论。

§ 9.5　高温效应以及高温无粘气体的平衡流与非平衡流动

9.5.1　高温气体的性质及真实气体的概念

空气在高温下发生物理与化学变化，使它的状态方程偏离量热完全气体。图 9.22 给出了三个不同温度区域内空气的物理性质，下面扼要地说明一下。

1. 区

温度在 800 K 以下，空气中的主要成分 N_2 和 O_2 分子的运动只有平动和转动。从统计热力学知道，这时单位质量空气的内能 e 为

$$e = \frac{3}{2}RT + RT \tag{9-5-1}$$

这里 R 是空气的气体常数；T 是温度；上式右边两项分别为分子平动和转动的能量。由此可得比定压热容 c_p 与比定容热容 c_v 分别为

$$c_p = c_v + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R, \qquad c_v = \frac{5}{2}R \tag{9-5-2}$$

因而比热比 γ 为

$$\gamma = c_p / c_v = 7/5 = 1.4 \tag{9-5-3}$$



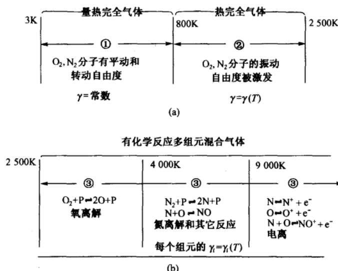


图 9.22　空气在不同温度范围内的物理与化学变化（在 1 个大气压下）

2. 区

当温度在 800 K≤T≤2 500 K 范围时，N_2 和 O_2 的振动自由能被激发，这时的比内能 e 为

$$e=\frac{3}{2}RT+RT+\frac{R\dfrac{\hbar\tilde{\nu}}{K_B}}{\exp\left(\dfrac{\hbar\tilde{\nu}}{K_BT}\right)-1}\quad\text{（对双原子的分子气体）}\tag{9-5-4}$$

式中，$\hbar$ 是普朗克（Planck）常数（$\hbar=6.626\ 196\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot S}$），$\tilde{\nu}$ 是分子振动的基频；K_B 为波耳兹曼（Boltzmann）常数。

上式等号右边的三项分别为分子平动、转动和振动的能量。引进振动特征温度 T_{Ve}，其定义为

$$T_{Ve}\equiv\frac{\hbar\tilde{\nu}}{K_B}\tag{9-5-5}$$

由定容比热容 c_v 的定义

$$c_v\equiv\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v\tag{9-5-6}$$

借助于式（9-5-4），对于双原子的分子气体可得到 c_v 为



$$c_v = \frac{3}{2}R + R + R\frac{e^{\frac{T_{Ve}}{T}}}{\left(e^{\frac{T_{Ve}}{T}} - 1\right)^2}\left(\frac{T_{Ve}}{T}\right)^2 \tag{9-5-7}$$

借助于定压比热容 c_p 与定容比热容 c_v 间的一般关系（它可由式（1-5-24）与式（1-5-25）得到），即[45]

$$c_p \equiv (\partial h / \partial T)_P \tag{9-5-8}$$

$$c_p - c_v = \left[(\partial e / \partial v)_T + P\right](\partial v / \partial T)_P \tag{9-5-9}$$

在现在的温度区间里，内能 e 仅为温度 T 的函数，并注意到无论是量热完全气体还是热完全气体，其状态方程都是

$$P = \rho RT \tag{9-5-10}$$

这里 R 为常数。于是，式（9-5-9）此时可以简化为

$$c_p - c_v = R \tag{9-5-11}$$

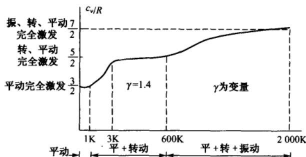


图 9.23 双原子气体的比热随温度的变化曲线

图 9.23 给出了用统计热力学理论计算出的双原子气体的比热随温度的变化曲线。由此可知 $c_v = c_v(T)$，$c_p = c_p(T)$，它们仅仅是温度的函数，也就是说在②区内，热完全气体还是适用的。

3. 区

当温度在 $2\,500\text{ K} < T < 9\,000\text{ K}$ 时，O_2 分子与 N_2 分子先后产生离解，即



$$\left.\begin{aligned} O_2 + M &\rightleftharpoons 2O + M \\ N_2 + M &\rightleftharpoons 2N + M \end{aligned}\right\} \tag{9-5-12}$$

这里 M 为任意粒子。另外，还要发生化学反应，如



$$\left.\begin{aligned} O_2 + N &\rightleftharpoons NO + O \\ N_2 + O &\rightleftharpoons NO + N \\ N_2 + O_2 &\rightleftharpoons 2NO \end{aligned}\right\} \tag{9-5-13}$$

如果温度继续升高，当 $T > 9\,000$ K 时，还会发生电离，即





$$\left.\begin{array}{l} N \rightleftharpoons N^+ + e^- \\ O \rightleftharpoons O^+ + e^- \\ NO \rightleftharpoons NO^+ + e^- \end{array}\right\} \quad (9-5-14)$$

这里 e^-为自由电子；总之，在③区内，空气是一种多组元变成分带有化学反应的混合气体。处在高温下的离解电离空气通常存在有 11 个气体组元，即 O、O_2、N_2、NO、NO^+、O_2^+、N_2^+、O^+、N^+、N、e^-；其中每一个组元都可看成热完全气体。至于各个组元在混合气体中所含份量的大小，不仅取决于该系统的压强 P、温度 T，而且还和各个化学反应的速率有关。文献[2]给出了当温度在 2 500 K<T<9 000 K 时所发生的 16 种反应，例如 N_2 与 O_2 所发生的碰撞离解反应以及置换反应、缔合电离反应、碰撞电离反应与附着反应等。图 9.24 给出了在各个温度区间，空气分子振动激发、离解和电离的示意图。

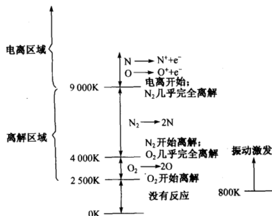


图 9.24 各温度区间空气分子振动激发、离解和电离示意图

另外，文献[2]还从经典物理化学中的基本概念出发[46]，并以是否计及分子间的作用力为界线将气体介质在不同条件下所呈现的热力学属性划分为量热完全气体（Calorically perfect gas）、热完全气体（Thermally perfect gas）、化学反应完全气体混合物（Chemically reacting mixture of perfect gases）和真实气体（Real gas）这四种气体。文献[2]还特别重申了真实气体与“真实气体效应”之间在概念上的重大区别，指出在过去一些高超声速气动力学书上所讲的“真实气体效应”实际上是以气体是否视作量热完全气体为界线的。也就是说，凡是量热完全气体模型失效的情形在那些书上均被称为“真实气体效应”。而通常经典物理化学上所定义的真实气体是必须计及分子之间相互作用力的气体，而完全气体是可以忽略分子之间作用力的气体。事实上对于大多数气体动力学问题，采用完全气体的假定是合理的。这是由于在标准大气条件（P=1atm，T=273.16 K）下，空气分子的平均自由程 $\bar{l}=6.13\times10^{-8}$ m，而空气分子的平均直径 $d=3.7\times10^{-10}$ m，显然 $\bar{l}\gg d$，也就是说一个分子在遇到另一个分子之前要运动相当长的距离，因此在一般情况下可以将空气视为完全气体。只有在某些情况下气体才呈现为真实气体，在这种情况下分子之间的相互作用力才对气体宏观特性产生较大的影响[2]。真实气体的状态方程有多种形式，最著名的是 Van der Waals（范·德·瓦尔斯）方程，即



$$\left(P+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT \tag{9-5-15}$$

其中 a 和 b 是依赖于气体种类的常数；式中 a/v^2 项考虑了分子间力的影响，而 b 则考虑到气体粒子自身体积对系统体积的影响；这里 v 为比容。显然，如果 $a=0$, $b=0$ 时，则式（9-5-15）便退化为完全气体的状态方程。

9.5.2　非平衡态气体的振动激发与化学反应过程

所有的振动激发和化学反应过程均是由粒子碰撞或辐射引起的，这里暂且略去辐射的影响，即先不考虑光化学和光电离的影响作用。所谓平衡态是指粒子经过足够多次碰撞之后才达到的一种状态，例如逼近振动平衡要有 2 万次以上的碰撞；逼近化学反应平衡要有 20 多万次的碰撞才能达到平衡态。这种从系统环境的变化到该系统达到平衡态的过程叫作非平衡系统的分子弛豫过程；所需要的时间称为弛豫时间；过渡过程中的气体特性称为非平衡特性，偏离平衡态的气体称为非平衡态气体。对于振动松弛过程，可以证明它服从如下方程[3, 2]

$$\frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{vib}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau}\left(e_{\mathrm{vib}}^{*}-e_{\mathrm{vib}}\right) \tag{9-5-16}$$

式中，e_{vib}^{*} 为平衡时的振动能；e_{vib} 为振动能的瞬时非平衡值；τ 为振动松弛时间（又称振动弛豫时间）；$\mathrm{d}e_{\mathrm{vib}}/\mathrm{d}t$ 代表非平衡振动能的时间变化率。因此式（9-5-16）又称作振动速率方程。另外，弛豫时间 τ 通常是压强 P 和温度的函数。它可以通过实验测出并拟合为曲线，其拟合曲线的方程为[46]

$$\ln\tau=(K_2/T)^{1/3}-\ln P+\ln C \tag{9-5-17}$$

式中，系数 K_2 与 C 对于不同的气体可取不同的值。

同样地，对于给定的化学反应，例如



$$\mathrm{N_2+O}\underset{K_b}{\overset{K_f}{\rightleftharpoons}}\mathrm{NO+N} \tag{9-5-18}$$

可以证明其化学反应的速率方程为[3, 2]

$$\frac{\mathrm{d[NO]}}{\mathrm{d}t}=K_f[\mathrm{N_2}][\mathrm{O}]-K_b[\mathrm{NO}][\mathrm{N}] \tag{9-5-19}$$

式中，$[\mathrm{N_2}]$ 代表 $\mathrm{N_2}$ 的摩尔浓度；对其他组元也采用相应的符号，即用[*]表示组元*的摩尔浓度；K_f 和 K_b 分别表示该反应的正向与逆向反应速率常数，它们均是温度 T 的函数。如果上式处于平衡态，则

$$K_f[\mathrm{N_2}]^*[\mathrm{O}]^*-K_b[\mathrm{NO}]^*[\mathrm{N}]^*=0 \tag{9-5-20}$$

式中，上标*表示平衡态时的值。

于是

$$\frac{K_f}{K_b} \equiv K_c \tag{9-5-21}$$

这里 K_c 称为平衡常数。对于 n 个组元的化学反应体系，即

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i) \underset{K_b}{\overset{K_f}{\rightleftharpoons}} \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i) \tag{9-5-22}$$

这里 x_i 为系统中的任一组元；a_i 与 b_i 分别为反应物与生成物的化学计量系数。反应式（9-5-22）的正向与逆向反应速率方程分别为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}[x_i]}{\mathrm{d}t}\right)_f &= (b_i - a_i)K_f\prod_i\left([x_i]^{a_i}\right) \qquad \text{（正向反应）}\\ \left(\frac{\mathrm{d}[x_i]}{\mathrm{d}t}\right)_b &= -(b_i - a_i)K_b\prod_i\left([x_i]^{b_i}\right) \qquad \text{（正向反应）}\end{aligned}\right\} \tag{9-5-23}$$

因此任一组元 x_i 的净生成率为

$$\frac{\mathrm{d}[x_i]}{\mathrm{d}t} = (b_i - a_i)\left\{K_f\prod_i\left([x_i]^{a_i}\right) - K_b\prod_i\left([x_i]^{b_i}\right)\right\} \tag{9-5-24}$$

从本质上讲，上式是质量作用定理的一般形式。虽然根据分子运动论可以计算出化学反应速率常数 K_f 与 K_b，但经验表明：计算出的值与实验值有时会相差几个量级，因此化学反应速率常数通常还是采用实验总结出的经验公式进行计算，例如选用改进的 Arrhenius（阿伦纽斯）方程为[26]

$$K = C_1 T^{\alpha} e^{-\frac{E_0}{RT}} \tag{9-5-25}$$

式中，E_0 为反应活化能，$(C_1 T^{\alpha})$ 为频率因子；这里 C_1，α 与 E_0 的值可以从实验资料中找到。文献[47]给出了 30 000 K 以下高温空气的化学反应速率常数 K_f 与 K_b 值，可供计算时查用。

在未结束本节讨论之前，我们先重新定性地回顾一下高超声速气流绕钝体流动的整体图像，如图 9.25 所示。当高超声速气流绕过外钝体时，一道较强的弓形脱体激波在钝体前方形成，如图 9.25（a）所示，激波后形成的激波边界层与高温边界层区域可由该图看出。对于钝头飞行器头部的弓形激波（如图 9.25（b）所示）是正激波或接近正激波。在高超声速飞行下，这种强激波波后的温度极高，例如 Apollo 飞船再入大气层若 $M=36$，则头部温度高达 11 000 K，因此整个激波层都被化学反应流动所控制。这种带有化学反应的高温流动，使得激波前后密度比 ρ_2/ρ_1 显著提高，有的高达 22；图 9.25（c）给出了采用量热完全气体模型与采用化学气体模型时所计算出的钝体弓形激波相对位置的比较，显然，考虑化学反应的激波更靠近壁面。图 9.25（d）定性地给出了分析钝体非平衡绕流的流动图像。考虑该图所示的流经驻点的流线 abc；在 a 和 b 之间，气体受到压缩并减速，到驻点 b 处速度为零。



在 b 点处达到当地平衡条件并且伴随有很高的离解度和电离度。然后，气体由驻点向下游迅速膨胀，而且速度（在驻点）由零沿物面迅速增大，在 c 点处流速达到了声速。显然，在 c 点附近区域中有很强的压力梯度和温度梯度（这里 dP/dl 与 dT/dl 为负值），在 c 点附近有突然的冻结流。因此物面声速点的下游将被很薄的并且具有很高离解和电离度的冻结流所覆盖。这里我们不妨分析一下离物面很近的 A 点上的这条流线，由于它通过强度很高的弓形激波的头部，因此，该流线的特性与 abc 流线的特性类似，即沿该流线的流体元在激波后是具有高度离解和电离的、具有平衡特性的混合气体；在声速点附近及其下游该流体元变成冻结流体元。这里所谓冻结流动，是指它的化学反应速率和振动速率都趋于零；也可认为是混合气体各组元的浓度和振动能的变化极其迟缓；或者说这类气体的流动不随环境温度 T 和压强 P 变化。最后，我们再分析一下离物面较远的 B 点处流线。它通过弓形激波上强度较弱的斜激波，因此流体元的离解度和电离度较小，并且斜激波后的非平衡区较长，经过 B 点的流体元在斜激波后有很长的非平衡流动区，然后在充分远的下游处趋于当地平衡。

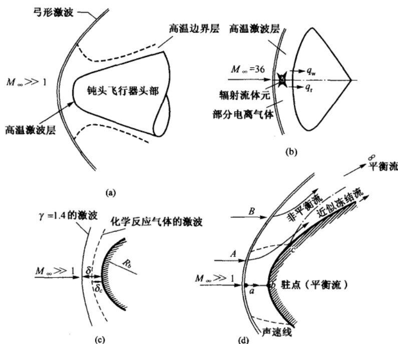


图 9.25　高超声速气流绕钝体流动的整体图像

9.5.3 无粘高温平衡流

高温无粘平衡流动的控制方程组为

总的质量守恒方程 $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=0 \tag{9-5-26}$$

动量方程 $$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=-\nabla P \tag{9-5-27}$$

能量方程 $$\rho\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial P}{\partial t} \tag{9-5-28}$$

式中，$H\equiv h+\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$。 (9-5-29)

应注意的是，虽然形式上高温效应并没有去改变控制方程组的基本形式，但仔细分析一下方程中的各项含义便会感到其中的差异。这里连续方程给的是总体的质量守恒方程，所以与流动是否具有化学反应无关；动量方程基本上是牛顿第二定律，与流动是否具有化学反应无关；在能量方程中，表面上好像没有考虑化学反应引起的能量附加项（例如吸热或者放热），其实我们在焓 h 的计算时已作了考虑。由文献[2]知道，混合气体的 h 可由下式给出

$$h=（混合气的可感焓）+（混合气的有效零点能） \tag{9-5-30}$$

上式右边第一项对于每一个化学组元的可感焓都可以根据统计热力学求得；第二项有效零点能，又称化学焓，可以通过查表获得。在基本方程组式（9-5-26）～式（9-5-28）中有四个未知数 P、ρ、$\boldsymbol{V}$ 与 h，因此方程组不封闭。必须补充平衡热力学关系式

$$T=T(\rho,h) \tag{9-5-31}$$

$$P=P(\rho,h) \tag{9-5-32}$$

这样五个未知数 P、ρ、$\boldsymbol{V}$、h、T，五个方程即式（9-5-26）～式（9-5-28）以及式（9-5-31）与式（9-5-32），方程组封闭。这里值得注意的是，温度 T 不仅在这里必须，而且在计算平衡常数、内能以及焓时也都需要它。

例题 9.1 高超声速气流跨过一维定常正激波之后形成了无粘高温平衡流动，试给出这时激波前后物理量的计算步骤，这里假定高超声速气流为空气。

解： 正激波前后条件为

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1V_1=\rho_2V_2\\&P_1+\rho_1V_1^2=P_2+\rho_2V_2^2\\&h_1+\frac{1}{2}V_1^2=h_2+\frac{1}{2}V_2^2\end{aligned}\right\} \tag{9-5-33}$$



式中，P、ρ、V、h 分别为压强、密度、速度、焓；下标 1 表示波前，下标 2 表示波后。

这里给出两种气体模型下的计算步骤：一种是量热完全气体，另一种是高温平衡空气。对于量热完全气体，激波前后物理量的变化可由本书 § 2.3 节给出的关系式定出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{P_2}{P_1}=\frac{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}{\gamma+1}\\&\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}\\&\frac{T_2}{T_1}=\frac{\left[2\gamma M_1^2-(\gamma-1)\right]\left[(\gamma-1)M_1^2+2\right]}{(\gamma+1)^2M_1^2}\end{aligned}\right\} \tag{9-5-34}$$

对于高温平衡空气，则只能采用数值方法进行迭代求解，为此将式（9－5－33）改写如下

$$V_2=\rho_1V_1/\rho_2 \tag{9-5-35}$$

$$P_2=P_1+\rho_1V_1^2\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \tag{9-5-36}$$

$$h_2=h_1+\frac{1}{2}V_1^2\left[1-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\right] \tag{9-5-37}$$

以及两个补充关系

$$P_2=P(\rho_2,h_2) \tag{9-5-38}$$

$$T_2=T(\rho_2,h_2) \tag{9-5-39}$$

这里 P_2 与 h_2 均变成了未知量 ρ_1/ρ_2 的函数，其求解步骤是：

（1）假设一个 ρ_1/ρ_2 的值，通常可取 $\rho_1/\rho_2=0.1$；

（2）由式（9－5－36）与式（9－5－37）算出 P_2 与 h_2；

（3）由 P_2 与 h_2 值，借助于式（9－5－38）算出 ρ_2 值；也可由 P_2 与 h_2 值查高温平衡空气特性图表（例如可查本书附录中的表 8（b））得到温度 T_2 和压缩因子 Z_2，然后由

$$\rho_2=\frac{P_2}{RT_2Z_2} \tag{9-5-40}$$

得出 ρ_2 值；

（4）由上面得到的 ρ_2 值便可得到一个新的 ρ_1/ρ_2 值；

（5）用新的 ρ_1/ρ_2 值重复步骤②～步骤④，直到 ρ_2 的迭代达到收敛。通常 ρ_2 的收敛很快；

（6）借助于上面得到的 h_2 和 ρ_2 值先由式（9－5－39）算出 T_2，再由式（9－5－35）算出 V_2 值。

表 9-1 给出了再入飞行器在飞行高度为 51 816 m，飞行速度为 10 972 m/s 时两种模型下正激波气体特性的比较。

表 9-1 正激波气体特性的比较

特性参数 \ 模型	量热完全气体模型 $(\gamma=1.4)$	化学平衡气体模型
P_2/P_1	1 233	1 387
ρ_2/ρ_1	5.972	15.19
h_2/h_1	206.35	212.8
T_2/T_1	206.35	41.64

从表中的数据可以看出：波后压力与气体模型的选择关系不大，而波后温度与气体模型的选择关系密切。事实上，量热完全气体与化学反应气体的正激波关系之间存在着实质性的区别。对于量热完全气体，正激波的函数关系为

$$\rho_2/\rho_1 = f_1(M_1),\quad P_2/P_1 = f_2(M_1),\quad h_2/h_1 = f_3(M_1) \tag{9-5-41}$$

这就是说，激波前后的特性比值完全取决于来流马赫数 M_1 值。然而，对于化学反应平衡气体，其正激波的函数关系可表为

$$\rho_2/\rho_1 = f_4(V_1,P_1,T_1),\quad P_2/P_1 = f_5(V_1,P_1,T_1),\quad h_2/h_1 = f_6(V_1,P_1,T_1) \tag{9-5-42}$$

也就是说，激波前后的特性值要依赖于 V_1, P_1 与 T_1 这三个参数，对于正激波波后的高温气体而言，来流马赫数 M_1 不起重要作用。另外，对于高速流动，正激波前后有：$V_2 << V_1$，并且 $P_2 >> P_1$，因此可以认为：在高超声速流动中，$P_2 \approx \rho_1 V_1^2$ 是一个较好的近似。

9.5.4 无粘高温非平衡流

对于无粘高温非平衡流，表示混合气体全部组元的总体连续方程形式上与式（9-5-26）相同，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{9-5-43}$$

式中，$\boldsymbol{V}$ 为混合气体的速度矢量；ρ 为混合气体的密度。

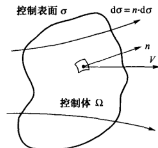


图 9.26 位置固定的有限控制体

今考察一个固定的有限控制体，如图 9.26 所示。令 ρ_i 是混合气体单位体积中 i 组元的质量，令 $\dot{\omega}_i$ 为由于化学反应而引起 ρ_i 的当地变化率；所以固定控制体内 i 组元质量对时间的变化率应该是 i 组元通过控制体表面的质量通



量与由于化学反应而引起的控制体内 i 组元的净生成这两项之和，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho_i \mathrm{d}\Omega = -\oiint_{\sigma}\rho_i \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \iiint_{\Omega}\dot{\omega}_i \mathrm{d}\Omega \tag{9-5-44}$$

或者

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_i \boldsymbol{V}) = \dot{\omega}_i \tag{9-5-45}$$

注意上式仅对无粘流成立。如果流动是有粘的，则组元 i 的质量连续方程还应该加上质量扩散引起的 i 组元的输运项（见式（9-6-3））。引进质量比数 Y_i，即

$$Y_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho} \tag{9-5-46}$$

将式（9-5-46）代到式（9-5-45）中并注意到式（9-5-43），便得

$$\frac{DY_i}{Dt} \equiv \frac{\partial Y_i}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla Y_i = \frac{\dot{\omega}_i}{\rho} \tag{9-5-47}$$

注意到

$$\sum_i Y_i = 1, \quad \sum_i \rho_i = \rho \tag{9-5-48}$$

于是，高温、无粘、非平衡流动的基本方程组为

① 总的连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V}) = 0$$

② 组元 i 的连续方程

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_i \boldsymbol{V}) = \dot{\omega}_i$$

或者

$$\frac{DY_i}{Dt} \equiv \frac{\partial Y_i}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla Y_i = \frac{\dot{\omega}_i}{\rho}$$

③ 动量方程

$$\rho\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\nabla P \tag{9-5-49}$$

④ 能量方程

$$\rho\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \dot{q} \tag{9-5-50}$$

式中，$H \equiv h + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$。（9-5-51）

⑤ 状态方程

$$P = \rho RT,\quad R \equiv \frac{\Re}{m},\quad m = \left(\sum_i \frac{Y_i}{m_i}\right)^{-1} \tag{9-5-52}$$

式中，m 与 m_i 分别表示混合气体的分子量与 i 组元的分子量；$\Re$ 为通用气体常数。

⑥ 焓

$$h = \sum_i (Y_i h_i) \tag{9-5-53}$$



这里 h_i 为 i 组元的单位质量焓[2]。

现以正激波波后的一维定常流动为例，讨论化学非平衡流。这时控制方程组变为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho V)=0\\&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\rho V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\\&V\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{\omega}_i}{\rho}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h+\frac{1}{2}V^2\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{9-5-54}$$

上述方程组可以用常微分方程的积分方法进行数值计算（例如采用 Runge-Kutta 法），从激波出发向下游推进求解。在非平衡流动计算中，常常还会遇到这样的一个困难：当一个或多个化学反应极快（即 $\dot{\omega}_i$ 的计算式中有些项极大）时，Δx 必须取得极小，即使这样做在数值计算时还很容易导致数值解的发散。也就是说，组元的连续方程在化学反应极快时其微分方程出现刚性（stiff）方程的性态，它容易使数值解产生不稳定[48]。另外，图 9.27（a）和（b）分别给出了正激波与斜激波波后非平衡流的松弛距离。在图 9.27（a）所给的计算条件下[49]，正激波波后的松弛距离在 1 cm 量级，而图 9.27（b）所示的 30° 斜激波波后的松弛距离高达 700 cm 量级[49]。可见，斜激波波后的松弛距离要比正激波时大很多。

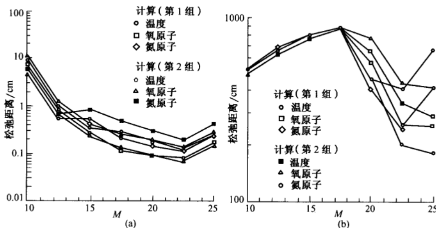


图 9.27 激波波后的松弛距离[49]



§9.6　高温粘性气体动力学基本方程组及守恒形式

9.6.1　高温粘性气体的基本方程

一、扩散速度与扩散质量流

对于化学非平衡粘性流，组元 i 的连续方程应该考虑该组元的质量扩散项。如图 9.28 所示，令 $\boldsymbol{V}_i$ 是组元 i 的运动速度，$\boldsymbol{V}$ 是气体混合物的运动速度，$\boldsymbol{U}_i$ 为组元 i 的扩散速度，它们间的关系为

$$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}_i \tag{9-6-1}$$

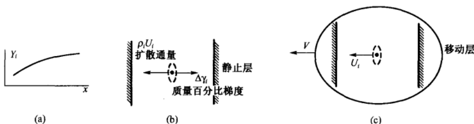


图 9.28　扩散速度的说明

类似于式（9-5-44）的推导，对于所考察的固定控制体则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho_i\mathrm{d}\Omega=-\oiint_{\sigma}\rho_i\boldsymbol{V}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+\iiint_{\Omega}\dot{\omega}_i\mathrm{d}\Omega \tag{9-6-2}$$

或者

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_i\boldsymbol{V}_i)=\dot{\omega}_i \tag{9-6-3}$$

显然，将式（9-6-1）代入到式（9-6-3）中并注意到总的连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0,\qquad \sum_i\rho_i\equiv\rho,\qquad \sum_i(\rho_i\boldsymbol{V}_i)\equiv\rho\boldsymbol{V} \tag{9-6-4}$$

另外，借助于式（9-5-48），则式（9-6-3）还可以改写为

$$\rho\frac{DY_i}{Dt}+\nabla\cdot(\rho_i\boldsymbol{U}_i)=\dot{\omega}_i \tag{9-6-5}$$

这里

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla \tag{9-6-6}$$

引进组元 i 的扩散质量流 $\boldsymbol{J}_i \equiv \rho_i \boldsymbol{U}_i$，利用 Fick 定律

$$\boldsymbol{J}_i = -\rho \wp_{im} \nabla Y_i \tag{9-6-7}$$

这里 $\wp_{im}$ 为多组元扩散系数，它与二组元扩散系数 $\wp_{ij}$ 有如下近似表达式[2, 3]

$$\wp_{im} = \frac{1+X_i}{\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{\wp_{ij}}} \tag{9-6-8}$$

式中，X_i 为组元 i 的摩尔比数。

本书附录中的表 8（g）给出了空气成分的二组元扩散系数，可供计算时查用（注意表中将 $\bar{D}_{ij}/P$ 定义为通常的二元扩散系数）。应该指出，对于无粘流，由于不存在组元之间的相互扩散效应，因此每个组元 i 的速度 $\boldsymbol{V}_i$ 与混合气体运动速度 $\boldsymbol{V}$ 相同，于是这时式（9−6−5）便简化为式（9−5−47），并且式（9−6−3）简化为式（9−5−45）。

二、能量方程

传热的形式通常有 4 种：热传导、对流传热、扩散传热和辐射传热，下面分别略作介绍。

（1）热传导是最常见的热能传递现象。固体的传热是通过原子的振动和电子移动；液体和气体的热传导是分子运动的能量转移。热传导的能量通量由傅里叶公式给出

$$\boldsymbol{q}_c = -k \nabla T \tag{9-6-9}$$

（2）对流传热是运动流体中因质点移动所引起的能量交换。在这种情况下，质点的移动方向不一定是沿着温度下降的方向。边界层传热是对流传热的重要实例[26]。在工程应用中，经常用经验公式来描述对流传热，即所谓的牛顿（Newton）冷却公式

$$q_W = \alpha \Delta T = \alpha_h \Delta h \tag{9-6-10}$$

式中，α 或者 α_h 分别表示温差换热系数或者用焓差表达的换热系数；ΔT 与 Δh 仅仅是表示温度差与焓差的值。

注意式（9−6−10）仅是给出对流换热系数的一种定义，α 并不是一个物性系数。

（3）扩散传热是反映多组元气体的扩散现象。例如对于多组元化学反应气体，当组元 i 从一个位置扩散到另一个位置时，不仅携带着自身的能量，还参与了当地的化学反应，于是形成了能量输运的又一种形式即扩散传热并用 $\boldsymbol{q}_D$ 表示。

（4）辐射传热，它与前面三种传热方式即热传导、对流传热和扩散传热在机理上有显著的区别。热传导、对流和扩散传热都是以分子为载体，是通过介质实现能量转移，而热辐射是以电磁波或者光子为载体，光子的运动或者电磁波的传播并不依赖于介质的存在与否，辐射传热常用 $\boldsymbol{q}_R$ 表示。因此对于有温度梯度和浓度梯度存在的高温化学反应气体系统，其总的热通量 $\boldsymbol{q}$ 为

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_c + \boldsymbol{q}_D + \boldsymbol{q}_R + \text{（对流传热项）} \tag{9-6-11}$$



另外，单位质量混合气的内能（即比内能）e 为

$$e=\sum_i(e_iY_i) \tag{9-6-12}$$

$$e_i\equiv（分子移动能）+（转动能）+（振动能）+（轨道电子能）+（零点能） \tag{9-6-13}$$

这里 Y_i 由式（9-5-46）定义。引进静焓 h 与总焓 H，即

$$h=e+\frac{P}{\rho} \tag{9-6-14}$$

$$H=h+\frac{V^2}{2} \tag{9-6-15}$$

于是用 H 表达的能量方程即式（1-3-23）在高温气体的情况下仍可表示为

$$\rho\frac{DH}{Dt}=\frac{\partial P}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{V}) \tag{9-6-16}$$

式中，Π 为粘性应力张量。

在直角坐标系下，$\nabla\cdot(\Pi\cdot\boldsymbol{V})$ 可表为

$$\nabla\cdot(\Pi\cdot\boldsymbol{V})=\frac{\partial\left(u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u\tau_{yx}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\tau_{zz}\right)}{\partial z} \tag{9-6-17}$$

类似的，用静焓 h 表达高温下的能量方程为

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{DP}{Dt}-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\phi \tag{9-6-18}$$

这里 ϕ 为耗散函数。引进广义总内能 $\varepsilon\equiv\rho e_t$，这里 e_t 由式（1-4-13）定义，则用 ε 表达高温下的能量方程为

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot\left[(\varepsilon+P)\boldsymbol{V}\right]=\nabla\cdot(\Pi\cdot\boldsymbol{V})-\nabla\cdot\boldsymbol{q} \tag{9-6-19}$$

式中，混合气体的压强 P 为

$$P=\sum_i P_i \tag{9-6-20}$$

这里 P_i 为组元 i 的分压强（有时又称分压力）。

三、动量方程

动量方程式（1-4-40）在高温下为

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V})=\nabla\cdot\Pi-\nabla P+\rho\boldsymbol{f} \tag{9-6-21}$$

式中，$\boldsymbol{f}$ 为体积力（又称彻体力）。

这里暂不考虑体积力，即令 $\boldsymbol{f}=0$。

9.6.2 高温非平衡粘性气体基本方程组的守恒形式

借助于式（9-6-1）与式（9-6-7），则式（9-6-3）变为

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_i \boldsymbol{V})-\nabla\cdot(\rho \wp_{im}\nabla Y_i)=\dot{\omega}_i \tag{9-6-22}$$

式中，$\wp_{im}$ 为多组元扩散系数（与组元 i 相关的）；Y_i 已由式（9-5-46）定义。

本书附录中的表 8（g）给出了空气成分的二元扩散系数，表 8（h）给出了空气主要组元的一些光谱数据，表 9-1 给出了地球标准大气层表，可供计算时查用。将连续方程式（9-6-22）、动量方程式（9-6-21）与能量方程式（9-6-19）写为如下守恒形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial y}+\frac{\partial(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v)}{\partial z}=\boldsymbol{S} \tag{9-6-23}$$

式中

$$\boldsymbol{U}\equiv[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n,\rho u,\rho v,\rho w,\varepsilon]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-24}$$

$$\boldsymbol{E}\equiv\left[\rho_1 u,\rho_2 u,\cdots,\rho_n u,\rho u^2+P,\rho uv,\rho uw,(\varepsilon+P)u\right]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-25}$$

$$\boldsymbol{F}\equiv\left[\rho_1 v,\rho_2 v,\cdots,\rho_n v,\rho uv,\rho v^2+P,\rho vw,(\varepsilon+P)v\right]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-26}$$

$$\boldsymbol{G}\equiv\left[\rho_1 w,\rho_2 w,\cdots,\rho_n w,\rho uw,\rho vw,\rho w^2+P,(\varepsilon+P)w\right]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-27}$$

$$\boldsymbol{E}_v\equiv\left[\rho\wp_{1m}\frac{\partial Y_1}{\partial x},\rho\wp_{2m}\frac{\partial Y_2}{\partial x},\cdots,\rho\wp_{nm}\frac{\partial Y_n}{\partial x},\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz},a_1\right]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-28}$$

$$\boldsymbol{F}_v\equiv\left[\rho\wp_{1m}\frac{\partial Y_1}{\partial y},\rho\wp_{2m}\frac{\partial Y_2}{\partial y},\cdots,\rho\wp_{nm}\frac{\partial Y_n}{\partial y},\tau_{yx},\tau_{yy},\tau_{yz},a_2\right]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-29}$$

$$\boldsymbol{G}_v\equiv\left[\rho\wp_{1m}\frac{\partial Y_1}{\partial z},\rho\wp_{2m}\frac{\partial Y_2}{\partial z},\cdots,\rho\wp_{nm}\frac{\partial Y_n}{\partial z},\tau_{zx},\tau_{zy},\tau_{zz},a_3\right]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-30}$$

$$\boldsymbol{S}\equiv[\dot{\omega}_1,\dot{\omega}_2,\cdots,\dot{\omega}_n,0,0,0,0]^{\mathrm{T}} \tag{9-6-31}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_{xx}&\tau_{xy}&\tau_{xz}&k\,\partial T/\partial x\\\tau_{yx}&\tau_{yy}&\tau_{yz}&k\,\partial T/\partial y\\\tau_{zx}&\tau_{zy}&\tau_{zz}&k\,\partial T/\partial z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\1\end{bmatrix} \tag{9-6-32}$$

这里 n 表示混合气体的组分有 n 个。式（9-6-23）就是考虑化学非平衡态时高超声速气体动力学常用的守恒型基本方程组，它被广泛地用于数值计算。最后还应指出的是，在推导上



述方程组时，忽略了辐射传热以及体积力（又称彻体力）的影响，关于辐射传热方面的考虑可参阅文献[50，51，52]。

参 考 文 献

1 Tsien H S(钱学森). Similarity laws of hypersonic flows. J.Math. Phys., 1946, 25: 247～251

2 卞荫贵，徐立功. 气动热力学. 合肥：中国科学技术大学出版社，1997

3 Anderson J D Jr. Hypersonic and high temperature gas dynamics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1989

4 Anderson J D Jr. A survey of modern research in hypersonic aerodynamics. AIAA Paper 84-1578, (1984)

5 Hayes W D, Probstein R F. Hypersonic flow theory (Volume I: Inviscid flows).New York: Academic Press, 1966. (中译本: 严宗毅,孙菽芬译. 高超音速理论. 第 1 卷—无粘流. 北京：科学出版社，1979)

6 Dorrance W H. Viscous hypersonic flows. New York: McGraw-Hill Book Company, 1962

7 Черный Г Г. Течения газа сболъшой сверхзвуковой скоростъю. М осква: Физматгив, 1959 (Chernyi G G. Introduction to hypersonic flows (translated from Russian by Probstein R F), 1961

8 Truitt R W. Hypersonic aerodynamics. New York: Ronald Press, 1959

9 Cox R N, Crabtree L F. Elements of hypersonic aerodynamics. New York: Academic Press, 1965

10 崔清. 高超音速空气动力学. 北京：北京科学教育出版社，1961

11 杜棣荣. 高超音速空气动力学讲义. 哈尔滨：军事工程学院，1962

12 尹协远，夏南. 高超音速空气动力学. 合肥：中国科学技术大学出版社，1982

13 瞿章华，刘伟，曾明，柳军. 高超声速空气动力学. 长沙：国防科技大学出版社，2001

14 张涵信. 高超声速空气动力学. 长沙：国防科技大学出版社，1982

15 黄志澄. 高超声速飞行器空气动力学. 北京：国防工业出版社，1995

16 中国科学技术大学近代力学系. 高超音速空气动力学讲义（上下册）. 北京：中国科学技术大学，1962

17 Bertin J J. Hypersonic aerothermodynamics. Washington: AIAA Inc., 1994

18 Riddell F. Hypersonic flow research. New York: Academic Press, 1962

19 童秉纲，孔祥言，邓国华. 气体动力学. 北京：高等教育出版社，1990

20 钱学森. 物理力学. 北京：科学出版社，1962

21 Bird G A. Molecular gas dynamics. Oxford: Claredon Press, 1976

22 沙夫 S A, 钱伯 P L. 稀薄气体的流动. 徐华舫译. 北京：科学出版社，1988

23 Devienne F M. Rarefied gas dynamics. New York: Pergamon Press, 1960

24 Bird G A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford: Clarendon Press, 1994

25 Moretti G, Abbett M. A time-dependent computational method for blunt body flow. AIAA Journal, 1966, 4(12): 2136～2141
26 卞荫贵，钟家康. 高温边界层传热. 北京：科学出版社，1986
27 Van Driest E R. The problem of aerodynamic heating. Aeronautical Engineering Review, 1956: 26～41
28 Ware G M. Cruz C I. Aerodynamic characteristics of the HL-20. Journal of Spacecraft and Rocket, 1993, 30(5): 529～536
29 Wurster K E, Stone H W. Aerodynamic heating environment definition/thermal protection system selection for the HL-20. Journal of Spacecraft and Rocket, 1993, 20(5): 549～557
30 Anderson J D. Computational fluid dynamics-the basics with applications. New York: McGraw-Hill, 1995
31 Yoon S, Jameson A. Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations. AIAA Journal, 1988, 26:1025～1026
32 Rieger H, Jameson A. Solution of the three-dimensional compressible Euler and Navier-Stokes equations by an implicit LU scheme. AIAA Paper 88-0619, Reno, Nevada, 1988
33 马铁犹. 计算流体动力学. 北京：北京航空学院出版社，1986
34 吴江航，韩庆书. 计算流体力学的理论、方法及应用. 北京：科学出版社，1988
35 忻孝康，刘儒勋，蒋伯诚. 计算流体动力学. 长沙：国防科技大学出版社，1989
36 张涤明，蔡崇喜，章克本等. 计算流体力学. 广州：中山大学出版社，1991
37 苏铭德，黄素逸. 计算流体力学基础. 北京：清华大学出版社，1997
38 王保国，黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法. 北京：国防工业出版社，2000
39 张涵信，沈孟育. 计算流体力学（差分方法的原理和应用）. 北京：国防工业出版社，2003
40 朱自强. 应用计算流体力学. 北京：北京航空航天大学出版社，1998
41 傅德薰. 流体力学数值模拟. 北京：国防工业出版社，1993
42 王承尧，王正华，杨晓辉. 计算流体力学及其并行算法. 长沙：国防科技大学出版社，2000
43 刘导治. 计算流体力学基础. 北京：北京航空航天大学出版社，1989
44 刘顺隆，郑群. 计算流体力学. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，1998
45 王竹溪. 热力学. 北京：人民教育出版社，1960
46 Vincenti W G, Kruger C H. Introduction to physical gas dynamics. New York: John Wiley & Sons, 1965
47 Gupta R N, Yos J M, Thompson R A. A review of reaction rates and thermodynamic and transport properties for an 11 species air model for chemical and thermal nonequilibrium calculation to 30,000K. NASA RP-1232, (1990): or NASA TM 101528, (1990)
48 Yee H C. Semi-implicit and fully implicit shock-capturing methods for hypersonic conservation laws with stiff source terms. AIAA Paper 87-1116, (1987)
49 Bussing T, Eberhardt S. Chemistry associated with hypersonic vehicles. AIAA Paper 87-1292, (1987)



50　Planck M. The theory of heat radiation . New York: Dover Publications, 1959

51　Eckert E R G, Drake R M. Heat and mass transfer. New York: McGraw-Hill, 1959

52　Chandrasekhar S. Radiative transfer. New York: Dover Publications, 1960

习　题

1. 试用完全气体激波关系式和热力学关系式证明：当来流马赫数 M_∞ 满足 $\left(M_\infty^2-1\right)=O(\varepsilon)$ 时跨过正激波的熵增 ΔS 满足

$$\frac{\Delta S}{c_v}=O(\varepsilon^3)$$

式中，$O(\cdot)$ 代表量级；ε 为一个小量；c_v 为定容比热。

2. 与通常中等超声速气流 $(M_\infty<3)$ 相比，高超声速流动有哪些特点？高超声速飞行器的外形有哪些主要特征？

3. 设飞船飞行马赫数 $M_\infty=32.5$，来流温度 $T_\infty=283$ K，并假定比热比 γ 分别为 1.4、1.3、1.2 与 1.13 时，分别使用完全气体的激波关系式计算正激波后的温度。

4. 已知轴对称、锥形流的基本方程组为

$$\frac{\mathrm{d}V_\theta}{\mathrm{d}\theta}+V_r=\frac{a^2\left(V_r+V_\theta\cot\theta\right)}{V_\theta^2-a^2} \tag{*1}$$

$$V_\theta=\mathrm{d}V_r/\mathrm{d}\theta \tag{*2}$$

边界条件为：锥面上　$(\theta=\omega_k)$　$V_\theta=0$　或　$\dfrac{\mathrm{d}V_\theta}{\mathrm{d}\theta}+2V_r=0$　（*3）

激波处 $(\theta=\beta)$

$$(V_t)_2=V_{\infty t}=V_\infty\cos\beta=(V_r)_2 \tag{*4}$$

$$(V_n)_2=\frac{\rho_\infty}{\rho_2}V_\infty\sin\beta=-(V_\theta)_2 \tag{*5}$$

式中，ω_k 为圆锥半顶角，β 为激波角，下标 n 和 t 分别表示沿激波的法向和切向的物理量，下标 ∞ 与 2 分别表示波前与紧靠激波后的物理量；图 9.29 给出了圆锥轴对称绕流图。试证明：在高超声速无粘流动下，激波层中的速度可近似为

$$\begin{cases}\dfrac{V_r}{(V_r)_k}=1-(\theta-\omega_k)^2\\[2mm]\dfrac{V_\theta}{(V_r)_k}=-2(\theta-\omega_k)\end{cases} \tag{*6}$$

这里下标 k 表示锥面上的量；$V_r=V_r(\theta)$，$V_\theta=V_\theta(\theta)$。

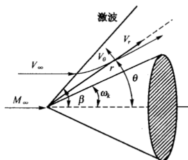


图 9.29　圆锥轴对称绕流

5. 试证明：当 M_∞^4 与 Re_∞ 同一量级时，经典边界层理论中关于法向压力梯度为零（即 $\partial P/\partial y=0$）的结论不成立。能否给出这时边界层法向动量方程的表达式？

6. 借助于式（9－4－52）给出的生成计算网格的方法，试用 FORTRAN 语言或者 C 语句编制绕任意二维物面的网格生成程序并完成几个算例。这里物面形状由 n 个离散点坐标 (x_i,y_i)，$i=1\sim n$ 给出。

7. 真实气体的概念是什么？真实气体与“真实气体效应”之间在概念上有什么重大区别？叙述一下高超声速气流绕钝体流动的整体图像以及高温效应在哪些区域内较显著？

8. 图 9.30 与图 9.31 分别给出了两种高超声速飞行器。图 9.30 是某飞船的构形，该飞船的外形是关于 Z 轴对称的，这里仅画出其中的一部分。当这两个飞行器以相同马赫数作高超声速飞行时，试分析弓形激波后平衡流区、非平衡流区以及近似冻结流区的大致特点？哪一个飞行器的化学非平衡流动区域更大些？为什么？

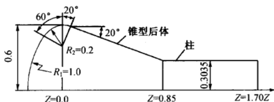


图 9.30　某飞船构形

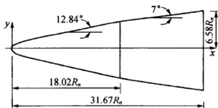


图 9.31　某航天飞行器外形

9. 高超声速飞行中，高温是一个很重要的特征，因此物体表面热流分布的计算一直是人们关注的热点。试分析用通常差分算法计算热流率分布时精度不高的原因？如果 y 方向的热流率用下式计算即

$$q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y}-\rho\sum_{i=1}^{n}\left(\wp_{im}h_i\frac{\partial Y_i}{\partial y}\right) \tag{*7}$$

式中，Y_i 为质量比数；$\wp_{im}$ 为多组元扩散系数；h_i 为组元 i 的焓。如果不考虑化学反应，则式（*7）简化为

$$q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{*8}$$

试问如何才能提高式（*8）中物面热流率的计算精度？在选用同样精度的格式时，用有限体积法与差分法分别去求解 N－S 方程组并得到相应的热流率分布，请分析上述哪一种方法得到的热流率分布更接近实验测量值？为什么？在选用有限体积法的情况下，如果将格式的精度提高，问在网格划分不变的情况下，这时计算出的物面热流率分布（与实验值比较）是变好还是变差？为什么？

第 10 章　气动声学基础

气动声学是建立在声学与流体力学基础上的一门交叉性和边缘性的新分支。它所研究的是流体自身以及流体与固体相互作用而发声的机理，建立气动力与声性能之间的关系式，在此基础上找出降低气动噪声的方法。20 世纪 50 年代初，莱特希尔（Lighthill M.J.）采用与古典声学[1]类比的方法，引入拟声源的概念推出了 Lighthill 基本方程奠定了气动声学的理论基础[2, 3]。最初的 Lighthill 方程的求解是在自由空间的假设下，针对那些固壁边界不起主要作用的问题（例如研究喷流区的噪声），采用 Lighthill 的基本理论进行求解，并且可以得到较满意的结果。他指出，这种由湍流引起的喷流噪声具有四极子声源特性、与速度的八次方成正比。他的基本理论对指导喷气发动机设计、降低气动噪声起了很大作用[4]。然而，大量的试验表明在许多情况下，流体与固壁边界相互作用对声音的产生起着重要的影响作用，于是 1955 年 Curle（柯尔）应用 Kirchhoff（基尔霍夫）方法首先将 Lighthill 基本方程进行了推广，考虑了静止的固壁边界所带来的影响[5]。研究结果表明：固壁边界的作用相当于在整个固壁边界上分布着偶极子源，并且在每一点上偶极子源的强度等于固壁表面在该点处作用在流体上的力。在这种情况下，声场可由四极子源和偶极子源迭加组成。Curle 成功地解决了湍流中静止小物体的风鸣声[6]、圆柱旋涡脱落诱发的噪声[7]等问题。然而 Curle 的理论并未涉及到运动的固壁边界与流体的相互作用而导致的发声问题，1969 年 Ffowcs Williams 和 Hawkings（福茨威廉姆斯和霍金斯）采用了广义函数法将 Curle 的结果进行了拓展，考虑了运动固壁边界对发声的影响，得到了 FW-H 方程[8]。之后，Farassar（法拉赛）十分巧妙的变换了 FW-H 方程的积分形式，并使它能用于物体的运动为亚声速、跨声速和超声速的情况[9~12]。值得注意的是，无论是 Curle 方程或者 FW-H 方程均假定声源传播的介质为静止的，显然这个假定限制了对实际问题的应用，例如轴流压气机或者涡轮所产生的声波，它们都是在运动的介质中传播的，所以考虑运动介质对声波传播的影响是非常必要的。1974 年 Goldstein（戈尔茨坦）用格林函数方法研究了均匀运动介质下运动物体的发声问题[13]，得到了广义的 Lighthill 方程[14]。另外，应该看到，气动声学是朝着多个方向发展的，一方面可以按照 Lighthill 的基本思想继续深入研究，另一方面许多学者也从不同的角度对流体所产生声音的机理，声波与湍流的相互作用等问题进行细致的研究。从目前文献上所反映出的这些学者的工作上看，几乎都毫无例外地显示出声波的产生是与流体中的旋涡以及旋涡之间的相互作用密切相关；声波能量的形成与转换也是通过这些非线性的相互作用来完成。因此这些问题的深入研究，是目前气动声学基本理论研究的又一个重要方向[15]。对于 FW-H 方程，自 1969 年提出至今已三十多年过去了，人们围绕这个方程已作了许多改进与进一步完善。目前对于 FW-H

方程主要有时域解与频域解两大类形式，它们各自具有自身的特点并且有相应的应用范围。Farassar 在计算螺旋桨辐射声场时，考虑积分表面为不可穿透即积分面与物面重合，并且给出了时域中 FW-H 方程的亚声速解与超声速解。在此基础上，美国 NASA Langley 中心还开发了一套预测直升飞机旋翼离散频率噪声计算的“WOPWOP”程序；2001 年文献[16]从延迟时间出发，进一步完善 FW-H 方程在时域解的形式，使它在求解运动积分网格时更有效。2002 年文献[17]在假设声源作亚声速匀速直线运动的情况下对于 FW-H 方程的频域公式进行了完善，并对飞机起落架的噪声进行了计算。为了节省计算时间及计算资源，采取将 FW-H 方程的积分方法与计算气动声学（CAA）的数值模拟相结合，以便高效而准确的去预测声远场，显然这也是一个很好的发展方向。

本章首先扼要的介绍 Lighthill 方程以及广义 Lighthill 方程，然后介绍航空发动机两个关键部件压气机与涡轮的噪声问题，最后讨论一下声学数值计算的高精度格式问题。

§ 10.1 运动介质中声学的基本方程及声场中的能量关系

10.1.1 运动介质中声学的基本方程

声音是一种弹性波，声波传递的过程中必然引起介质中压强的交替变化，也就是说声波造成了介质质点的振荡。如果质点振荡的方向与声波传播的方向相同，则这种波叫纵波，如果质点振荡的方向与声波传播的方向垂直，则这种波叫横波。纵波是靠介质的压缩与膨胀来传递信息，所以又称为胀缩波；而横波是靠剪切应力传递信息故又称切变波；对于流体，包括气体与液体，其承受剪切应力的能力很小，因此流体中声波的表现形式主要是纵波，因此本章重点讨论的也就是这类纵声波。设声波在一个粘性不起主要作用的流体中传播，因此描述声波运动最基本的方程应是 Euler 方程组，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=\rho q_0 \tag{10-1-1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla \boldsymbol{V}\right)=-\nabla P+\rho \boldsymbol{f} \tag{10-1-2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla S=0 \tag{10-1-3}$$

式中，ρ、$\boldsymbol{V}$、P 与 S 分别表示流体的密度、速度矢量、压强与熵；$\boldsymbol{f}$ 为单位质量的流体所具有的质量力，q_0 为外部作用于流体的质量源。而状态方程的微分形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla P\right) \tag{10-1-4}$$



这里声速 a 定义为

$$a^2=(\partial P/\partial\rho)_s \tag{10-1-5}$$

对于定常流动（即在没有任何形式的非定常扰动时），则式（10-1-1）～式（10-1-4）简化为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot(\rho_1\boldsymbol{V}_1)=0\\&\rho_1\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla\boldsymbol{V}_1=-\nabla P_1\\&\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla S_1=0\\&\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla P_1=a_1^2\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla\rho_1\end{aligned}\right\} \tag{10-1-6}$$

式中，下标1表示定常流动时的值。

下面引进流场的扰动量 ρ'、P'、$\boldsymbol{V}'$、S' 与 a'，其定义为

$$\left.\begin{aligned}&\rho'=\rho-\rho_1,P'=P-P_1,\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_1\\&S'=S-S_1,(a')^2=a^2-(a_1)^2\end{aligned}\right\} \tag{10-1-7}$$

并且满足

$$\frac{|\boldsymbol{V}'|}{a}\ll1,\ \frac{P'}{P_1}\ll1,\ \frac{\rho'}{\rho_1}\ll1,\ \frac{S'}{S_1}\ll1,\ \frac{(a')^2}{(a_1)^2}\ll1 \tag{10-1-8}$$

将式（10-1-7）代到式（10-1-1）～式（10-1-4）并省略高阶项后，可得

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_1\boldsymbol{V}'+\rho'\boldsymbol{V}_1)=\rho_1q_0 \tag{10-1-9}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}'}{\partial t}+\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{V}'\cdot\nabla\boldsymbol{V}_1\right)+\rho'\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla\boldsymbol{V}_1=-\nabla P'+\rho'\boldsymbol{f} \tag{10-1-10}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t}+\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla S'+\boldsymbol{V}'\cdot\nabla S_1=0 \tag{10-1-11}$$

$$(a_1)^2\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla\rho'+\boldsymbol{V}'\cdot\nabla\rho_1\right)+(a')^2\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla\rho_1=\frac{\partial P'}{\partial t}+\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla P'+\boldsymbol{V}'\cdot\nabla P_1 \tag{10-1-12}$$

上面四个方程便构成了运动介质中声学的基本方程组。其实这个结果与线化的气体动力学Euler 基本方程组是完全一致的。如果背景流场原来是静止的，即 $\boldsymbol{V}_1=0$，并且 ρ_1,P_1 与 a_1 都不随时间变化（但它们可以是空间位置的函数），显然这个背景流场本身不产生声波，而这时流动的改变全是由于外界的扰动所造成。设扰动造成的声压为 P'，相应的密度变化为 ρ'，并认为其热力过程是绝热的，于是在注意到经典声学[18]常采用的近似处理（即认为迁移导数项与非定常导数项相比是小量，可省略）以及仅保留扰动量的线性项的情况下式（10-1-9）与式（10-1-10）可简化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_1\boldsymbol{V}')=\rho_1 q_0\\&\frac{\partial(\rho_1\boldsymbol{V}')}{\partial t}=\rho'\boldsymbol{f}-\nabla P'\end{aligned}\right\}\qquad(10-1-13)$$

消去速度，并将密度的扰动变为压强的扰动之后，则有

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}-\nabla^2P'=\rho_1\frac{\partial q_0}{\partial t}-\nabla\cdot(\rho'\boldsymbol{f})\qquad(10-1-14)$$

或者

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}-\nabla^2P'=\frac{1}{a_1^2}\left(1-\frac{a_1^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}+\rho_1\frac{\partial q_0}{\partial t}-\nabla\cdot(\rho'\boldsymbol{f})\qquad(10-1-14)^*$$

注意上面两式应用了小扰动时 P' 与 ρ' 之间满足 $P'=a^2\rho'$ 的关系。如果无质量源和体积力，则式（10－1－14）可简化为

$$\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}-a^2\nabla^2P'=0\qquad(10-1-15)$$

这里 $\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla$ 为拉普拉斯算子。式（10－1－15）就是经典的齐次、变系数波动方程[19]；如果背景流场是均匀的，则系数变为常数，也就是说这时式（10－1－15）又可简化为

$$\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}-a_1^2\nabla^2P'=0\qquad(10-1-16)$$

10.1.2 运动介质中的声能量关系

在声学中，声波伴有的声能量为动能与内能之和；通常将单位体积里的声能量称之为声能量密度并记作 E，其表达式为[20]

$$E\equiv\frac{1}{2}\rho_1|\boldsymbol{V}'|^2+\frac{1}{2}\frac{(P')^2}{\rho_1a_1^2}=\frac{1}{2}\rho_1|\boldsymbol{V}'|^2+\frac{a_1^2(\rho')^2}{2\rho_1}\qquad(10-1-17)$$

声波伴有的声能量通量即声强，为

$$\boldsymbol{I}=P'\boldsymbol{V}'=\rho'\boldsymbol{V}'a_1^2\qquad(10-1-18)$$

可以证明 E 与 $\boldsymbol{I}$ 之间有如下关系[20]，即

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{I}=0\qquad(10-1-19)$$

应该指出，对于运动介质的声学问题，给出合乎物理逻辑的声能量密度或声强的定义仍是一个有待进一步探讨的问题[21, 22]。声音作为一种波，它必然有频率 f、声速 a 和波长 λ；它



们三者的关系为 $\lambda = a / f$；频率是单位时间内的振荡次数，其单位为 Hz；人耳能听到的声频范围是 20 Hz 到 20 kHz；高于 20 kHz 的称为超声波；低于 20 Hz 的称为次声波。当前技术上能够接收到的声波频率在 10^{-4}～10^{14} Hz 之间；声速的大小随介质的性质、环境条件（主要是温度）而有差异，例如在常温下，声音在空气中传播的速度约为 330 m/s，而在水中为 1 500 m/s；另外，在实际工程问题中，遇到的大都不是单频的纯音，而是有一定宽度的频带；测量的也不是声压，而是它的有效值，其定义为

$$P_{ef} \equiv \left[\frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} (P')^2 \, dt' \right]^{1/2} \tag{10-1-20}$$

有效声强是指在垂直于声波传播方向的能量通量按时间的平均值，即

$$I_{ef} = \frac{1}{T} \int_{t'=t}^{t+T} P' \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{V}' dt' \tag{10-1-21}$$

式中，$\boldsymbol{j}$ 为声波传播方向的单位矢量。所以通常所讲的声强其实就是指有效声强，因此在下文中将 I_{ef} 简记作 I；在声学中，度量声压和声强多采用声压级和声强级，其定义是

1. 声压级以 SPL 表示

$$\mathrm{SPL} = 20 \lg \frac{P_{ef}}{P_{ref}} \tag{10-1-22}$$

这里 P_{ref} 为参考声压，一般取 2×10^{-5} Pa 。

2. 声强级以 SIL 表示

$$\mathrm{SIL} = 10 \lg \frac{I}{I_{ref}} \tag{10-1-23}$$

式中，I_{ref} 为参考声强，一般取 10^{-12} W/m²。为了对声压级的大小有一个粗略的数量概念，下面举一些典型例子：人耳对频率为 1 kHz 声音的可听阈为 0 dB（分贝）；微风轻轻吹动树叶的声音约 14 dB；在房间中高声谈话声（相距 1 m 处）约 68 dB～74 dB；交响乐队演奏声（相距 5 m 处）约 84 dB；飞机大功率发动机的声音（相距 5 m 处）约 140 dB；通常说一声音比另一声音声压大一倍指的是大 6 dB；人耳对声音强弱的分辨能力约 0.5 dB；

§ 10.2　运动介质中的广义 Lighthill 方程及其解

10.2.1　三维有界空间中声学问题的 Green（格林）函数法

今考虑有质量源、无质量力的三维有界空间的声学问题。此时式（10-1-14）被简化为

$$\frac{\partial^2 P'(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 P'(\boldsymbol{r},t)+f_1(\boldsymbol{r},t)\quad(\boldsymbol{r}\in\Omega)\tag{10-2-1}$$

其初、边值条件为

$$\left.\begin{aligned}&\left[\alpha(\boldsymbol{r})\frac{\partial P'}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r})P'\right]\bigg|_{\partial\Omega}=f_2(\boldsymbol{r}_0,t)\\&P'\big|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r}),\quad \frac{\partial P'}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r})\end{aligned}\right\}\tag{10-2-2}$$

式中，$\partial\Omega$ 是域 Ω 的边界。

由偏微分方程基础知识可知[23~25]，方程式（10-2-1）连同初边值条件式（10-2-2）的求解可以归结为求下列特殊定解问题的 Green（格林）函数，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},t;\ \boldsymbol{r}',t')}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 G(\boldsymbol{r},t;\ \boldsymbol{r}',t')+\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \qquad (\boldsymbol{r}\in\Omega)\\ \left[\alpha(\boldsymbol{r})\dfrac{\partial G}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r})G\right]\bigg|_{\partial\Omega}=0\\ G\big|_{t<t'}=0\end{cases}\tag{10-2-3}$$

这里 δ 为 Dirac 函数（又称 δ 函数）。一旦获得了式（10-2-3）的解即格林函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 后，则原定解问题式（10-2-1）与式（10-2-2）的解便可表达为

$$\begin{aligned}P'(\boldsymbol{r},t)=&\int_0^t\left[\iiint_\Omega G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')f_1(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right]\mathrm{d}t'+\iiint_\Omega\Big[G(\boldsymbol{r},t;\ \boldsymbol{r}',t')\big|_{t'=0}\psi(\boldsymbol{r}')-\\&\frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\bigg|_{t'=0}\varphi(\boldsymbol{r}')\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{r}'+a^2\int_0^t\left[\oint\!\!\oint_{\partial\Omega}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\frac{f_2(\boldsymbol{r}',t')}{\alpha(\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}S'\right]\mathrm{d}t'\end{aligned}\tag{10-2-4}$$

式中，$\mathrm{d}S'$ 为域 Ω 边界上的面积积分元素[26]；$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\equiv\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$ 为体积积分元素。格林函数 G 具有两点重要的性质：一点是场点与源点的对称性；另一点是时间反向，即

$$G(\boldsymbol{r},t;\ \boldsymbol{r}',t')=G(\boldsymbol{r}',t;\ \boldsymbol{r},t')=G(\boldsymbol{r}',-t';\ \boldsymbol{r},-t)=G(\boldsymbol{r},t-t';\ \boldsymbol{r}',0)\tag{10-2-5}$$

上式表明，在点 B 处观察声源于点 A 处所发出的声波与把同样的声源放置于 B 处而在点 A 处观测该声源所发声时的结果是一致的，这就是常讲的 Helmholtz（亥姆霍兹）互反定理。

10.2.2 Lighthill 方程及其在均匀运动介质中的推广

Lighthill 方程是气动声学的基本方程，它可由连续方程与动量方程导出。令 (y_1,y_2,y_3) 为直角笛卡尔坐标系，于是连续方程与动量方程分别为



$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla \cdot(\rho \boldsymbol{V})=\rho q_0 \tag{10-2-6}$$

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t}=-\nabla \cdot(\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+P\boldsymbol{I}-\Pi)+\rho \boldsymbol{f}=-\nabla \cdot(\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{\pi})+\rho \boldsymbol{f} \tag{10-2-7}$$

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \boldsymbol{\Pi}-P\boldsymbol{I}=\left[-P+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\theta\right]\boldsymbol{I}+2\mu \boldsymbol{D} \tag{10-2-8}$$

式中，$\boldsymbol{\Pi}$ 与 $\boldsymbol{\pi}$ 分别为粘性应力张量与应力张量[29]；θ 为胀量；$\boldsymbol{I}$ 为单位张量；$\boldsymbol{D}$ 为应变速率张量。

将上面三式在直角笛卡坐标系中写为分量形式便为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y_k}(\rho v_k)=\rho q_0 \tag{10-2-9}$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y_k}(\rho v_k v_i-\pi_{ki})+\rho f_i \tag{10-2-10}$$

$$\pi_{ik}=\pi_{ki}=\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}+\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right)+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\theta\delta_{ik}-P\delta_{ik}=\Pi_{ik}-P\delta_{ik} \tag{10-2-11}$$

首先将（10－2－7）式两边取散度后并用式（10－2－6）消去 $\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})$ 项，然后将所得到的方程两边同减去 $\nabla^2\left(a_1^2\rho\right)$ 项，便得到

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}-a_1^2\nabla^2\rho=\frac{\partial(\rho q_0)}{\partial t}+\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})-\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{f}) \tag{10-2-12}$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 的定义为

$$\boldsymbol{T}\equiv\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{\Pi}+\left(P-a_1^2\rho\right)\boldsymbol{I} \tag{10-2-13}$$

显然如果省略粘性应力张量，则 $\boldsymbol{T}$ 便退化为 $\boldsymbol{T}_1$，其表达式为

$$\boldsymbol{T}_1\equiv\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+\left(P-a_1^2\rho\right)\boldsymbol{I} \tag{10-2-14}$$

相应地式（10－2－12）简化为

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}-a_1^2\nabla^2\rho=\frac{\partial(\rho q_0)}{\partial t}+\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}_1)-\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{f}) \tag{10-2-15}$$

这个方程在形式上突出了声的波动方程性质，显然它是个非齐次的波动方程。方程的右端项起着声源的作用，统称为声源项，其中质量源 q_0、质量力 $\boldsymbol{f}$ 与应力张量 $\boldsymbol{T}_1$ 分别起着单极子、偶极子与四极子源的作用。在不考虑 q_0 与 $\boldsymbol{f}$ 的情况下，（10－2－12）式简化为

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}-a_1^2\nabla^2\rho=\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}) \tag{10-2-16}$$

显然在直角笛卡儿坐标系(y_1, y_2, y_3)下，$\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})$可表达为

$$\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})=\frac{\partial^2 T_{ik}}{\partial y_i \partial y_k} \tag{10-2-17}$$

对于在远场未受任何扰动的流体，$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$、$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y_i \partial y_k}$等项均为零，因此很容易由式（10-2-16）得出关于ρ'的波动方程，即

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-a_1^2\nabla^2\rho'=\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\boldsymbol{T}^*\right)=\frac{\partial^2 T_{ik}^*}{\partial y_i \partial y_k} \tag{10-2-18}$$

式中

$$\rho'\equiv\rho-\rho_1,\quad P'\equiv P-P_1 \tag{10-2-19}$$

$$T_{ik}^*=\rho v_i v_k-\Pi_{ik}+\delta_{ik}\left(P'-a_1^2\rho'\right) \tag{10-2-20}$$

这里$\boldsymbol{T}^*$称为 Lighthill 应力张量；方程式（10-2-18）称为 Lighthill 基本方程。仔细分析该方程可以发现，ρ'是一个很小的量，因此数值求解该方程时会对数值格式提出较高的要求。另外，必须看到：Lighthill 关于气动声学的基本方程是相对于观察者而言，介质为静止的条件下得到的。在有些情况下，例如分析压气机产生的声音，这时运动介质对声传播的影响是不能忽略的。因此下面有必要讨论 Lighthill 方程在运动介质下的推广问题。

假设介质平均运动速度矢量沿着y_1方向，其速度模为U，引入一个随介质运动的坐标系(y_1', y_2', y_3')即

$$y_k'=y_k-\delta_{1k}Ut \tag{10-2-21}$$

因 Lighthill 方程是由连续方程和动量方程推出的，在 Calileo（伽利略）变换下，动量方程是不变的，因此在运动坐标系(y_1', y_2', y_3')下 Lighthill 方程仍是

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2 \rho'}{\partial y_i' \partial y_k'}=\frac{\partial^2 T_{ik}''}{\partial y_i' \partial y_k'} \tag{10-2-22}$$

式中

$$T_{ik}''\equiv\rho v_i'' v_k''-\Pi_{ik}+\delta_{ik}\left(P'-a_1^2\rho'\right) \tag{10-2-23}$$

$$v_i''=v_i-\delta_{1i}U \tag{10-2-24}$$

也就是说，$\boldsymbol{T}''$是按相对速度v_i''来表示的应力张量；注意这里上标″既不表示扰动量，也不表示求偏导数，它仅仅是一个记号，式（10-2-24）与式（10-2-23）给出了带上标″量的物理含义。另外，还需要指出的是通常人们习惯于在固定坐标系中讨论声学问题，因此引入固定坐标系(y_1, y_2, y_3)，但仍保留相对速度项，于是式（10-2-22）变为[13]



$$\frac{D_0^2\rho'}{Dt^2}-a_1^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial y_i\partial y_k}=\frac{\partial^2 T_{ik}''}{\partial y_i\partial y_k} \tag{10-2-25}$$

式中

$$\frac{D_0}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{10-2-26}$$

方程式（10－2－25）被称为广义的 Lighthill 方程，它是 Lighthill 基本方程式（10－2－18）在运动介质中的一种推广。

10.2.3　考虑固体边界影响的广义 Lighthill 方程的求解

今考虑一个体积为 Ω，边界面为 S（即 $\partial\Omega$）并且运动速度为 V_s 的运动物体发声问题。假定 T_{ik}'' 是予先已知的，则由运动介质声学基本理论可以得到[14]

$$\begin{aligned}\rho'(\boldsymbol{r},t)=&\frac{1}{a_1^2}\int_{-t}^{t}\left[\iiint_{\Omega}G\frac{\partial^2 T_{ik}''}{\partial y_i\partial y_k}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right]\mathrm{d}t'+\int_{-t}^{t}\left\{\oiint_{\partial\Omega}\left[G\left(\frac{\partial}{\partial n}+\frac{V_n''}{a_1^2}\frac{D_0}{Dt}\right)\rho'-\right.\right.\\&\left.\left.\rho'\left(\frac{\partial}{\partial n}+\frac{V_n''}{a_1^2}\frac{D_0}{Dt}\right)G\right]\mathrm{d}S(\boldsymbol{r}')\right\}\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{10-2-27}$$

这里 D_0/Dt 的定义同式（10－2－26）；$G\equiv G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 为 Green 函数，它为满足下列方程

$$\begin{cases}\nabla^2 G-\dfrac{1}{a_1^2}\dfrac{D_0 G}{Dt^2}=-\delta(t-t')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\ G=\dfrac{D_0 G}{Dt}=0 \qquad\qquad (t<t')\end{cases} \tag{10-2-28}$$

的解。另外，式中

$$\begin{cases}V_n''\equiv\boldsymbol{V}''\cdot\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{V}''=\boldsymbol{V}_s-\boldsymbol{i}U\\ \dfrac{\partial}{\partial n}\equiv n_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}\end{cases} \tag{10-2-29}$$

显然，适当整理式（10－2－27）又可得到[28]

$$\begin{aligned}\rho'(\boldsymbol{r},t)=&\frac{1}{a_1^2}\int_{-t}^{t}\left[\iiint_{\Omega}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i\partial y_k}T_{ik}''\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right]\mathrm{d}t'+\frac{1}{a_1^2}\int_{-t}^{t}\left[\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial y_i}f_i^*\mathrm{d}S(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}t'+\\&\frac{1}{a_1^2}\int_{-t}^{t}\left[\oiint_{\partial\Omega}\rho' V_n''\frac{D_0 G}{Dt}\mathrm{d}S(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{10-2-30}$$

式中，f_i^* 定义为

$$\begin{cases} f_i^* \equiv -n_i P' + n_k \Pi_{ik} \\ P' = P - P_1 \end{cases} \tag{10-2-31}$$

这里 f_i^* 是通过固壁边界作用在流体单位面积上沿 i 方向力的分量。方程式（10-2-30）便是考虑固体边界存在并且介质运动时广义 Lighthill 方程的解。式中第一项为体积源所产生的声音，该项为四极子源；第二项为作用在流体边界上脉动力所产生的声音，这一项为偶极子源；第三项为流体体积位移所产生的声音，它是单极子源。

§ 10.3　声辐射点源的基本解以及相关的 Green 函数

10.3.1　简单源及其相关的 Green 函数

这里简单源包括单极子点源与脉动球源。设点源位于坐标系的原点，从原点辐射出球面对称的声波。在球坐标系中波动方程式（10-1-15）变为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial P'}{\partial r}\right)-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}=0 \tag{10-3-1}$$

为寻求形式为 $P'=\dfrac{f(r,t)}{r}$ 的解，将其代入上式，可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \tag{10-3-2}$$

这恰好变成以半径 r 为坐标变量的一维波动方程，这个方程具有下面形式的解

$$f=f_1(r-at)+f_2(r+at) \tag{10-3-3}$$

式中，f_1 与 f_2 是任意函数；f_1 代表外行波；f_2 代表内传波。对于辐射点源，这里只取外行波，即

$$P'=\frac{f_1(r-at)}{r}\equiv\frac{f_1^*\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{r} \tag{10-3-4}$$

为了确定函数 f_1^* 的具体形式，需要特定的物理条件与初、边值条件。因此，这里想象在坐标系原点处放置一个脉动球源，其球心与坐标系原点重合。现在研究这个脉动球源所导致的声压 P' 值。设一平均半径为 r_0 的球体其表面作均匀的微小涨缩振动，因此在周围介质中辐射了声波，如图 10.1 所示。因为球面的振动过程具有各向均匀的脉动性质，所以这时的辐



射是均匀的球面波。另外，球体表面的微小涨缩振动使得它表面上的径向速度处处都是关于时间的同一函数$U(t)$，于是气体离开球面的流率为

$$4\pi r_0^2 U(t)=S(t) \tag{10-3-5}$$

由径向的线化动量方程

$$\rho\frac{\partial V_r'}{\partial t}=-\frac{\partial P'}{\partial r} \tag{10-3-6}$$

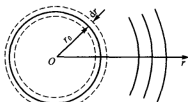


图 10.1　脉动球源的声波辐射

令$V_r'=S/\left(4\pi r_0^2\right)$，并将式（10-3-4）代入式（10-3-6），得到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f_1^*\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{\partial r}-\frac{f_1^*\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{r^2}=-\frac{\rho}{4\pi r_0^2}\frac{\partial S}{\partial t}\quad（在 r=r_0 上） \tag{10-3-7}$$

如果前面所述的振动球很小（更确切的说，如果r_0比所辐射声波的波长小得多时），这时的脉动球便为声的简单源。对于这种情况，当$r=r_0$时f_1^*/r比$\mathrm{d}f_1^*/\mathrm{d}r$大得多，由此可得到

$$f_1^*\approx\frac{\rho}{4\pi}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{10-3-8}$$

因此在距离坐标原点为r处并且时间为t时声压$P'(r,t)$为[18]

$$P'(r,t)\approx\frac{\rho}{4\pi r}S'\left(t-\frac{r}{a}\right) \tag{10-3-9}$$

其中$S'(Z)\equiv\mathrm{d}S(Z)/\mathrm{d}Z$；$Z=t-\dfrac{r}{a}$；这里函数$S$给出了离开声源中心的气体总流量。显然，如果离开声源中心的流动是突然开始向外的，即$t<0$时为0，而$t>0$时为1，则这时所发生的压力波应为脉冲波$\delta\left[t-(r/a)\right]\rho/(4\pi r)$；如果是稳定的向外流动，则这时不产生声音；这也就是说仅当流动变化时才发出声音。下面讨论当单极子源分布在某一个体积Ω域时，场点$(\boldsymbol{r},t)$处声压$P'(\boldsymbol{r},t)$的计算。该问题的求解可借助于Green函数法，其具体表达式为

$$\begin{aligned}P'(\boldsymbol{r},t)&=\rho\int_{-\infty}^{\infty}\left[\iiint_{\Omega}q(\boldsymbol{r}',t')\frac{\delta\left(t-t'-\dfrac{R}{a}\right)}{4\pi R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}t'\\&=\rho\iiint_{\Omega}\frac{q\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{a}\right)}{4\pi R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{10-3-10}$$

式中，q 为质量源；R 表示源点 $(\boldsymbol{r}')$ 到场点 $(\boldsymbol{r})$ 的距离，即

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \tag{10-3-11}$$

引进函数 $g(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$，它代表了单极子源的本质，并且是波动方程的、具有球面对称问题的基本解。这里函数 g 的定义为

$$g(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{\delta\left(t-t'-\dfrac{R}{a}\right)}{4\pi R} \tag{10-3-12}$$

如果声源是简谐的，$S=S_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则借助于式（10-3-9）得到

$$\begin{cases} P'=P'_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=-\dfrac{\mathrm{i}k\rho a}{4\pi r}S_\omega \exp[\mathrm{i}k(r-at)] \\ k=\dfrac{\omega}{a}=\dfrac{2\pi}{\lambda} \end{cases} \tag{10-3-13}$$

式中，P'_ω 为

$$P'_\omega=-\frac{\mathrm{i}k\rho a}{4\pi r}S_\omega \exp[\mathrm{i}kr] \tag{10-3-14}$$

可以验证 P'_ω 满足 Helmholtz 方程。因此

$$g_\omega(\boldsymbol{r},0)=-\frac{1}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} \tag{10-3-15}$$

或者

$$g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} \tag{10-3-16}$$

可以看出它是 Helmholtz 方程球面对称问题的基本解。式中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，式（10-3-16）是声源放置在 $\boldsymbol{r}'$ 处的情况，而式（10-3-15）的声源放置在坐标系原点。另外，g_ω 满足方程

$$\nabla^2 g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+k^2 g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{10-3-17}$$

这说明 g_ω 也是格林函数。事实上如果假设声场作简谐振荡，声压用式（10-3-13）给出，于是将它代入到一般非齐次的波动方程

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\nabla^2 P'=-f(\boldsymbol{r},t) \tag{10-3-18}$$

并且假设源项也是谐振的，具有因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，因此立即可以得到

$$\nabla^2 P'_\omega+k^2 P'_\omega=f_\omega(\boldsymbol{r}),\quad k=\frac{\omega}{a} \tag{10-3-19}$$

这个方程就是 Helmholtz 方程。于是源点在 $\boldsymbol{r}'$ 处，测量点为 $\boldsymbol{r}$ 时该处的声压为



$$P'(\boldsymbol{r},t)=-\mathrm{i}k\rho aS_\omega g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{10-3-20}$$

最后讨论一下单极子源作匀速直线运动时产生的声场。设单极子源以速度 $\boldsymbol{V}_1$ 作匀速直线运动，源的强度为

$$q(\boldsymbol{r}',t)=q_0(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{V}_1t) \tag{10-3-21}$$

式中，$\delta(\cdot)$ 为 Dirac（狄拉克）函数，又称 δ 函数（或单位脉冲函数）。

由式（10－1－14）可知，该问题所服从的波动方程为

$$\nabla^2P'-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2P'}{\partial t^2}=-\rho_1\frac{\partial}{\partial t}\left[q_0(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{V}_1t)\right] \tag{10-3-22}$$

引进函数 ψ 使 $P'=\partial\psi/\partial t$，因此

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\rho_1q_0(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{V}_1t) \tag{10-3-23}$$

该方程所对应的格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi R}\delta\left(t-t'+\frac{R}{a_1}\right) \tag{10-3-24}$$

式中，$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 为声源点 $\boldsymbol{r}'$ 到观察点 $\boldsymbol{r}$ 之间的距离。

10.3.2　偶极子声源

对于声源为简谐振荡的情况，将强度为 S_ω 的源放在 $\boldsymbol{b}/2$ 处，而强度为 $-S_\omega$ 的源放在 $-\boldsymbol{b}/2$ 处，并且两源之间的矢量距离 $\boldsymbol{b}$ 的模比波长 λ 小得多。借助于式（10－3－20）便有

$$\begin{aligned}P'(\boldsymbol{r},t)&=P_\mathrm{d}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=-\mathrm{i}k\rho aS_\omega\left[g_\omega(\boldsymbol{r},\frac{1}{2}\boldsymbol{b})-g_\omega(\boldsymbol{r},-\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\&=-\mathrm{i}k\rho a\left[\boldsymbol{D}_\omega\cdot\nabla_0g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\right]_{r_0=0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=-k^2D_\omega\frac{\rho a}{4\pi r}(\cos\theta)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\exp(\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t)\end{aligned} \tag{10-3-25}$$

式中，P_d 是简谐偶极子源的声压幅值；$\boldsymbol{D}_\omega$ 是频域中讨论的偶极子强度矢量，$\boldsymbol{D}_\omega\equiv S_\omega\boldsymbol{b}$，而 D_ω 是其幅值；∇_0 是关于源点位置的梯度算子（这是为便于区别对场点的梯度）；θ 是偶极子矢量与从偶极子点指向场点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角。

对于偶极子的远场，即 $kr\gg1$ 时，则有

$$P'\to-\rho a\frac{k^2D_\omega}{4\pi r}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t} \tag{10-3-26}$$

值得注意的是，偶极子声源辐射声场与脉动球源辐射声场有一个很重要的区别在于偶极子声源辐射与 θ 角有关，即在声场中同一距离不同方向的位置上声压不一样，例如在 $\theta=\pm90^\circ$ 的

方向上，从两个小球源来的声波恰好幅值相等，相位相反，因而全部抵消，合成声压为零，而在$\theta=0°$或180°的方向上，从两个小球源来的声波幅值及相位都近于相等，因而迭加加强，合成声压最大。最后，简单介绍一下偶极子源作匀速直线运动时产生的声场。令偶极子源以速度$\boldsymbol{V}_1$作匀速直线运动，该问题所遵循的基本方程为

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\nabla^2 P'=-\frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{V}_1 t)] \tag{10-3-27}$$

令$P'=\nabla\cdot\boldsymbol{B}$，并且假定$B_i$为$\boldsymbol{B}$的分量，则上式变为

$$\nabla B_i-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2}=f_i(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{V}_1 t) \tag{10-3-28}$$

因此，很容易得到式（10-3-28）所对应的Green函数，进而得出B_i的表达式。

10.3.3 四极子声源

这里采用这样一种约定：用由汇到源的方向矢量来表示偶极子的方向，因此四极子源可以看作两个反向偶极子并列，所以这样组成的四极子源应该是一个二阶张量$\boldsymbol{Q}_{ij}$，图10.2表示了位于x_1x_2平面内的四极子。在三维空间中有九个可能存在的四极子并可以表示为一个类似于应力张量的矩阵

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23}\\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33}\end{bmatrix}$$

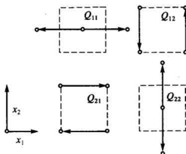


图 10.2　在 x_1x_2 平面的四极子

应当指出：上述相互之间的类似绝不是偶合，它是一种很好的表达方法。在气体动力学发声的理论研究中，四极子声源是相当重要的[29~31]。事实上由Lighthill方程（即式（1.9.81））

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\nabla^2\left(a_1^2\rho\right)=\frac{\partial\left(\rho q_0\right)}{\partial t}+\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}_1)-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{f}) \tag{10-3-29}$$

式中

$$\boldsymbol{T}_1=\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+(P-a_1^2\rho)\boldsymbol{I} \tag{10-3-30}$$

在式（10-3-29）中，质量源q_0与质量力$\boldsymbol{f}$分别起着单极子源与偶极子源的作用；而Lighthill应力张量$\boldsymbol{T}_1$则为四极子源，它是流动噪声的根源。

对于作匀速直线运动的四极子源，它产生的声场所满足的基本方程为



$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\nabla^2 P'=\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left[T_{ik}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{V}_1 t)\right] \tag{10-3-31}$$

式中，$\boldsymbol{V}_1$ 为四极子源作匀速直线运动时的速度矢量。

令 $P'=\nabla\cdot\boldsymbol{B}$，则式（10－3－31）变为

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2}-\nabla^2 B_i=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[T_{ik}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{V}_1 t)\right] \tag{10-3-32}$$

因此很容易得到式（10－3－32）所对应的 Green 函数，并获得 B_i 的表达式。

§ 10.4　喷流的声场及降噪分析

气体喷流在航空技术中广泛应用，涡轮喷气发动机的排气温度通常在 800～1 200 K，其流速大约为 500～600 m/s，对于超音速喷管则接近于当地声音传播的速度。如果发动机尾喷口处的压降高于临界，则出口气流处于欠膨胀状态。对于涡轮风扇发动机，它的排气形成了两股气流，内涵的气流参数与普通喷气发动机的相当，而外涵的气流速度与温度要比普通喷气发动机低，速度大致在 300～400 m/s 而温度在 300～500 K 左右。显然，这种发动机对降噪有利。事实上，喷气发动机的排气流是强的噪声源。在接近喷口处，噪声级高达 160～165 dB，即使远在离开发动机 100 m 处也有 130～135 dB 左右。

非均介质的波动方程已由式（10－2－18）给出。如果将瞬时速度 v_i 分解为平均速度 $\bar{v}_i$ 与脉动速度 v_i' 时，即 $v_i=\bar{v}_i+v_i'$，则式（10－2－18）右端留下来的只有反映湍流产生噪声的项即

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 \Pi_{ik}'}{\partial x_i \partial x_k}+\frac{\partial P_i}{\partial x_i} \tag{10-4-1}$$

式中

$$\frac{\partial^2 \Pi_{ik}'}{\partial x_i \partial x_k}=\rho_1\frac{\partial^2 (v_i' v_k')}{\partial x_i \partial x_k} \tag{10-4-2}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\equiv 2\rho_1\frac{\partial v_i \partial v_k'}{\partial x_i \partial x_k} \tag{10-4-3}$$

这里式（10－4－2）包含了脉动速度的空间导数，反映了“湍流—湍流”形式的相互作用，它体现了湍流的“固有”噪声。式（10－4－3）包含了平均速度的梯度与脉动速度的空间导数，这相应于“平均速度变化-湍流”形式的相互作用，它体现了“移动”噪声。在考虑了固壁边界的影响之后，Curle（柯尔）给出了式（10－2－18）的解，即

$$\rho'=\frac{1}{4\pi a_1^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\iiint_{\Omega}\frac{T_{ik}^*}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'+\frac{\partial}{\partial x_i}\oint_{\partial\Omega}\frac{\rho v_i v_n+F_i}{R}\mathrm{d}S(\boldsymbol{r}')-\right.$$

$$\oiint_{\partial\Omega}\frac{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_n)}{R}\mathrm{d}S(\boldsymbol{r}')\Bigg\}\tag{10-4-4}$$

这是用 Kirchhoff（基尔霍夫）方法表达的积分形式。式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\equiv \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$；$R\equiv|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$；$v_n$ 为固壁边界的法向分速度；F_i 为固壁边界对流体在 i 方向单位表面积上作用的力。显然，式（10－4－4）右端第一项为著名的 Lighthill 方程的解，它描述了四极子声源在容积为 Ω 中的分布；第二项代表了面力所产生的声，它描述了偶极子声源在表面积 S 上的分布；第三项描述了由于表面移动和由此引起流体的流出时所产生的声场，它代表了多极子声源的分布。如果仅考虑“湍流–湍流”型的相互作用，则式（10－4－1）可简化为

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2\Pi_{ik}'}{\partial x_i\partial x_k}\tag{10-4-5}$$

显然这个非齐次波动方程 Cauchy（柯西）问题的解为

$$\rho'=\frac{1}{4\pi a_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left[\iiint_{\Omega}\frac{\Pi_{ik}'\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{a_1}\right)}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right]\tag{10-4-6}$$

式中 $$R\equiv|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,\quad \boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3),\quad \boldsymbol{r}'=(x_1',x_2',x_3')\tag{10-4-7}$$

式（10－4－6）是用推迟势[32]给出的表达形式。注意到

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(\frac{\Pi_{ik}'}{R}\right)=\frac{(x_i-x_i')(x_k-x_k')}{R^3}\left(\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\Pi_{ik}'}{\partial t^2}+\frac{3}{a_1R}\frac{\partial\Pi_{ik}'}{\partial t}+\frac{3\Pi_{ik}'}{R^2}\right)\tag{10-4-8}$$

在离开容积 Ω 域很远的距离时（即考虑远声场），则

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx|\boldsymbol{r}|\quad,\quad (x_i-x_i')(x_k-x_k')\approx x_ix_k\tag{10-4-9}$$

于是借助于式（10－4－9）并且仅考虑式（10－4－8）中的第一项时，则式（10－4－6）可退化为

$$\rho'=\frac{x_ix_k}{4\pi a_1^4R^3}\iiint_{\Omega}\frac{\partial^2\Pi'(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{a_1})}{\partial t^2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\tag{10-4-10}$$

由上式获得 ρ' 后，便可以去计算喷流问题的声强以及声功率 W；可以证明：对涡轮喷气发动机喷流问题，它的声功率与喷射气流速度的八次方成正比[33, 34]。另外，分析喷流的噪声谱可以发现[4]：靠近喷口处主要发出的是高频的噪声，而远离喷口处为低频的噪声。当 $Sr=0.3\sim0.5$ 时，喷流的声功率级最大，这里 Sr 为 Strouhal（斯特劳哈尔）数。喷流声场的试验研究也表明：喷流远声场的噪声谱是连续的，而且带有微弱的变化。当喷流轴线与测点



方向之间的夹角减小时，噪声谱上低频成分便增大，而且谱的最大值也有明显变化；随着喷流速度的增大，噪声谱中的高频成分增加；随着喷口直径的增大，这时低频成分也相应增加。

20 世纪 80 年代以来，作为降低民航飞机发动机噪声的一个有效而且较为经济的方案便是大力发展涡轮风扇发动机。图 10.3 给出了带吸声结构的风扇发动机简图。吸声结构可以降低发动机总的声功率，而大涵道比风扇发动机的使用可以依靠减小排气速度使喷气噪声急剧降低，（如图 10.4 所示），图中 m 为涵道比；m 的定义为 $m = u_2 / u_1$，这里 u_1 与 u_2 分别为内涵道与外涵道气流的流速。另外，对于共轴喷流而言，如果将共轴喷流的声功率与圆形内涵喷流的声功率相比较，其下降值是随着直径比 $\bar{D}$ 的增大而增大，图 10.5 给出了这个问题的变化曲线。这里 $\bar{D} \equiv D_2 / D_1$，式中，D_1 与 D_2 分别为内涵与外涵管道的直径。

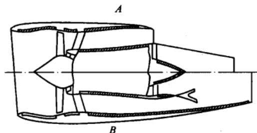


图 10.3　带吸声结构的风扇发动机简图

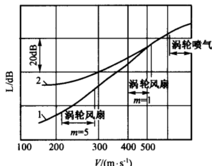


图 10.4　发动机排气噪声与气流速度的关系

1—纯排气噪声；2—总噪声

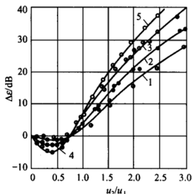


图 10.5　共轴喷流与圆形内涵喷流声功率的差别随流速比 u_2/u_1 的变化曲线

1—$\bar{D}=1.2$；2—$\bar{D}=1.4$；3—$\bar{D}=2.0$；4—$\bar{D}=2.7$；5—外涵圆形喷流

§ 10.5　压气机与涡轮的噪声以及降噪分析

航空噪声主要是由于气动声源。飞机和直升机的产生使人们对航空声学产生了兴趣并对降噪问题予以了重视。喷气式飞机动力装置的噪声主要产生于尾喷口流出的气流，以及叶片机（风扇、压气机、涡轮）和燃烧室所产生的噪声。尽管喷气发动机的噪声谱有很宽的频带，从 10～20 000 Hz，但主要的声能集中在 50～10 000 Hz 之间。在此频段内通常用 1/3 倍频程频谱测发动机的噪声。通常喷气发动机的叶轮机噪声谱集中在 2 000～5 000 Hz 的频率范围内，而喷口处的喷流在 100～400 Hz 之间。

10.5.1　风扇与压气机的噪声

风扇与压气机的噪声取决于一系列气动力所形成的声源，其中首先应该是工作轮叶片气流的不均匀性交汇，以及动叶与静叶不均匀气流的相互作用。另外还有一系列叶片通道中的各种涡从叶片通道流出，这种由于叶片的旋转而导致的噪声叫旋转噪声。另外，在通常情况下转子与静子相互作用所产生的扰动是沿着叶栅前方的法线方向按指数关系衰减的，而当"中断现象"（又称"截止现象"（cut-off））发生时，由扰动所引起的声能却不能向前传播[4]。中断的条件（不考虑轴向气流的马赫数时）为

$$\left|mz_1/(mz_1+kz_2)\right|u_k<a \tag{10-5-1}$$

式中，m 为谐波数；k 为整数（例如取 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）；u_k 为工作轮轮缘周边的圆周速度；a 为声速；z_1 与 z_2 分别为工作轮与导向器的叶片数。

由式（10－5－1）可知，在一定的工作轮圆周速度下，用适当地选择工作轮与导向器叶片数之比的方法可以导致叶片尾流的任一个 m 阶谐波频率的中断，以此达到降低风扇的噪声。为此 z_2/z_1 之值应稍超过 $2m$（若考虑 $u_k\approx a$ 时），特别是要中断频谱中主要的离散分量（$m=1$ 时），这时导向器的叶片数应比工作轮叶片数的两倍还要多些。显然，要满足这项要求存有一定的困难，因为要保持在导向器叶栅通道中气动力的相似性，需要保持叶栅的稠度，于是欲将导向器的叶片数增加 1 倍，就必须将其长度增加 1 倍，这通常会造成叶片的展弦比超过 5，因此要保证这种叶片的振动强度便成为一个复杂的问题[35]，而且叶片再加长也是不现实的。应该指出，中断现象只能用来降低由高次谐波与定常不均匀流相互作用而产生的噪声。事实上，对于设计低噪声的风扇来说，正确的选择设计的圆周速度更显得重要，通常风扇的设计圆周速度取在 350～450 m/s 的范围内。

理论上求解风扇或者压气机的噪声问题可归结于求解非齐次波动方程，该方程的右端包括风扇或者压气机叶片旋转所导致的气流湍流脉动和叶片转动排挤介质所产生的声源。然



而，这些非定常气流的准确数据是很难提供的。即使在噪声源比较简单的螺旋桨上，也不可能得到理论结果与试验数据非常吻合的精确解（或数值解），因此工程实践中，风扇与压气机噪声的计算，更多的还是采用工程处理的方法[36]。

10.5.2　涡轮噪声

随着高涵道比发动机的使用，喷气噪声相对减小，而涡轮噪声变得重要起来。与压气机和风扇相比，涡轮试验成本高、更困难。尤其是涡轮温度高，噪声的测量就更困难。对于涡轮中的单音，也像压气机中所出现的那样，对于“中断值”是敏感的；只有亚声速转子与气流中的非均匀性干涉产生的单音才能够无衰减地传播。恰当地选择转子和静子叶片的数目，才可以使它们的干涉所得到的涡轮单音沿轴向传播时中断。一般说这要比压气机或风扇来得容易，而且在理论上静子叶片的数目可以不到转子叶片数的二倍就能够使涡轮单音“中断”，然而在工程中通常不会这样特意设计。涡轮发声的又一个特点是它的噪声与旋转速度直接有关。在压气机中，随着旋转速度的增大，一般说气流的相对速度增大，因而产生的噪声增大；但在涡轮上，旋转速度的增加，反而引起工作轮叶片上的相对气流速度稍有下降，结果会使涡轮发出的噪声也稍有降低。另外，燃烧室温度的脉动以及涡轮的轴向间隙，对涡轮噪声的强度都会产生较大的影响。轴向间隙加大，则测得的噪声下降；燃烧室产生的温度脉动加大，则涡轮的噪声增加。在通常情况下，由于工作轮与导向器的叶片数较多，因此涡轮噪声频谱中的离散分量多处于高频区域。因篇幅所限，关于涡轮噪声更多的分析这里就不再介绍了。

§10.6* 计算气动声学中的高精度、高分辨率、保持色散关系的差分格式

计算气动声学（Computational Aeroacoustics）简称 CAA 是 1992 年国际上刚确认的气动声学新分支[37]。本节想扼要介绍一下计算气动声学所研究的主要内容、采取的主要方法，并准备概括介绍时间上与空间上的高精度低色散格式，特别是紧致格式[38]、强紧致格式[39]、DRP（Dispersion Relation Preserving）格式[40]、TVD 格式[41]、加权 ENO（即 WENO）格式[42]、以及非结构网格下双时间步长迭代格式[43]等。

10.6.1　计算气动声学与计算流体力学之间的关系及区别

计算气动声学（简称 CAA）与计算流体力学（简称 CFD）至今两者各自尚无一个确切

的定义，因此它们之间的关系只能按通常的一些观点予以探讨。两者颇有点象气动声学与气体动力学之间的关系那样既密切联系，又存有区别。按照通常的观点，CFD 的对象更侧重于定常流和非定常流动的流体动力学特征，而 CAA 的重点在于产生噪声的非定常流动机理、声源的确定、声与流动的相互作用等问题。涡、声干扰问题的研究把流体力学（或气体动力学）与气动声学之间架起了密不可分的桥梁。涡量波是横波，而声波是纵波，二者在气体运动过程中的能量转换以及相互的作用即为涡、声干扰。涡运动是流体中最普遍存在的一种运动形式，尤其是 Prandtl（普朗特）创立的边界层理论把流体力学推进到一个新阶段，它揭示了涡量在物面上如何生成和扩散并汇集于物面附近流域内的物理机制，解释了流动分离现象；而涡旋（集中涡）的生成是与流动分离密切相关的。对于湍流，现已认识到，湍流兼有随机性和拟序性，其基本结构之一是各种尺度的涡（eddy），既有大量的随机的小涡构成背景流场，又有大尺度的拟序涡结构在统计意义上存在。因此，流体的运动是有涡运动[44~46]，“流体的本质就是涡，（Prandtl 的学生、我国著名流体力学家陆士嘉教授这样说）”，涡是“流体运动的肌腱（英国著名空气动力学家 D. Küchemann 1965 年的一句名言）”，从涡量到涡层和旋涡，它们的产生——通过扩散进入流体内部并形成边界层——边界层向自由涡层的转化——旋涡的形成和结构——涡层与旋涡的运动、扩散、失稳、破裂、转捩、湍流涡结构以及涡与波的相互作用等这样一个基本物理过程的研究，尤其是流体中固壁边界条件对搓出旋涡所起的作用，都将加深人们对流体流动本质的认识与提高。不仅如此，涡还是流体运动的声音[47]，许多基本涡运动发出的声音已经被实验所证实[48, 49]，尤其是在低 Mach 数下的非定常涡运动，已被证实它是惟一的流体声波源[46]。在亚声速射流中，初始的大尺度相干结构是主要的噪声源[14]；在射流流场中，任何一个脉动总可以分解为相干脉动和随机脉动两部分，而前者较之后者是更重要的声源。从数值计算的角度来看，计算流体力学是计算气动声学的基础，许多 CAA 方面的工作恰好是探讨 CFD 在非定常波动计算问题中的适用性[50]。然而，应该看到在计算中气动声学的物理特征使得 CAA 较之 CFD 会遇到更多的困难。首先是计算区域，对于同一个绕流问题而言前者要比后者大的多。这是由于 CAA 不仅要计算近场而且还要计算远场，并且通常情况下远场区域要比近场大得多，例如射流问题，通常情况下远场的距离要大于 12 倍的喷口直径[51]。另外，在所考虑的尺度上，流体运动中涡的尺度是从边界层厚度到 Kolmogorov 微尺度，在 Re 取为 10^4 时上述尺度的范围包括了 3 个量级；而且微尺度每减小一个量级，计算机内存和计算时间就分别需要提高 10^3 和 10^4 倍。在声学中，声强从听觉阈到痛觉阈的量级跨度为 10^{14}，频率范围为 20～20 000 Hz，因此要模拟所有这些尺度的运动的确是非常困难的事。从 CFD 到 CAA，如果仅仅想通过提高差分方程的截断精度那还是不够的，为了说明这一点，下面我们不妨把两者作些比较就会清楚了。事实上，用时间推进法求解定常问题，实际上是一个消除误差波的过程。在数值求解过程中，只要此误差波幅值不断减小并最终达到允许的误差，则便可以认为达到了定常解，因此这只是要求差分方程是相容的、稳定的、并且允许具有较低精度的频散、耗散和各向异性；在有些



情况下甚至要人为地加入耗散以获取稳定的间断解（例如激波问题）；Taytor 展开截断项阶次越高，其相应的计算精度也就越好。另外，对于定常问题而言，其数值解只要求具有高的空间分辨率，而对时间精度的要求稍低[52]。但是，CAA 所要模拟的是实际过程中的物理波，因此差分方程应该准确的去反映物理过程中的波模式（其中包括涡、声、热等）和波传播的特征（即色散性、耗散性、方向性、相速度、群速度等），也就是说 CAA 对数值计算方法至少要提出以下三个方面的要求：

（1）要准确的去逼近物理波的幅值。为此可借助于相容的、稳定的和高阶 Taylor 截断的 CFD 格式去保证。

（2）要较精确的模拟高波数运动，也就是说要求差分方程具有较小的格式频散，其截断误差可由 Fourier（或者 Laplace）截断式去作判断。值得注意的是，相同 Taylor 精度的格式，其 Fourier 精度不一定相同。事实上，为了计算涡演化过程，近些年来在 CFD 领域内大力研究与发展的紧致格式、强紧致格式或其它高精度格式也都是力求模拟高波数运动，这些格式也为计算气动声学问题的求解提供了选择的机会。

（3）要求时间上、空间上的差分格式同时进行设计以便满足原方程所包含的色散关系。事实上，CAA 中的差分方程对上述三点的要求是各有侧重的：首先，与 Taylor 截断有关的精度是局部性的，它影响波幅值的计算误差，但总的来说并不影响解的总特征，有时甚至会因加入人工粘性增强计算稳定性而使波幅计算值比实际值小。其次，模拟高波数运动可以提高解的分辨力，只要在误差允许的范围内时、空波数匹配，那么就可以获得具有一定精度的物理解。值得注意的是，在上述三方面要求中满足色散关系，这是 CAA 格式设计中最为重要的内容。色散误差是全局性、积累性的误差。事实上，差分方程所描述的数值波的运动与微分方程所描述的物理过程并不一定相同。即使是无色散的微分方程其差分方程也往往具有色散性。差分方程的色散关系往往具有周期性并且是非线性和多值的；它所描述的相位往往是以异于物理相速度的数值相速度进行传播，不同的波数对应于不同的相速度；其波包、寄生振荡、波动的能量等以所谓的群速度传播着；对于多维问题，差分方程在不同方向上群速度效应的差异还会引起数值的差异。所有这些都说明差分离散可能会引起波性质的变化。因此在 CAA 中需要采用保持色散关系的差分方程，这里所谓的“保持”是指在相应的误差范围内，因为差分方程与微分方程的色散关系必定存在着差别。

关于边界条件，数值模拟真实的波运动给边界条件的处理提出了更高的要求。所谓人工边界就是有限计算域的边界，此边界的差分处理应使整个算法不产生非物理的数值反射，也既是无反射边界条件。这里顺便说明的是：除了用“无反射边界”一词之外，不同文献还用了其他名称，如吸收式边界、开边界、穿透边界、辐射边界等，其含义基本上相同。处理人工边界的方法很多，但多数是要求物理上无有入射波，也就是说抑制甚至消除入射波。这里仅给出两类处理方法：一类是使用过渡区吸收出射波[53, 54]，它多用于多维粘性问题的出口边界；另一类是特征分析法[55~57]。特征分析法的理论是基于 Riemann 不变量，它假设对

应于每一条特征线的子波都是相互独立的，也就是说，特征分析法本质上只适用于线性问题。对于非线性问题则需要采用局部线化。应该指出，无反射边界条件的特征分析法对低精度格式较为合适，然而它不能处理有物理波入射的问题。而文献[58]发展的“有限波”边界（Finite wave model）的处理方法确没有这个限制，它借助于精确地处理出射波和入射波之间的非线性关联，在人工边界和远场条件之间建立了若干有限振幅波以模拟其间的物理过程，所以这种方法不会影响内点差分方程的精度，它可以用于高精度算法及多维问题，可以作为计算声学的人工边界条件。

最后分析一下声与涡的尺度以及计算所需的网格。计算气动声学对物理问题刻划的深入程度是随着计算方法以及计算机的内存与计算机的速度逐步提高的。显然，用数值方法去精确描述一个波时，在一个波长上必须要有足够的离散点数，例如采用至少 5 个离散点描述一个正弦波时，令网格间距为 Δx，波数和与波长分别为 k 与 λ，于是在上述情况下则要求 $\lambda \geqslant 4\Delta x$，$\Delta x \leqslant \pi/2k$；根据这样一个原则，下面粗略分析一下声波与涡问题的计算网格。首先以中等流速的射流[51]为例，该问题所含的 90%声能量的声波其量纲为 1 的频率 Sr 约为 0.2～3，射波速度为 300 m/s 时对应的最高频率为 36 kHz，由此可以估计最小网格间距 $\Delta x \leqslant$2.3 mm。为了与实验进行比较，计算区域往往要取得很大，例如取 100D×100D（D 为喷管直径）的域，此时对二维问题将需要 10^6 个网格点，所需内存随着所用的差分格式而有所不同，初步估计大约需要 320M 左右，显然这将超出了一般计算机的能力。如果取 25D×25D 的计算域，则需要 7×10^4 左右的网格点，所需内存在 20M 左右，显然这是可以承受的。对于翼型流动的噪声，其宽频噪声主要由尾涡脱落引起，此时声波中心频率与尾涡脱落频率一致，约为 $f=0.2\bar{u}/\delta$，这里 $\bar{u}$ 为平均流速，δ 为尾迹厚度，例如 δ 取为 3 mm 时，f 大约为 1 000 Hz 左右，显然该问题相对于射流问题而言所需内存要少一些。对于声控流动过程，由于外加声波频率一般都较低（<1 000 Hz），因此对于上述的网格已满足了要求，网格可以不用再加密。另外，涡的尺度要比声波尺度小得多，它的波数分布可以从大尺度涡 $K_L=2\pi/L$（这里 L 为大涡尺度）一直变到 Kolmogorov 微尺度涡 $K_N=\left(\varepsilon/v^3\right)^{1/4}$（这里 ε 为耗散率，v 为运动粘性系数），在一般情况下要模拟出上述所有这些尺度的涡那是很难做到的。然而应该指出的是，射流中产生噪声的主要过程是大涡结构的产生与发展。它们与激波的相互作用、旋涡的切割与重组（cut and connecl）、湍流能量的串级过程（cascade process）等都给噪声的产生起重要作用。另外，声控过程大涡也起主要作用。因此计算声控过程的噪声问题也可以用大涡模拟计算出它的近场与远场的声波。对于尾迹与叶栅干扰问题，如果取尾迹宽度 $\delta=3$ mm，最小网格间距 $\Delta x \leqslant \delta/4=0.75$ mm，并且取栅距为 0.05 m，弦长为 0.1 m 时，则描述这种大涡所需的网格大致为 70×400=2.8×10^4 左右，显然这在一般计算机（例如 586 微机）上还是可以完成上述计算的。

综上所述，CFD 与 CAA 两者密切相关但各自又有侧重，相比之下计算气动声学所遇到



的困难要比 CFD 大得多，概括起来计算气动声学的重要特点及主要困难是：① 声场的计算域要比流场的大得多；② 整个声场中存在着多种尺度，而且声能量相对于流场能量要小很多。因此对于这种多尺度的场做数值计算困难很大，例如马赫数 M=1.5 的射流，当远场声强达 124 dB 时，声脉动速度与流场平均速度之比大约为 1.5×10^{-4}，所以在作数值计算时如此悬殊的差异很可能造成声学量被数值误差所掩盖；③ 为了模拟波运动，需要发展高精度并且尽量保持色散关系的差分格式；④ 要发展与内点差分格式精度相匹配的多维无反射边界条件。毫无疑问，计算气动声学是一个急待发展与完善的新分支。

10.6.2　五节点模板的 Harten 二阶 TVD 格式

考虑非线性标量模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{10-6-1}$$

这里讨论对它构造 TVD 格式。令 TVD 格式的一般形式为

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}-\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}\right) \tag{10-6-2}$$

或者

$$u_i^{n+1}=u_i^n-C_{i-\frac{1}{2}}\left(u_i^n-u_{i-1}^n\right)+D_{i+\frac{1}{2}}\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right) \tag{10-6-3}$$

其中 $\tilde{f}_{i\pm\frac{1}{2}}$ 为数值通量，一般节点模板（stencil）的形式为

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}\equiv\tilde{f}\left(u_{i-l},u_{i-l+1},\cdots,u_i,u_{i+1},\cdots,u_{i+k+1}\right)\ （这里\ k,l\geqslant0） \tag{10-6-4}$$

并要求 $\tilde{f}$ 满足相容性条件，即

$$\tilde{f}(u,u,\cdots,u,u,\cdots,u)=\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}(u)=f(u) \tag{10-6-5}$$

通常选取的节点模板都较小，例如取 $l=0,k=1$ 即三节点模板，这时式（10-6-4）所表达的数值通量 $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}$ 变为

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}=\tilde{f}\left(u_i,u_{i+1}\right) \tag{10-6-6}$$

按照 Harten 提出的总变差概念定义总变差为

$$TV(u^n)\equiv\Delta x\sum_i\left|u_{i+1}^n-u_i^n\right|$$

所谓 TVD（Total Variation Diminishing）也即要求满足

$$TV(u^{n+1}) \leqslant TV(u^n) \tag{10-6-7}$$

或者

$$\sum_i \left|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\right| \leqslant \sum_i \left|u_{i+1}^n - u_i^n\right| \tag{10-6-8}$$

可以证明[41, 59~61]，格式式（10－6－3）为 TVD 的一个充分条件是对于任意的整数 i，式（10－6－3）中的系数 C、D 都满足

$$\left.\begin{aligned} &C_{i+\frac{1}{2}} \geqslant 0,\quad D_{i+\frac{1}{2}} \geqslant 0 \\ &0 \leqslant C_{i+\frac{1}{2}} + D_{i+\frac{1}{2}} \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{10-6-9}$$

为了构造二阶精度的 TVD 格式，Harten 将单个守恒律方程式（10－6－1）的一阶 TVD 格式（它是三节点模板的一阶格式），即

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda\left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}\right),\ \lambda \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{10-6-10}$$

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f\left(u_i^n\right) + f\left(u_{i+1}^n\right) - \frac{1}{\lambda} Q\left(\lambda\alpha_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)\right]$$

用于修正通量后的单个守恒律方程，即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f^M(u)}{\partial x} = 0,\quad f^M(u) \equiv f(u) + \frac{1}{\lambda} g(u) \tag{10-6-11}$$

并且选择适当的修正量 g（它具有某种反扩散项的意义）使得所得到的差分格式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda\left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^M - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^M\right) \tag{10-6-12}$$

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^M = \frac{1}{2}\left\{\left[f(u_i^n) + \frac{1}{\lambda} g\left(u_i^n\right)\right] + \left[f\left(u_{i+1}^n\right) + \frac{1}{\lambda} g\left(u_{i+1}^n\right)\right] - \frac{1}{\lambda} Q\left(\lambda\alpha_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)\right\} \tag{10-6-13}$$

对于修正通量的守恒律方程式（10－6－11）来讲，格式式（10－6－12）虽然仍是一阶 TVD 格式，但差分格式式（10－6－12）对于原守恒律方程式（10－6－1）却是二阶的 TVD 格式。为此，取修正项 g 具有如下形式

$$\left.\begin{aligned} &g_i \equiv \min\bmod\left(\tilde{g}_{i+\frac{1}{2}}, \tilde{g}_{i-\frac{1}{2}}\right) \\ &\tilde{g}_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{2}\left[Q\left(\lambda\alpha_{i+\frac{1}{2}}\right) - \left(\lambda\alpha_{i+\frac{1}{2}}\right)^2\right]\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) \end{aligned}\right\} \tag{10-6-14}$$



另外，上面式中 $\alpha_{i+\frac{1}{2}},\gamma_{i+\frac{1}{2}},Q(z)$ 以及 $\min \bmod(a,b)$ 的定义分别为

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} \equiv \begin{cases} \dfrac{f\left(u_{i+1}^{n}\right)-f\left(u_{i}^{n}\right)}{u_{i+1}^{n}-u_{i}^{n}} & (u_{i+1}^{n}-u_{i}^{n} \neq 0) \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{u_i^n} & (u_{i+1}^{n}=u_{i}^{n}) \end{cases} \tag{10-6-15}$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} \equiv \begin{cases} \dfrac{g_{i+1}-g_{i}}{u_{i+1}^{n}-u_{i}^{n}} & (u_{i+1}^{n}-u_{i}^{n} \neq 0) \\ 0 & (u_{i+1}^{n}=u_{i}^{n}) \end{cases} \tag{10-6-16}$$

$$Q(z) \equiv \begin{cases} |z|, & (|z| \geqslant \varepsilon) \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(z^{2}+\varepsilon^{2}\right) & (|z|<\varepsilon) \end{cases} \tag{10-6-17}$$

$$\min \ \bmod(a,b) \equiv \begin{cases} [\operatorname{sgn}(a)]\min(|a|,|b|) & (ab>0) \\ 0 & (ab \leqslant 0) \end{cases} \tag{10-6-18}$$

由于引进了辅助通量 $g_i = g(u_{i-1},u_i,u_{i+1})$，因而 $\hat{f}^{M}_{i+\frac{1}{2}}$ 已包含 $(u_{i-1},u_i,u_{i+1},u_{i+2})$ 这四个节点，也就是说差分格式式（10－6－12）的节点模板已经扩展为 $(u_{i-2},u_{i-1},u_i,u_{i+1},u_{i+2})$ 这五个节点。这里还应该需要指出的是，通常高阶精度的 TVD 格式仅仅是在光滑区域中才能达到。事实上，激波间断附近，上述格式的精度仍然降为一阶。对于 TVD 格式，可以有下面的定理成立：所有的 TVD 格式，在函数的极值点附近要降至一阶精度[59]。

10.6.3　ENO 与加权 ENO 格式

文献[62]指出，TVD 格式的精度最多只能达到二阶，并且一般说来 TVD 格式的精度全场不是一致的，在个别点（极值点）处精度只有一阶。为了进一步提高格式精度并改善格式在极值点处的性态，1986 年 Harten 首先提出了无振荡格式（non-oscillatory）的概念[63]，然后于 1987 年提出了本质无振荡（essentially non-oscillatory）格式的方案和方法[64~66]。于是在守恒律方程的高阶和高分辨率数值方法的设计上找到了一条统一而有效的途径。这类格式是守恒的，从实质上讲它是一种高阶精度的广义 Godunov 格式。这种格式全场具有一致的高精度，并且基本上是 TVD 的，即

$$TV(u^{(n)}) \leqslant C \cdot TV(u^{(o)}) \tag{10-6-19}$$

这里 C 是与空间步长 Δx、时间步长 Δt 无关的常数。上式表明，ENO 格式是总变差有界的。比较式（10－6－7）与式（10－6－19），显然 ENO 较 TVD 的确放松了对总变差施加的约束，

但由此确换来了进一步提高格式的精度以及全场具有一致高阶精度的可喜效果。下面首先扼要的介绍一下一维标量方程的有限体积型 ENO 格式，然后再讨论加权 ENO 格式。

一、有限体积型 ENO 格式

考虑一维标量守恒律方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=0, & x\in(a,b),t>0\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in[a,b]\end{cases} \tag{10-6-20}$$

设网格剖分为

$$a=x_{\frac{1}{2}}<x_{\frac{3}{2}}<\cdots x_{N-\frac{1}{2}}<x_{N+\frac{1}{2}}=b \tag{10-6-21}$$

单元 $I_i=[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$，单元中点为 $x_i=(x_{i-\frac{1}{2}}+x_{i+\frac{1}{2}})/2$，步长为 $\Delta x_i=x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}$，这里 $i=1,2,\cdots,N$；并且定义

$$\Delta x\equiv\max_{1\leq i\leq N}\Delta x_i \tag{10-6-22}$$

将式（10－6－20）在单元区间 I_i 上积分并整理为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{u}_i+\frac{1}{\Delta x_i}[f(u_{i+\frac{1}{2}},t)-f(u_{i-\frac{1}{2}},t)]=0 \tag{10-6-23}$$

式中

$$\bar{u}_i(t)=\frac{1}{\Delta x_i}\int_{\xi=x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}u(\xi,t)\mathrm{d}\xi\quad(i=1,2,\cdots,N) \tag{10-6-24}$$

下面分两个小问题进行讨论：

1. 在选定的模板上构造插值多项式 $p(x)$

这里所谓选定的节点模板，又可以称为固定模板（fix stencil）。取定一个模板，例如取包括三个单元的模板 $S=\{I_{i-1},I_i,I_{i+1}\}$，构造一个多项式 $p(x)$，使其满足

$$\frac{1}{\Delta x_j}\int_{\xi=x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}p(\xi)\mathrm{d}\xi=\bar{u}_j\quad(j=i-1,i,i+1)$$

$$p(x)=\tilde{p}(\zeta)=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2,\zeta=\frac{x-x_i}{\Delta x_i} \tag{10-6-25}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&a_0=\bar{u}_i-\frac{1}{24}\delta^2\bar{u}_i,\quad a_2=\frac{1}{2}\delta^2\bar{u}_i\\&a_1=\frac{1}{2}(\bar{u}_{i+1}-\bar{u}_{i-1}),\quad \delta^2\bar{u}_i\equiv\bar{u}_{i+1}-2\bar{u}_i+\bar{u}_{i-1}\end{aligned}\right\} \tag{10-6-26}$$



令

$$u_{i+\frac{1}{2}} = p(x_{i+\frac{1}{2}}) \tag{10-6-27}$$

于是将式（10－6－26）代到式（10－6－25）后并注意到上式便得

$$u_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\overline{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\overline{u}_i + \frac{1}{3}\overline{u}_{i+1} \tag{10-6-28a}$$

选择不同的模板，可得不同系数的组合，例如选 $S=\{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i\}$ 时，则

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\overline{u}_{i-2} - \frac{7}{6}\overline{u}_{i-1} + \frac{11}{6}\overline{u}_i \tag{10-6-28b}$$

如果 $S=\{I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$，则

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\overline{u}_i + \frac{5}{6}\overline{u}_{i+1} - \frac{1}{6}\overline{u}_{i+2} \tag{10-6-28c}$$

在一般情况下，如果模板包含 $r+g+1=k$ 个单元，即

$$S(i) \equiv \{I_{i-r}, \cdots, I_{i+g}\} \quad (g \equiv k-r-1, r=0,\cdots,k-1) \tag{10-6-29}$$

则这时利用模板 S 可以构造 $(k-1)$ 次插值多项式（例如 Newton 多项式或者 Lagrange 多项式）$p_i(x)$，它在单元 I_i 区间逼近函数 $u(x)$ 满足下列条件

$$p_i(x) = u(x) + O(\Delta x^k) \quad (x \in I_i, i=1,2,\cdots,N) \tag{10-6-30}$$

同样地，类似于式（10－6－28）还可得到

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1}\left(C_{rj}\overline{u}_{i-r+j}\right) \tag{10-6-31}$$

式中，系数 C_{rj} 为

$$C_{rj} = \left(\Delta x_{i-r+j}\right)\sum_{m=j+1}^{k}\left\{\frac{\sum\limits_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k}\left[\prod\limits_{\substack{q=0\\q\neq m,l}}^{k}\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-r+q-\frac{1}{2}}\right)\right]}{\prod\limits_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k}\left(x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}\right)}\right\} \tag{10-6-32}$$

这里 $0 \leqslant i \leqslant N$，$-1 \leqslant r \leqslant k-1$，$0 \leqslant j \leqslant k-1$。可以看出式（10－6－32）是采用 Lagrange 多项式时得到的结果。如果网格是均匀的即 $\Delta x_i = \Delta x$ 时，则式（10－6－32）变简化为

$$C_{rj}=\sum_{m=j+1}^{k}\left\{\frac{\sum\limits_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k}\left[\prod\limits_{\substack{q=0\\q\neq m,l}}^{k}(r-q+1)\right]}{\prod\limits_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k}(m-l)}\right\} \tag{10-6-33}$$

令 $k=3$，$r=1$时，则由式（10－6－33）便直接得到

$$C_{10}=-\frac{1}{6},\ C_{11}=\frac{5}{6},\ C_{12}=\frac{1}{3}$$

将上式代入式（10－6－31）便得到式（10－6－28a）。再如令 $k=6$，$r=5$时，则由式（10－6－33）计算出 C_{rj} 值并且代入式（10－6－31）得到

$$u_{i+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}\bar{u}_{i-5}+\frac{31}{30}\bar{u}_{i-4}-\frac{163}{60}\bar{u}_{i-3}+\frac{79}{20}\bar{u}_{i-2}-\frac{71}{20}\bar{u}_{i-1}+\frac{49}{20}\bar{u}_{i}+O\left(\Delta x^{6}\right) \tag{10-6-34}$$

2. 逐次扩展节点模板的优化过程

为了提高格式的分辨率，避免数值结果出现 Gibbs 振荡现象，我们自然会想到利用可调节模板（adaptive stencil）代替固定模板，尽量避免在所选择的模板中包含间断，也就是说ENO 采用了差商极小化的方式去扩展模板节点的优化过程，以便实现“本质无振荡”的效果。要扩张节点模板，始终有两种可能，即由当前基准点向左扩展一点，或者向右扩展一点。令

$$S_{1L}=\{x_{i-1},x_i\},\quad S_{1R}=\{x_i,x_{i+1}\} \tag{10-6-35}$$

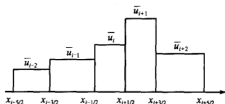


图 10.6　时间层 $t^{(n)}$上阶梯函数的分布

相应的阶梯函数值为$\left\{(\bar{u})_{i-1}^{n},(\bar{u})_{i}^{n}\right\}$，与$\left\{(\bar{u})_{i}^{n},(\bar{u})_{i+1}^{n}\right\}$；图 10.6 给出了 $t^{(n)}$（简记为 t^{n}）时间层上的阶梯函数分布图。这里到底是选择 S_{1L} 作为 S_1，还是选择 S_{1R} 作为 S_1，这需要比较它们的斜率之后才能决定，即由一阶 Newton 差商

$$N_{1L}=\frac{(\bar{u})_{i}^{n}-(\bar{u})_{i-1}^{n}}{x_i-x_{i-1}},\quad N_{1R}=\frac{(\bar{u})_{i+1}^{n}-(\bar{u})_{i}^{n}}{x_{i+1}-x_i} \tag{10-6-36}$$

取上面两式的绝对值较小者作为扩展后的两节点模板 S_1；也就是说，如果

$$|N_{1L}|\leqslant|N_{1R}|$$

时则取 S_{1L} 作为 S_1，并且



$$u_{i+\frac{1}{2}} = (\overline{u})_i^n + N_{1L}\left(x - x_i\right)\Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}}$$

否则取 S_{1R} 作 S_1，且

$$u_{i+\frac{1}{2}} = (\overline{u})_i^n + N_{1R}\left(x - x_{i+1}\right)\Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}}$$

然后在 S_1 模板的基础上用类似的办法去构造 S_2 模板，即向左增加一个节点记作 S_{2L} 或者向右增加一个节点记作 S_{2R}；比较它们的 2 阶 Newton 差商：如果 $|N_{2L}| \leqslant |N_{2R}|$，则选择 S_{2L} 作为 S_2 并且作出 2 阶的 Newton 插值公式，生成相应的 $u_{i+\frac{1}{2}}$ 值；否则选择 S_{2R} 作为 S_2，也有类似的过程。一般来讲，如果上述的过程一直进行下去可得到 $S_{(j-1)}$ 模板。在 $S_{(j-1)}$ 模板的基上，向左增加一个节点记作 S_{jL} 或者向右增加一个节点记为 S_{jR}，这时要比较它们的 j 阶 Newton 差商，如果 $|N_{jL}| \leqslant |N_{jR}|$ 时则取 S_{jL} 作为 S_j，否则取 S_{jR} 作为 S_j，并且算出 j 阶的 Newton 插值公式，生成相应的 $u_{i+\frac{1}{2}}$ 值，进而得到边界点处的近似值

$$u^L_{i+\frac{1}{2}} = p_i\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right),\quad u^R_{i-\frac{1}{2}} = p_i\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \tag{10-6-37}$$

因此，对于所讨论的守恒律方程组的积分形式（10-6-23），便可得到如下的守恒格式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{u}_i + \frac{1}{\Delta x_i}\left[\hat{f}\left(u^L_{i+\frac{1}{2}}, u^R_{i+\frac{1}{2}}\right) - \hat{f}\left(u^L_{i-\frac{1}{2}}, u^R_{i-\frac{1}{2}}\right)\right] = 0 \tag{10-6-38}$$

式中，$\hat{f}\left(u^L, u^R\right)$ 为 ENO 方法的数值通量，它满足如下三点性质：① $\hat{f}(\cdot,\cdot)$ 是 Lipschitz 连续；②具有相容性，即 $\hat{f}(u,u) = f(u)$；③具有单调性 $\hat{f}(\uparrow,\downarrow)$，即对第一个变量非减，对第二变量非增。

二、半离散的 ENO 格式

通常有两类重要类型的 ENO 格式，一类是 MUSCL 型的 ENO 格式，另一类是非 MUSCL 型的 ENO 格式。所谓 MUSCL 型的 ENO 格式，简单地说它是规定以某种方式由网格中心处的原始变量值来确定网格界面处的原始变量值，然后借助于界面处的原始变量值算出网格界面处通量的一种计算格式。所谓非 MUSCL 型的 ENO 格式，简单地说它是直接规定以某种方式由网格中心处的通量值来确定网格界面处通量值的一种计算格式。可以证明，对于非线性的守恒律方程，高于二阶精度的 MUSCL 型格式是不存在的。因此人们为了获得高于二阶精度的 ENO 格式，多去构造非 MUSCL 型的 ENO 格式。这里首先介绍一下数值通量的一种直接构造方法，然后再介绍 Runge-Kutta 型时间离散格式。考虑守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{10-6-39}$$

它的半离散守恒型格式为

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\Delta x_i}\left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}-\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}\right)=0 \tag{10-6-40}$$

这里半离散格式中的 $u_i(t)$ 可以看作是关于 $u(x_i,t)$ 的某种形式的近似值。另外，如果

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}-\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_i}+O\left(\Delta x^r\right) \tag{10-6-41}$$

则方程式（10－6－39）的半离散守恒格式式（10－6－40）对空间变量具有 r 阶精度。如果令 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$ 为数值通量并且有

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}=f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)+\sum_{l=1}^{m-1}\left[a_{2l}(\Delta x)^{2l}\left(\frac{\partial^{2l}f}{\partial x^{2l}}\right)\Bigg|_{x=x_{i+\frac{1}{2}}}\right]+O\left(\Delta x^{2m+1}\right) \tag{10-6-42}$$

注意到将 $f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ 与 $f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$ 在 x_i 处展为 Taylor 级数，于是有

$$f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)-f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)=\sum_{l=0}^{m-1}\left\{\frac{(\Delta x)^{2l+1}}{2^{2l}(2l+1)!}\left[\frac{\partial^{2l+1}f}{\partial x^{2l+1}}\right]_i\right\}+O\left(\Delta x^{2m+1}\right) \tag{10-6-43}$$

借助于式（10－6－43）与式（10－6－42）并令 $a_0=1$，便有

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}-\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k}\left\{\frac{a_{2l}(\Delta x)^{2k+1}}{2^{2k-2l}(2k-2l+1)!}\left[\frac{\partial^{2k+1}f}{\partial x^{2k+1}}\right]_i\right\}+O\left(\Delta x^{2m+1}\right) \tag{10-6-44}$$

显然如果 $a_2,a_4,\cdots,a_{2m-2}$ 满足如下方程组

$$\sum_{l=0}^{k}\left\{\frac{a_{2l}}{2^{2k-2l}(2k-2l+1)!}\right\}=0,\quad (k=1,2,\cdots,m-1) \tag{10-6-45}$$

则式（10－6－44）变为

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}-\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}=(\Delta x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_i}+O\left(\Delta x^{2m+1}\right) \tag{10-6-46}$$

由式（10－6－45），用递推法容易求得

$$a_2=-\frac{1}{24},\quad a_4=\frac{7}{5\,760},\quad a_6=-\frac{31}{967\,680},\cdots \tag{10-6-47}$$

至此，满足式（10－6－42）数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$ 与 $\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}$ 的构造问题就变成计算 $\left[\frac{\partial^{2l}f}{\partial x^{2l}}\right]_{i+\frac{1}{2}}$ 项的问题，



这里 $l=1,2,\cdots,m-1$；该项的计算，可以用紧致格式或者强紧致格式得出，也可以先去构造插值多项式，然后再借助于插值多项式求偶次导数项的办法去逼近 $\partial^{2l}f/\partial x^{2l}$ 项，例如常可以采用 ENO-LF 算法或者其它方法得到数值通量；对于构造符合高精度要求的插值多项式，通常最有效的办法之一是借助于 ENO 格式中可调节模板（又称移动模板）的思想。

下面扼要介绍一下具有 TVD 保持性质的 Runge-Kutta 法。首先将式（10－6－39）改写为

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=L(u) \tag{10-6-48}$$

这里 $L(u)$ 是逼近 $\partial f/\partial x$ 的离散算子。可以证明，具有 TVD 保持性质最优的二阶精度 Runge-Kutta 格式为[67]

$$\begin{cases} u^{(1)}=u^n+(\Delta t)L\left(u^n\right) \\ u^{n+1}=\dfrac{1}{2}u^n+\dfrac{1}{2}u^{(1)}+\dfrac{1}{2}(\Delta t)L\left(u^{(1)}\right) \end{cases} \tag{10-6-49}$$

这里 CFL 数取为 1。可以证明，具有 TVD 保持性质最优的三阶精度 Runge-Kutta 格式为[67, 68]

$$\begin{cases} u^{(1)}=u^n+(\Delta t)L\left(u^n\right) \\ u^{(2)}=\dfrac{3}{4}u^n+\dfrac{1}{4}u^{(1)}+\dfrac{1}{4}(\Delta t)L\left(u^{(1)}\right) \\ u^{n+1}=\dfrac{1}{3}u^n+\dfrac{2}{3}u^{(2)}+\dfrac{2}{3}(\Delta t)L\left(u^{(2)}\right) \end{cases} \tag{10-6-50}$$

这里 CFL 数取为 1。

三、加权 ENO 格式

ENO 格式的主要思想是在若干个可能的插值单元区域中选择一个最光滑的插值区域，用它来进行插值计算以便高精度地逼近网格界面处的通量，并且同时可避免激波附近的虚假振荡。也就是说，ENO 是通过比较差商的绝对值大小自适应地选择模板。当然，对于这样一种重构方法，还有很多地方有待改进：例如，解及其导数在零点附近产生的舍入误差可能会改变模板的选择；在进行模板选择时，为了得到 k 阶精度的格式需要 k 个单元，于是总体上便覆盖了 $(2k-1)$ 个单元，然而在最终计算时却仅能有一种形式的模板被使用。如果覆盖的 $(2k-1)$ 个单元都利用上，则在光滑区域可得到 $(2k-1)$ 阶精度；另外，在 ENO 模板选择的源程序中使用了许多逻辑语句，因此就不便于进行并行运算。加权 ENO 方法以 ENO 方法为基础，同时消除了上面几点不足。其主要思想是：将原来 ENO 格式中仅用一个最光滑的插值区域去提供网格界面处数值通量的近似做法改成将每一个可能的插值区域所提供的网格界面处的数值通量作加权平均。也就是说，它不是选择其中的一种节点模板，而是利用所谓模板的凸组合。具体来讲，假定 k 个参选的模板为

$$S_r(i)=\left\{x_{i-r},x_{i-r+1},\cdots,x_{i-r+k-1}\right\},\quad (r=0,1,\cdots,k-1)$$

在 $x=x_{i+\frac{1}{2}}$ 处可以得到 k 个不同重构方式的 $u_{i+\frac{1}{2}}$ 值，即

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}=\sum_{j=0}^{k-1}\left(c_{rj}\bar{u}_{i-r+j}\right)\quad (r=0,1,\cdots,k-1) \tag{10-6-51}$$

加权 ENO（又可记作 WENO）格式是利用所有 $u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ 值的凸组合去计算 $u\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$，即

$$u_{i+\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{k-1}\left(\omega_r u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}\right) \tag{10-6-52}$$

为了满足稳定性和相容性，还要求

$$\omega_r\geqslant 0,\qquad \sum_{r=0}^{k-1}\omega_r=1 \tag{10-6-53}$$

另外，如果函数 $u(x)$ 在所有的模板中是光滑函数，则存在常数 c_r^* 使得

$$u_{i+\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{k-1}\left(c_r^* u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}\right)=u\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)+O\left(\Delta x^{2k-1}\right) \tag{10-6-54}$$

例如若 $k=1$ 时，则 $c_0^*=1$；若 $k=2$ 时，则 $c_0^*=2/3$，$c_1^*=2$；若 $k=3$ 时，则 $c_0^*=3/10$，$c_1^*=3/5$，$c_2^*=1/10$；在 WENO 格式中，权函数应该光滑，并且当模板包含间断时，ω_r 应该取为零。通常取如下形式的权函数

$$\omega_r=\frac{\alpha_r}{\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j}\quad (r=0,1,\cdots,k-1) \tag{10-6-55a}$$

$$\alpha_r=\frac{c_r^*}{(\varepsilon+\beta_r)^2} \tag{10-6-55b}$$

式中，$\varepsilon>0$ 的引入是为避免分母为零，这里可以取 $\varepsilon=10^{-6}$；β_r 称作“光滑因子”。假设模板 $S_r(i)$ 上的重构多项式为 $p_r(x)$，则大量的数值计算证实 β_r 可以按下式选择[69, 70]

$$\beta_r=\sum_{l=1}^{k-1}\left\{\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}(\Delta x)^{2l-1}\left(\frac{\partial^l p_r(x)}{\partial x^l}\right)^2\mathrm{d}x\right\}\quad (r=0,1,\cdots,k-1) \tag{10-6-56}$$

例如当 $k=2$ 时，则

$$\beta_0=(\bar{u}_{i+1}-\bar{u}_i)^2,\quad \beta_1=(\bar{u}_i-\bar{u}_{i-1})^2 \tag{10-6-57}$$

当 $k=3$ 时，则



$$\begin{cases}\beta_0=\dfrac{13}{12}(\bar{u}_i-2\bar{u}_{i+1}+\bar{u}_{i+2})^2+\dfrac{1}{4}(3\bar{u}_i-4\bar{u}_{i+1}+\bar{u}_{i+2})^2\\ \beta_1=\dfrac{13}{12}(\bar{u}_{i-1}-2\bar{u}_i+\bar{u}_{i+1})^2+\dfrac{1}{4}(\bar{u}_{i-1}-\bar{u}_{i+1})^2\\ \beta_2=\dfrac{13}{12}(\bar{u}_{i-2}-2\bar{u}_{i-1}+\bar{u}_i)^2+\dfrac{1}{4}(\bar{u}_{i-2}-4\bar{u}_{i-1}+3\bar{u}_i)^2\end{cases} \tag{10-6-58}$$

作为一个典型算例，文献[71]中详细讲述了在非结构网格下一类三阶加权高分辨率格式的构造过程，可供感兴趣者参考。

10.6.4 紧致格式与强紧致格式

紧致格式的深入研究与应用是当前高精度格式研究的主要方向之一，它以精度高且格式所用点数少的特点而受到重视。20 世纪 90 年代以来，紧致格式有了新发展，文献[38]给出了不限于三点的对称紧致格式如五点的六阶精度格式、七点的十阶精度格式等，并给出了高阶导数的紧致逼近公式，同时也对这些逼近格式所能正确模拟的波数做了近似分析。应该看到，这些紧致格式（又称 Hermitian Compact Scheme）仍有不足之处即格式涉及的点数还嫌多，它会导致在边界上及在邻近边界的内点上处理边界问题的困难，为此文献[72，73]对上述紧致格式进行了改进，提出了迎风紧致以及超紧致的思想，然而上述文献未给出混合导数的处理过程以及边界点上如何具体进行高精度处理的措施。文献[39]在紧致格式的基础上，在三点模板的框架下，给出了构造各奇次偏导数与偶次偏导数以及混合偏导数的高精度差分逼近通用公式，并给出了内点及边界点上高精度处理的具体方法。文献[39]称这种格式为强紧致格式。因此，下面主要介绍强紧致格式。首先考虑针对 Euler 与 N-S 方程的模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0\quad (f=au, a=\text{const}) \tag{10-6-59}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (\mu=\text{const}, f=au, a=\text{const}) \tag{10-6-60}$$

令 G 为任意函数，引进差分逼近式 $G^{<j>}$，注意这里上标<*>具有式（10-6-61）所赋予的特殊含义，即对于在 i 点处的任意函数 G 来讲，$G_i^{<j>}$ 的定义式为

$$G_i^{<j>}\equiv(\Delta x)^j G_i^{(j)}\equiv(\Delta x)^j\frac{\partial^j G_i}{\partial x^j}. \tag{10-6-61}$$

如果用 G 代替模型方程式（10-6-59）与式（10-6-60）中的 u，则它们的半离散化差分逼近式为

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}+\frac{a}{\Delta x}G_i^{<1>}=0, \tag{10-6-62}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}+\frac{a}{\Delta x}G_i^{<1>}=\frac{\mu}{(\Delta x)^2}G_i^{<2>} \tag{10-6-63}$$

下面分三个小问题进行讨论。

一、构造奇次导数的 2*N* 阶精度差分逼近

1. 对于内点

引进两个中心差分算子 δ_x^0 与 δ_x^2，其作用于 G_i 时分别为

$$\delta_x^0 G_i=\frac{1}{2}\left(\delta_x^+ +\delta_x^-\right)G_i=\frac{1}{2}\left(G_{i+1}-G_{i-1}\right), \tag{10-6-64}$$

$$\delta_x^2 G_i=\delta_x^+\delta_x^- G_i=\left(G_{i+1}-2G_i+G_{i-1}\right), \tag{10-6-65}$$

式中，δ_x^+，δ_x^- 的定义与目前流行的计算流体力学书中所采用的定义相同[74, 75]，即

$$\delta_x^+ G_i\equiv G_{i+1}-G_i,\quad \delta_x^- G_i\equiv G_i-G_{i-1} \tag{10-6-66}$$

将式（10-6-65）在 i 点作 Taylor 级数展开，各项分别用算子 $(\Delta x)^{2r-1}\dfrac{\partial^{(2r-1)}}{\partial x^{(2r-1)}}$ 作用，并注意式（10-6-61）的定义，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[G_{i+1}^{<2r-1>}-2G_i^{<2r-1>}+G_{i-1}^{<2r-1>}\right]\\&=\sum_{s=1}^{N-r}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s-1>}\right]+O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right)\quad (r=1,2,\cdots,N-1)\end{aligned} \tag{10-6-67}$$

当 $r=N-1$ 时，上式变为

$$\delta_x^2 G_i^{<2N-3>}=G_i^{<2N-1>}+O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right) \tag{10-6-68}$$

将式式（10-6-68）代入到式（10-6-67）得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N-r-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s-1>}\right]-\frac{1}{2}\delta_x^2 G_i^{<2r-1>}+\frac{1}{[2(N-r)]!}\delta_x^2 G_i^{<2N-3>}+\\&O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right)=0\quad (r=1,2,\cdots,N-2)\end{aligned} \tag{10-6-69}$$

另外，将式（10-6-64）在 i 点作 Taylor 级数展开并注意到式（10-6-61）与式（10-6-68），得到

$$\sum_{s=1}^{N-1}\left[\frac{1}{(2s-1)!}G_i^{<2s-1>}\right]+\frac{1}{(2N-1)!}\delta_x^2 G_i^{<2N-3>}+O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right)=\delta_x^0 G_i \tag{10-6-70}$$

显然式（10-6-70）与式（10-6-69）中共含有 $(N-1)$ 个未知函数，即 $G^{<1>},G^{<3>},\cdots,G^{<2N-3>}$，而且式（10-6-69）与式（10-6-70）也共有 $(N-1)$ 个方程，因而该问题可以统一求解，它们反映了内点格式的强紧致特性。

2. 对于左边界点

现针对左边界点讨论构造奇次导数 2*N* 阶精度差分逼近的具体过程。引进向前差分算子 δ_x^+



$$\delta_x^+ G_i = G_{i+1} - G_i \tag{10-6-71}$$

将式（10－6－71）在 i 点作 Taylor 级数展开，并注意用算子 $(\Delta x)^{(2r-1)} \dfrac{\partial^{(2r-1)}}{\partial x^{(2r-1)}}$ 作用各项，得到

$$\sum_{s=1}^{N-r}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s-1>}\right] - \delta_x^+ G_i^{<2r-1>} = O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right) - C_r \quad (r=1,2,\cdots,N-1) \tag{10-6-72}$$

式中

$$C_r = \sum_{s=1}^{N-r+1}\left[\frac{1}{(2s-1)!}G_i^{<2r+2s-2>}\right] \tag{10-6-73}$$

特别是当 $r=N-1$ 时，式（10－6－72）变为

$$\delta_x^+ G_i^{<2N-3>} = \frac{1}{2}G_i^{<2N-1>} + C_{N-1} - O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right) \tag{10-6-74}$$

将式（10－6－71）在 i 点作 Taylor 级数展开，并注意到式（10－6－74），又可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N-1}\left[\frac{1}{(2s-1)!}G_i^{<2s-1>}\right] + \frac{2}{(2N-1)!}\delta_x^+ G_i^{<2N-3>}\\ &= \delta_x^+ G_i + b_1 + \frac{2}{(2N-1)!}C_{N-1} - O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right)\end{aligned} \tag{10-6-75}$$

式是

$$b_1 = -\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2s>}\right] \tag{10-6-76}$$

将式（10－6－74）代入式（10－6－72），得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N-r-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s-1>}\right] + \frac{2}{[2(N-r)]!}\delta_x^+ G_i^{<2N-3>} - \delta_x^+ G_i^{<2r-1>} = \frac{2C_{N-1}}{[2(N-r)]!} - C_r +\\ &O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right) \quad (r=1,2,\cdots,N-2)\end{aligned} \tag{10-6-77}$$

可看出，式（10－6－75）与式（10－6－77）中共含有 $(N-1)$ 个未知函数，即 $G^{<1>}, G^{<3>}, \cdots, G^{<2N-3>}$，而且式（10－6－75）与式（10－6－77）共含有 $(N-1)$ 个方程，它们构成了对左边界点上奇次导数 $2N$ 阶精度的差分逼近。

3. 对于右边界点

引进向后差分算子 δ_x^-，其作用于 G_i 时有

$$\delta_x^- G_i = G_i - G_{i-1} \tag{10-6-78}$$

类似于左边界点的推导过程可以得到下面的公式

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N-1}\left[\frac{1}{(2s-1)!}G_i^{<2s-1>}\right] - \frac{2}{(2N-1)!}\delta_x^- G_i^{<2N-3>}\\ &= \delta_x^- G_i - b_1 - \frac{2C_{N-1}}{[2N-1]!} - O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right) \quad (r=1,2,\cdots,N-2)\end{aligned} \tag{10-6-79}$$

$$\sum_{s=1}^{N-r-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s-1>}\right]-\frac{2}{[2(N-r)]!}\delta_x^- G_i^{<2N-3>}+\delta_x^- G_i^{<2r-1>}$$
$$=C_r-\frac{2C_{N-1}}{[2(N-r)]!}+O\left((\Delta x)^{(2N+1)}\right)\quad (r=1,2,\cdots,N-2) \tag{10-6-80}$$

符号b_1,C_r与C_{N-1}的定义同前。显然式（10-6-79）与式（10-9-80）共含有$(N-1)$个未知函数，即$G^{<1>},G^{<3>},\cdots,G^{<2N-3>}$，并且式（10-6-79）与式（10-6-80）共有$(N-1)$个方程，同样它们的确定也依赖于方程组的统一求解。式（10-6-69）、式（10-6-70）、式（10-6-75）、式（10-6-77）、式（10-6-79）、式（10-6-80）构成了针对奇次导数的高精度强紧致三点差分逼近格式，并且它们对内点具有$2N$阶精度，对边界点也具有$2N$阶精度，另外，以$G^{<1>},G^{<3>},\cdots,G^{<2N-3>}$为未知函数的方程组，其系数矩阵具有典型的块三对角阵特征，它的每一个块元素均为$(N-1)\times(N-1)$的小矩阵，因此$G^{<1>},G^{<3>},\cdots,G^{<2N-3>}$的求解可用Chakravarthy发展的块三对角阵追赶法进行快速求解。

二、构造偶次导数的2N阶精度差分逼近

1. 对于内点

引进算子δ_x^2，其作用于G_i时为

$$\delta_x^2 G_i=G_{i+1}-2G_i+G_{i-1}.$$

将上式在i点作Taylor级数展开

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2s>}\right]+O\left((\Delta x)^{2(N+1)}\right)=\frac{1}{2}\delta_x^2 G_i \tag{10-6-81}$$

将上式用算子$(\Delta x)^{2r}\dfrac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}}$作用后得

$$\sum_{s=1}^{N-r}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s>}\right]+O\left((\Delta x)^{2(N+1)}\right)=\frac{1}{2}\delta_x^2 G_i^{<2r>}\quad (r=1,2,\cdots,N-1) \tag{10-6-82}$$

当$r=N-1$时，上式变为

$$G_i^{<2N>}=\delta_x^2 G_i^{<2(N-1)>}-O\left((\Delta x)^{2(N+1)}\right) \tag{10-6-83}$$

将式（10-6-83）代入到式（10-6-82）中得

$$\sum_{s=1}^{N-r-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s>}\right]-\frac{1}{2}\delta_x^2 G_i^{<2r>}+\frac{1}{[2(N-r)]!}\delta_x^2 G_i^{<2N-2>}+$$
$$O\left((\Delta x)^{2(N+1)}\right)=0\quad (r=1,2,\cdots,N-2) \tag{10-6-84}$$

将式（10-6-83）代入式（10-6-81）得

$$\sum_{s=1}^{N-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2s>}\right]+\frac{1}{(2N)!}\delta_x^2 G_i^{<2N-2>}+O\left((\Delta x)^{2(N+1)}\right)=\frac{1}{2}\delta_x^2 G_i \tag{10-6-85}$$



显然，式（10－6－84）与式（10－6－85）共含有$(N-1)$个未知函数，即$G^{<2>},G^{<4>},\cdots,G^{<2N-2>}$，而且式（10－6－84）与式（10－6－85）也含有$(N-1)$个方程，故内点问题适定。

2. 对左边界点的处理

引进向前差分算子δ_x^+，

$$\delta_x^+ G_i = G_{i+1} - G_i \tag{10-6-86}$$

将上式在i点作 Taylor 级数展开，并用算子$(\Delta x)^{2r}\dfrac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}}$作用各项，可得

$$\sum_{s=1}^{N-r}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s>}\right]-\delta_x^+ G_i^{<2r>} = e_r + O\left((\Delta x)^{2(N+1)}\right)\quad (r=1,2,\cdots,N-1) \tag{10-6-87}$$

式中

$$e_r = -\sum_{s=1}^{N-r}\left[\frac{1}{(2s-1)!}G_i^{<2r+2s-1>}\right] \tag{10-6-88}$$

当$r=N-1$时，式（10－6－87）变为

$$\frac{1}{2}G_i^{<2N>} = \delta_x^+ G_i^{<2N-2>} + e_{N-1} + O\left((\Delta x)^{2N+1}\right) \tag{10-6-89}$$

将式（10－6－89）代入到式（10－6－87），得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N-r-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s>}\right]+\frac{2}{[2(N-r)]!}\delta_x^+ G_i^{<2N-2>} - \delta_x^+ G_i^{<2r>}\\ &= e_r - \frac{2}{[2(N-r)]!}e_{N-1} + O\left((\Delta x)^{2N+1}\right)\quad (r=1,2,\cdots,N-2)\end{aligned} \tag{10-6-90}$$

另外，将式（10－6－86）在i点作 Taylor 级数展开，并注意到式（10－6－89），又可得

$$\sum_{s=1}^{N-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2s>}\right]+\frac{2}{(2N)!}\delta_x^+ G_i^{<2N-2>} = \delta_x^+ G_i + b_2 - \frac{2}{(2N)!}e_{N-1} + O\left((\Delta x)^{2N+1}\right) \tag{10-6-91}$$

式中

$$b_2 = -\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{1}{(2s-1)!}G_i^{<2s-1>}\right] \tag{10-6-92}$$

式（10－6－90）与式（10－6－91）含有$(N-1)$个未知函数，即$G^{<2>},G^{<4>},\cdots,G^{<2N-2>}$，而式（10－6－90）与式（10－6－91）也共有$(N-1)$个方程，它们构成了对左边界点上针对偶次导数$2N$阶精度的差分逼近。

3. 右边界点的处理

引进后差分算子δ_x^-，作用于G_i有

$$\delta_x^- G_i = G_i - G_{i-1}$$

类似于左边界点的推导过程，可得到如下两个方程

$$\sum_{s=1}^{N-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2s>}\right]-\frac{1}{(2N)!}\delta_x^- G_i^{<2N-2>}=-\delta_x^- G_i-b_2+\frac{2}{(2N)!}e_{N-1}+O\left((\Delta x)^{2N+1}\right) \quad (10-6-93)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N-r-1}\left[\frac{1}{(2s)!}G_i^{<2r+2s>}\right]-\frac{2}{[2(N-r)]!}\delta_x^- G_i^{<2N-2>}+\delta_x^- G_i^{<2r>}\\&=\frac{2}{[2(N-r)]!}e_{N-1}-e_r+O\left((\Delta x)^{2N+1}\right)\quad (r=1,2,\cdots,N-2)\end{aligned} \quad (10-6-94)$$

方程式（10－6－93）与式（10－6－94）含有$(N-1)$个未知函数，即$G^{<2>},G^{<4>},\cdots,G^{<2N-2>}$，而且式（10－6－93）与式（10－6－94）由$(N-1)$个方程组成，因此右边界点问题也适定。至此，式（10－6－84）、式（10－6－85）、式（10－6－90）、式（10－6－91）、式（10－6－93）与式（10－6－94）构成了针对偶次导数的高精度强紧致三点差分逼近格式。它们对内点具有$(2N+1)$阶精度，对边界点具有$2N$阶精度。另外，以$G^{<2>},G^{<4>},\cdots,G^{<2N-2>}$为未知函数的方程组的系数矩阵也属于块三角阵，它的每个块元素也均为$(N-1)\times(N-1)$的小矩阵，也可以用 Chakravarthy 算法快速求解。

三、构造混合导数的 2N 阶精度差分逼近

假设G为任意函数，为了得到混合导数$\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}$的高精度差分逼近，首先要获得混合导数的高阶精度三点强紧致格式，文献[39]中提出了如下措施：第 1 步：首先采用上面第 1 节中给出的关于构造奇次导数$2N$阶精度差分逼近的办法在x方向上构造强紧致$2N$阶精度的差分逼近，得到$\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_i$；第 2 步：以$(\Delta x)\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)$取代第 1 步中的任意函数$G$，并且在$y$方向上构造强紧致$2N$阶精度的差分逼近，便得到了$\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}$的高精度强紧致格式。下面以内点为例具体的说明上述过程：为简便起见，令$\Delta x=\Delta y=h$，引进中心算子δ_y^0与δ_y^2，它们作用于G_j时分别为

$$\delta_y^0 G_j=\frac{1}{2}\left(\delta_y^+ +\delta_y^-\right)G_j=\frac{1}{2}\left(G_{j+1}-G_{j-1}\right) \quad (10-6-95)$$

$$\delta_y^2 G_j=\delta_y^+\delta_y^- G_j=G_{j+1}-2G_j+G_{j-1} \quad (10-6-96)$$

以$\left(h\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_{i,j}$代替式（10－6－96）中的$G$之后，将其在$j$点作 Taylor 级数展开，并用算子$h^{(2r-1)}\dfrac{\partial^{(2r-1)}}{\partial y^{(2r-1)}}$作用各项，可得



$$\sum_{s=1}^{N-r}\left[\frac{h^{2(r+s)}\partial^{2(r+s)}G}{(2s)!\partial x\partial y^{(2r+2s-1)}}\right]_{i,j}-\frac{1}{2}B_r+O(h^{2N+1})=0 \tag{10-6-97}$$

$$\begin{aligned}B_r&=\left[h^{2r}\frac{\partial^{2r}G}{\partial x\partial y^{(2r-1)}}\right]_{i,j+1}-2\left[h^{2r}\frac{\partial^{2r}G}{\partial x\partial y^{(2r-1)}}\right]_{i,j}+\left[h^{2r}\frac{\partial^{2r}G}{\partial x\partial y^{(2r-1)}}\right]_{i,j-1}\\&=\delta_y^2\left[h^{2r}\frac{\partial^{2r}G}{\partial x\partial y^{(2r-1)}}\right]_{i,j}\quad (r=1,2,\cdots,N-1)\end{aligned} \tag{10-6-98}$$

当$r=N-1$时，式（10-6-97）变为

$$\left[h^{2N}\frac{\partial^{2N}G}{\partial x\partial y^{(2N-1)}}\right]_{i,j}+O(h^{2N+1})=B_{N-1} \tag{10-6-99}$$

将式（10-6-99）代入式（10-6-97）后得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N-r-1}\left[\frac{h^{2(r+s)}}{(2s)!}\frac{\partial^{2(r+s)}G}{\partial x\partial y^{(2r+2s-1)}}\right]_{i,j}+\frac{1}{[2(N-r)]!}B_{N-1}-\\&\frac{1}{2}B_r+O(h^{2N+1})=0\quad (r=1,2,\cdots,N-2)\end{aligned} \tag{10-6-100}$$

以$\left(h\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_{i,j}$代替式（10-6-95）中的$G_j$之后，将其在$j$点作 Taylor 级数展开，并注意使用式（10-6-99），可得到

$$\sum_{s=1}^{N-1}\left[\frac{h^{2s}}{(2s-1)!}\frac{\partial^{2s}G}{\partial x\partial y^{(2s-1)}}\right]_{i,j}+\frac{1}{(2N-1)!}B_{N-1}+O(h^{2N+1})=\delta_y^0\left(h\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{i,j} \tag{10-6-101}$$

式（10-6-100）与式（10-6-101）共含有$\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^4 G}{\partial x\partial y^3},\cdots,\dfrac{\partial^{(2N-2)}G}{\partial x\partial y^{(2N-3)}}$这$(N-1)$个未知函数，而且式（10-6-100）与式（10-6-101）也恰巧有$(N-1)$个方程，因此内点的混合导数问题是适定的，于是式（10-6-100）与式（10-6-101）便构成了内点上混合导数的$2N$阶精度强紧致三点差分逼近格式。

10.6.5 关于计算声学中保持色散关系的相关问题

满足色散关系是计算声学差分格式设计中最为重要的内容之一，正如文献[76]所指出的，波包和能量的传播均以群速度进行，波形以相速度传播，寄生振荡则是由于不同的波数有不同的传播速度，因而引起散射而导致的后果；色散误差是全局性的、积累性的误差；一旦选定了一种差分格式，它便相应的决定了一种数值色散关系$\omega^*=\omega^*(k^*)$（这里ω^*与k^*分

别为数值频率与数值波数），CAA 所希望的是选择那种差分格式，它能够较好的逼近物理色散关系 $\omega=\omega(k)$，换句话说它能够在频—谱空间去逼近原物理问题。因此，所谓优化差分格式的过程也正是要寻找这样一种较满意的差分格式的过程。因篇幅所限，这里不可能去介绍如何构造出一个满足 CAA 要求的最优差分格式的全过程，而仅能就其中所涉及的重要概念和某些措施分成几个小问题讨论如下：

一、耗散项、色散项以及数值波数与数值相速度

考虑模型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 或者 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0\quad(a>0,a=\text{const},f=au)$　　（10－6－102）

该方程的理论解为

$$u(x,t)=B(t)\mathrm{e}^{ikx}=\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\ B(t)=\mathrm{e}^{(\alpha-\omega\mathrm{i})t}\qquad（10-6-103）$$

这里 ω 与 k 分别为频率与波数，α 反映了系数的耗散。将上式代到模型方程中便有

$$\alpha+\mathrm{i}(ka-\omega)=0$$

于是模型方程式（10－6－102）的色散关系为 $\omega=ak$

耗散关系为 $\alpha=0$

相速度 V_p 为 $V_p=\omega/k=a$

群速度 V_g 为 $V_g=d\omega/dk=a$

对于模型方程式（10－6－102），如果采用 FTBS（时间向前差分，空间向后差分）格式，则方程式（10－6－102）被离散为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\sigma\left(u_j^n-i_{j-1}^n\right)\qquad（10-6-104）$$

其中

$$\sigma=a\frac{\Delta t}{\Delta x}\qquad（10-6-105）$$

对（10－6－104）式作 von Neumann 误差分析[75]。设 ε 是数值解的舍入误差，考虑到方程的线性性质，因此 ε 也满足式（10－6－104）即

$$\varepsilon_j^{n+1}=\varepsilon_j^n-\sigma\left(\varepsilon_j^n-\varepsilon_{j-1}^n\right)\qquad（10-6-106）$$

设 $\varepsilon(x,t)$ 可表示为

$$\varepsilon(x,t)=\sum_m[b_m(t)\mathrm{e}^{ik_m x}]\qquad（10-6-107）$$

该式表明，误差函数 $\varepsilon(x,t)$ 中包含了多种频率的波，k_m 是第 m 种成分的波数，$b_m(t)$ 是其振幅。由于式（10－6－106）是线性方程，由迭加原理，故可分别研究单个成分的增长规律，即研究如下形式



$$\varepsilon = b_m(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x} \tag{10-6-108}$$

的解。注意到

$$\begin{cases} \varepsilon_j^{n+1} = b_m(t^{n+1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x_j}, \quad \varepsilon_j^n = b_m(t^n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x_j} \\ \varepsilon_{j-1}^n = \varepsilon_j^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m \Delta x} \end{cases} \tag{10-6-109}$$

将式（10－6－109）代到式（10－6－106）便得到放大因子 g，它是振幅的增长倍数。这里 g 的表达式为

$$g = 1-\sigma\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m\Delta x}\right) = 1-\sigma[1-\cos(k_m\Delta x)] - \mathrm{i}\sigma\sin(k_m\Delta x)$$

于是放大因子的模平方是

$$|g|^2 = 1-2\sigma(1-\sigma)[1-\cos(k_m\Delta x)]$$

因此，差分格式的稳定性条件要求

$$|\,g\,| \leqslant 1 \tag{10-6-110}$$

也就是要求

$$\sigma \equiv \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1 \tag{10-6-111}$$

这就是格式（10－6－104）式应该满足的稳定性条件，常称它为 Courant-Friedrichs-Lewy(CFL) 准则，即 σ 称为 CFL 数或者 Courant 数。引进 PPW（Points Per Wavelength）数的概念并定义

$$\mathrm{PPW} = \frac{2\pi}{k_m\Delta x} \tag{10-6-112}$$

因此放大因子 g 是 CFL 数 σ 和 PPW 的函数（对于多维问题，放大因子还与波的运动方向角有关，这时要涉及波矢[77, 78]的概念）。差分格式的理论研究表明：（10－6－102）式的任何一种差分计算格式都可以用如下形式的修正方程（Modified PDE）来描述，即

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{n=2}^{\infty}\left[v_n(\Delta x)^{n-1}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left[\mu_{2m}\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\mu_{2m+1}\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}\right] \end{aligned} \tag{10-6-113}$$

式中

$$\begin{cases} \mu_{2m} \equiv \dfrac{(\Delta x)^{2m}}{\Delta t}P_m\left(a^2\left(\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = \dfrac{(\Delta x)^{2m}}{\Delta t}P_m\left(\sigma^2\right) \\ \mu_{2m+1} \equiv \dfrac{(\Delta x)^{2m+1}}{\Delta t}\left(a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)Q_m\left(a^2\left(\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = \sigma\dfrac{(\Delta x)^{2m+1}}{\Delta t}Q_m\left(\sigma^2\right) \end{cases} \tag{10-6-114}$$

这里 $P_m(Z)$ 与 $Q_m(Z)$ 是 Z 的 m 次多项式。当差分格式与微分方程无条件相容时，则 P_m 与 Q_m

的常数项为零；当它们为条件相容时，则 P_m 与 Q_m 的常数项不为零。设修正方程式的解是单一的 Fourier 分量，即

$$u(x,t)=u_0\exp\left\{-\mu(k)t+\mathrm{i}\left[kx-\omega(k)t\right]\right\} \qquad (10-6-115)$$

这里 $\mu(k)$ 叫做耗散系数，它只影响波的振幅；$\mu(k)>0$ 叫做正耗散，$\mu(k)<0$ 叫做负耗散，$\mu(k)=0$ 叫做零耗散。$\omega(k)$ 叫做波的频率（又称为色散系数），k 称为波数。u_0 是方程式（10－6－102）的初值，即

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad (10-6-116)$$

将式（10－6－115）代到式（10－6－113）便可得到修正方程的色散关系式

$$-\mu(k)-\mathrm{i}[\omega(k)-ak]=\sum_{m=1}^{\infty}\left[(-1)^m k^{2m}\mu_{2m}\right]+\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}\left[(-1)^m k^{2m+1}\mu_{2m+1}\right] \qquad (10-6-117)$$

比较上式两边的实部与虚部，便得到

$$\mu(k)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[(-1)^{m+1}k^{2m}\mu_{2m}\right] \qquad (10-6-118)$$

$$\omega(k)=ak+\sum_{m=1}^{\infty}\left[(-1)^{m+1}k^{2m+1}\mu_{2m+1}\right] \qquad (10-6-119)$$

上面两式表明，波型的耗散系数只依赖于修正方程右端的偶次导数项，而与奇次导数项的系数无关。相反，波型的频率只依赖于奇次导数的系数，而与偶次导数项的系数无关。因此，式（10－6－113）右端第一个和式叫做耗散误差项，第二个和式叫色散（或称弥散，也叫做频散）误差项。前者涉及到差分格式的稳定性，影响到波的幅值；后者涉及到差分格式的相位误差或者频率的变化。下面以 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 为例，说明不同的差分格式将导致不同的数值波数 k^* 和不同的数值相速度 a^*；首先由 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 计算 u 的精确一阶导数

$$\frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\partial x}=\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad (10-6-120)$$

如果采用二阶中心差分算子 $(\delta_x u)_j$ 去逼近 $(\partial u/\partial x)_j$，这时 $(\delta_x u)_j$ 为

$$(\delta_x u)_j=\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+1)k\Delta x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)k\Delta x}}{2\Delta x}=\mathrm{i}\frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\mathrm{i}k^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad (10-6-121)$$

这里数值波数 k^* 为

$$k^*=\frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}\approx k-\frac{k^3\Delta x^2}{6}+\cdots \qquad (10-6-122)$$

通常，差分算子总可以写为如下的形式，即

$$\left(\delta_x\right)_j=\left(\delta_x^a\right)_j+\left(\delta_x^s\right)_j \qquad (10-6-123)$$



这里 $\left(\delta_x^a\right)_j$ 与 $\left(\delta_x^s\right)_j$ 分别为反对称算子与对称算子，例如

$$\left(\delta_x^a u\right)_j = \frac{1}{\Delta x}\left[a_1\left(u_{j+1}-u_{j-1}\right)+a_2\left(u_{j+2}-u_{j-2}\right)+a_3\left(u_{j+3}-u_{j-3}\right)\right] \quad (10-6-124)$$

$$\left(\delta_x^s u\right)_j = \frac{1}{\Delta x}\left[b_0 u_j + b_1\left(u_{j+1}+u_{j-1}\right)+b_2\left(u_{j+2}+u_{j-2}\right)+b_3\left(u_{j+3}+u_{j-2}\right)\right] \quad (10-6-125)$$

借助于式（10－6－124）与式（10－6－125），则式（10－6－123）表达的算子作用于 e^{ikx} 后得到这时相应的 ik^*e^{ikx} 值，这里数值波数 k^* 为

$$ik^* = \frac{1}{\Delta x}\left[b_0 + 2\left(b_1\cos\xi + b_2\cos 2\xi + b_3\cos 3\xi\right) + 2i\left(a_1\sin\xi + a_2\sin 2\xi + a_3\sin 3\xi\right)\right]$$

（10－6－126）

式中，$\xi \equiv k\Delta x$。

当采用四阶 Pade 格式，即

$$\left(\delta_x u\right)_{j-1} + 4\left(\delta_x u\right)_j + \left(\delta_x u\right)_{j+1} = \frac{3}{\Delta x}\left(u_{j+1}-u_{j-1}\right) \quad (10-6-127)$$

时，数值波数 k^* 满足下式，即

$$ik^* e^{-ik\Delta x} + 4ik^* + ik^* e^{ik\Delta x} = \frac{3}{\Delta x}\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right) \quad (10-6-128)$$

式中，k^* 为

$$ik^* = \frac{i(3\sin\xi)}{(2+\cos\xi)\Delta x},\quad \xi \equiv k\Delta x \quad (10-6-129)$$

图 10.7 给出了几种差分格式下 k 与 k^* 之间的关系曲线，显然不同的差分格式有不同的数值波数 k^* 的表达式。下面讨论数值相速度。令方程式（10－6－102）具有如下形式的解，即

$$u(x,t) = f(t)e^{ikx} \quad (10-6-130)$$

其中 $f(t)$ 满足如下的微分方程

$$\frac{df}{dt} = -iakf \quad (10-6-131)$$

由上式精确的解出 f 并代入式（10－6－130），得到

$$u(x,t) = f(0)e^{ik(x-at)} \quad (10-6-132)$$

如果用二阶中心差分格式逼近空间导数项（依照式（10－6－121）），可得到如下形式关于 $f(t)$ 的常微

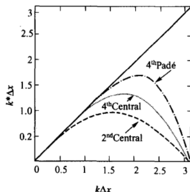


图 10.7　几种差分格式下的数值波数

分方程，即

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}a\left[\frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}\right]f=-\mathrm{i}ak^{*}f \qquad (10-6-133)$$

由上式精确的解出 f 并注意代到式（10－6－130），于是便得到 u 的数值解并记作 $u_{num}(x,t)$，即

$$u_{num}(x,t)=f(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-a^{*}t)} \qquad (10-6-134)$$

这里 a^{*} 叫数值相速度，它满足

$$a^{*}/a=k^{*}/k \qquad (10-6-135)$$

对于上面的例子，则有

$$\frac{a^{*}}{a}=\frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \qquad (10-6-136)$$

图 10.8 给出了上面二阶中心差分格式的 a^{*}/a 随着 $(k\Delta x)$ 的变化曲线，显然对于二阶中心差分格式来讲，如果欲使相速度的误差小于 0.1%时，则要求 PPW=80（即每个波长要有 80 个网格点）；如果采取 5 点四阶中心差分格式，也达到上述相速度的误差时，则要求 PPW=15；如果采用四阶 Pade 格式[79]，则要求 PPW=10；从上面列举的几个简单差分格式的例子可以看出，发展高精度算法，并进行格式优化还是十分必要的。

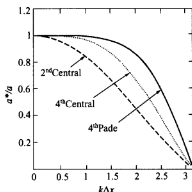


图 10.8　几种差分格式下的数值相速度

下面在未进一步讨论高精度对数值解行为的影响之前，首先介绍几个紧致格式，然后再根据数值解的群速度特点定义三种类型的格式，最后对这三种类型格式数值解的行为作进一步分析。现在介绍几个紧致格式，首先引进符号 F，使它具有特有的含义其定义为

$$F\equiv G^{<1>} \qquad (10-6-137)$$

式中，$G^{<1>}$ 的定义同（10－6－61）式中 $j=1$ 时的情况。在前面的叙述中 G 代表任何函数，但这里考虑到所讨论的方程仍是式（10－6－102），因此在下面的讨论中便将 G 定义为 u；通常，紧致格式的一般表达式为

$$\begin{cases}\sum\limits_{m}(\alpha_m F_{j+m})=\sum\limits_{m}[b_m(u_{j+m+1}-u_{j+m})] \\ \sum\limits_{m}\alpha_m=\sum\limits_{m}b_m \quad (\text{相容性条件})\end{cases} \qquad (10-6-138)$$

可以证明，具有三阶精度的迎风紧致格式为



$$\frac{2}{3}F_j^+ + \frac{1}{3}F_{j-1}^+ = \left(\frac{5}{6}\delta_x^- + \frac{1}{6}\delta_x^+\right)u_j \quad (a>0) \tag{10-6-139}$$

$$\frac{2}{3}F_j^- + \frac{1}{3}F_{j+1}^- = \left(\frac{5}{6}\delta_x^+ + \frac{1}{6}\delta_x^-\right)u_j \quad (a<0) \tag{10-6-140}$$

具有五阶精度的迎风紧致格式为

$$\frac{3}{5}F_j^+ + \frac{2}{5}F_{j-1}^+ = \frac{1}{60}\delta_x^-\left(-u_{j+2}+11u_{j+1}+47u_j+3u_{j-1}\right) \quad (a>0) \tag{10-6-141}$$

$$\frac{3}{5}F_j^- + \frac{2}{5}F_{j+1}^- = \frac{1}{60}\delta_x^+\left(-u_{j-2}+11u_{j-1}+47u_j+3u_{j+1}\right) \quad (a<0) \tag{10-6-142}$$

具有四阶精度的紧致格式为

$$\frac{1}{6}F_{j+1} + \frac{2}{3}F_j + \frac{1}{6}F_{j-1} = \delta_x^0 u_j \tag{10-6-143}$$

具有六阶精度的紧致格式为

$$\frac{1}{6}F_{j+1} + \frac{2}{3}F_j + \frac{1}{6}F_{j-1} + \frac{1}{30}\delta_x^2 F_j = \delta_x^0 u_j - \frac{1}{15}\left[\delta_x^0 u_j - \frac{1}{4}\left(u_{j+2}-u_{j-2}\right)\right] \tag{10-6-144}$$

可以采用文献[38]中所使用的办法，在 Fourier 空间讨论上述差分格式的耗散特性。这时可令 $u_j = \hat{u}(t)\exp(\mathrm{i}kx_j)$，$F_j = k^*\hat{u}(t)\exp(\mathrm{i}kx_j)$，代入上述差分格式中便可得到相应的 k^* 值，注意 k^* 为数值波数。这里 k^* 为复数，它的实部为 k_r^*，虚部为 k_i^*；例如与式（10－6－139）相对应的 k_r^* 与 k_i^* 分别为

$$k_\mathrm{r}^* = \frac{(1-\cos\xi)^2}{5+4\cos\xi}, \quad k_\mathrm{i}^* = \frac{(8+\cos\xi)\sin\xi}{5+4\cos\xi} \tag{10-6-145}$$

式中 $\xi = k\Delta x$；注意这里 k_r^* 反映了格式的耗散性，k_i^* 则反映了格式的色散性。图 10.9(a)与 10.9(b)分别给出了六种差分格式的 k_i^* 与 k_r^* 随 ξ 变化的曲线。图 10.9(a)中 0 号曲线为 $k_\mathrm{i}^* = \xi$ 的曲线，它对应于微分方程的精确解。1 号曲线是一阶精度的两点迎风格式，2 号曲线是二阶精度的三点迎风格式，3 号是三阶精度的四点迎风格式，4 号是五阶精度的六点迎风格式，5 号是三阶精度的三点迎风紧致格式，6 号曲线是五阶精度的五点迎风紧致格式。从图中可以看出，对于低波分量，各种格式都能较好的逼近精确解。从图中还可以看出，与低阶精度相比，高精度格式在逼近中高波分量时有较好的模拟能力。比较曲线 3 号与 5 号以及 4 号与 6 号曲线时可以发现，对于同阶精度的差分格式，紧致格式比传统的差分对高波分量有更高的模拟能力。图 10.9(b)反映了格式的耗散性，可以看出高精度格式有着更宽的低耗散波段，而且对于同阶精度的格式，紧致格式的低耗散波段更宽。

考虑线性标量方程（10－6－102）式，令其解为

$$u(x,t) = \exp\left[\mathrm{i}(kx-\omega t)\right]$$

令色散关系为

$$\omega = \omega(k)$$

群速度的定义为

$$V_g \equiv \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k} \qquad (10-6-146)$$

这里 V_g 为群速度。按照数值群速度的大小，差分格式通常可以分为三种类型：一种是快型格式（FST），一种是慢型格式（SLW），还有一种是混合型格式（MXD）。正如前面所述，在低波段上面三种格式数值解的群速度通常还能够逼近物理的群速度。而在高波段上，FST 型格式通常是数值群速度大于物理上的群速度，SLW 型格式通常是数值群速度小于物理上的群速度；而 MXD 型格式情况稍复杂，它在较低的高波分量范围内，其数值群速度大于物理上的群速度；而在较高的高波分量范围内，其数值群速度小于物理上的群速度。为了说明上述概念并分析这些差分格式数值解的行为，下面首先介绍以下五个格式，即

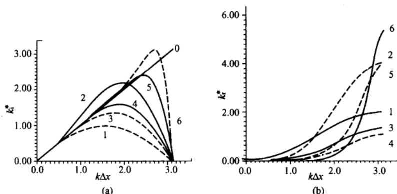


图 10.9 几种差分格式的 k_r^* 及 k_i^* 值随 ξ 的变化

（1）二阶精度的 Pade 格式，它属于 FST 型格式

$$\frac{1}{2}\left(F_j + F_{j+1}\right) = u_j - u_{j-1} \qquad (10-6-147)$$

（2）二阶精度的中心格式，它属于 SLW 型格式

$$F_j = \delta_x^0 u_j \qquad (10-6-148)$$

（3）二阶精度的迎风格式，它属于 MXD 型格式

$$F_i = \frac{1}{2}\delta_x^-\left(3u_j - u_{j-1}\right) \qquad (10-6-149)$$



（4）二阶精度宽网格模板的中心格式，它属于 SLW 型格式

$$F_j = \frac{1}{4}\left(u_{j+2} - u_{j-2}\right) \tag{10-6-150}$$

（5）五阶精度的迎风紧致格式，即式（10－6－141），它属于 MXD 型格式

利用上面的五种格式，并且取式（10－6－102）中的 $a=1$，取初值分布为

$$u(x,0) = \exp(-16x^2)\sin(\alpha_0 x) + \{\exp[-16(x-1.5)^2] + \exp[-16(x+1.5)^2]\}\sin(\alpha_1 x) \tag{10-6-151}$$

而且对于每一种差分格式都分别计算了 $\alpha_1 = 25$ 而 $\alpha_0 = 100,157,197$ 时的情况。图 10.10 给出了 $\alpha_1 = 25, \alpha_0 = 157, t = 0.5$ 时刻的计算结果，图中还给出了在该时刻下微分方程的精确解。值得

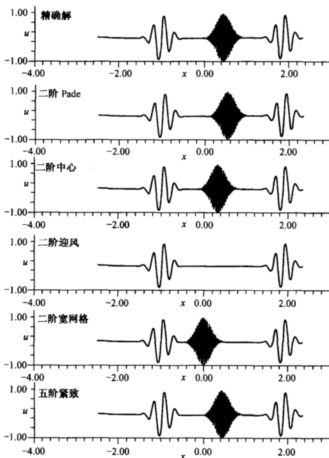


图 10.10　不同差分格式下数值解中波的传播（$t = 0.5$ 时刻）

注意的是③号差分格式的高频波基本上已耗散掉，也就是说该格式对高频波有很强的衰减效应；④号差分格式的高频波基本上停在原地。显然，在上述情况下⑤号差分格式能够较好的模拟高频波的运动规律。如果上述算例的初值分布取为

$$u(x,0)=\sin(kx)\exp[-16(x-0.5)^2] \tag{10-6-152}$$

而差分格式采用 Leap-Frog（蛙跳）格式

$$u_j^{n+1}-u_j^{n-1}=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right) \tag{10-6-153}$$

计算时选取的计算域为[0，3]，$\Delta x=1/160$，如果要在一个波长中选取 8 个计算点的话，则由$\xi=k\Delta x=2\pi/8\approx0.79$的关系便推出波数$k$为 125.7；图 10.11 给出了$t=0$与$t=2$时刻函数$u$的分布。在$t=2$时，理论上波包的中心应在$x=2.5$处，而采用（10－6－153）式的差分格式计算出的波包中心在$x=1.97$处（当$t=2$时刻）。理论上微分方程（10－6－102）的解以 1 的速度向右传播，而在$t=2$时刻时计算出的波速大约为 0.735；显然用该格式计算出的波速比理论值小。

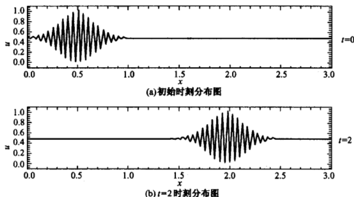


图 10.11　蛙跳格式下不同时刻 u 的分布

下面简单讨论一下由于时间离散而引入的附加色耗与耗散效应问题。例如当时间方向采用一阶精度的显式差分逼近式，即

$$u^{n+1}=u^n+(\Delta t)L_h(u^n) \tag{10-6-154}$$

时，这将主要引入负耗散效应，这是由于这时的修正方程可整理为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=L_h(u^n)-\frac{\Delta t}{2}a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cdots \tag{10-6-155}$$

而时间方向采用一阶隐式格式时，可以证明时间离散将引入正耗散，显然这对格式的稳定性有益。如果时间方向上采用二阶差分逼近，例如采用二步时间离散



$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{1}{2}(\Delta t) L_h\left(u^n\right) \\ u^{n+1} = u^n + (\Delta t) L_h\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \tag{10-6-156}$$

可以证明，上述格式所对应的修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h(u) + \frac{a^3(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots + O\left(\Delta t^3\right) \tag{10-6-157}$$

也就是说，上述过程引进了新的色耗和耗散误差，并且其主导项是色散效应[80, 81]。

二、差分格式在空间与时间上的优化

为了说明差分格式在空间与时间上的优化问题，以下分三个小方面进行讨论：

1. 空间导数差分逼近的优化问题

考虑模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{10-6-158}$$

如果空间导数的逼近采用下面形式的三点迎风紧致格式

$$F_j + \alpha F_{j-1} = b_1 \Delta u_{j-\frac{1}{2}} + b_2 \Delta u_{j+\frac{1}{2}} \tag{10-6-159}$$

式中

$$\Delta u_{j+\frac{1}{2}} = u_{j+1} - u_j,\quad \Delta u_{j-\frac{1}{2}} = u_j - u_{j-1} \tag{10-6-160}$$

显然，对于空间一阶精度，应满足

$$\alpha + 1 = b_1 + b_2 \tag{10-6-161}$$

对于空间二阶精度，应满足

$$\begin{cases} \alpha + 1 = b_1 + b_2 \\ 2\alpha = b_1 - b_2 \end{cases} \tag{10-6-162}$$

对于空间三阶精度，应满足

$$\begin{cases} \alpha + 1 = b_1 + b_2 \\ 2\alpha = b_1 - b_2 \\ 3\alpha = b_1 + b_2 \end{cases} \tag{10-6-163}$$

假设只需要满足二阶精度，这时可以选取 α 为自由参数，因此，对含 α 的这类二阶三点迎风紧致格式便可以进行优化，使之满足某一个规定的目标函数的要求。因此，很容易求出这类二阶三点迎风紧致格式的数值波数 k^*，它满足

$$k^*\Delta x = \frac{(1+\alpha)\sin(k\Delta x) + 2\alpha \mathrm{i}[1-\cos(k\Delta x)]}{1+\alpha\cos(k\Delta x) + \mathrm{i}\alpha\sin(k\Delta x)} \tag{10-6-164}$$

式中，$i = \sqrt{-1}$；$k^* = k_r^* + ik_i^*$；这里下标 r 表示复数的实部，下标 i 表示复数的虚部。显然 α 的变化将引起 k_r^* 与 k_i^* 的相应变化。目标函数可以取为

$$I = (\Delta x)\int_0^{k_{\max}} \left|\frac{k^*}{k} - 1\right| \mathrm{d}k \tag{10-6-165}$$

因此格式优化的问题就变成借助于$\partial I/\partial\alpha=0$的关系式去寻求$\alpha$的最佳值以达到使$I$值最小。显然上述过程可采用数值搜索的方法得到。如果选取优化的范围为$[0,(k\Delta x)_{max}]$（这里$(k\Delta x)_{max}=1.1$）时，由

$$(k\Delta x)_{max}=\frac{2\pi}{\text{PPW}_{min}} \tag{10-6-166}$$

可得到$\text{PPW}_{min}\approx 5.7$，最佳的$\alpha$值为$\alpha_{opt}=0.48848$，此时$I_{min}=3.781\times10^{-4}$；当然，上述方法原则上也可以推广到一般高精度格式的优化问题。

2. 时间导数差分逼近的优化问题

考虑常微方程
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=R(u,t) \tag{10-6-167}$$

采用时间上三阶精度显式的 Runge-Kutta 格式，即

$$\begin{cases}u^{(1)}=u^n+(\Delta t)[bR^n]\\ u^{(2)}=u^n+(\Delta t)[sR^n+(r-s)R^1]\\ u^{n+1}=u^n+(\Delta t)[a_1R^n+a_2R^1+a_3R^2]\end{cases} \tag{10-6-168}$$

式中
$$R^n\equiv R(u^n,t^n),\quad R^1\equiv R(u^{(1)},t^n),\quad R^2\equiv R(u^{(2)},t^n) \tag{10-6-169}$$

常用的有两种三阶 R-K 格式，其系数为

$$a_1=\frac{1}{6},a_3=\frac{1}{6},a_2=\frac{2}{3},b=\frac{1}{2},r=1,s=-1 \tag{10-6-170}$$

$$a_1=\frac{1}{4},a_3=\frac{3}{4},a_2=0,b=\frac{8}{15},r=\frac{2}{3},s=\frac{1}{4} \tag{10-6-171}$$

具有 TVD 保持性的三阶 R-K 最优格式为

$$\begin{cases}u^{(1)}=u^n+(\Delta t)R(u^n,t^n)\\ u^{(2)}=\frac{3}{4}u^n+\frac{1}{4}u^{(1)}+\frac{1}{4}(\Delta t)R(u^{(1)},t^n)\\ u^{n+1}=\frac{1}{3}u^n+\frac{2}{3}u^{(2)}+\frac{2}{3}(\Delta t)R\left(u^{(2)},t^n\right)\end{cases} \tag{10-6-172}$$

如果将式（10－6－168）以及式（10－6－167）与式（10－6－102）采用 von Neumann 误差分析便可得到该问题的放大因子为

$$g=|g|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=(a_1+a_2+a_3)\lambda(\Delta t)+(a_2b+a_3r)(\lambda\Delta t)^2+a_3b(r-s)(\lambda\Delta t)^3 \tag{10-6-173}$$

式中，$\lambda=\mathrm{i}ak^*$；k^*为数值波数。如果空间离散采用二阶三点迎风紧致格式时，则k^*便由式（10－6－164）给出。因此，当空间离散采用二阶三点迎风紧致格式、而时间离散采用三阶 R-K 格式时，该问题放大因子的幅值误差以及相位误差与$(k\Delta x)$的变化曲线是随着不同的σ



值而发生变化的，如图 10.12(a)与(b)所示，这里σ为 CFL 数，它可由式（10－6－111）所定义。而k^*中的α值可取最佳的α_{opt}值，该值可将式（10－6－165）求最佳值得到。图中给出了$\sigma=0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7$时的变化曲线。在本问题中，由于$\alpha$的优化使数值波的幅值误差与相位误差均有改善。由于这里图 10.12 是在最佳的α下得到的结果，是在这种情况下考察σ的不同取值所导致的曲线变化，所以上述计算结果表明：格式优化是必要的，而且为了节省计算时间，对上述问题允许采用较大的 CFL 数。最后应该指出的是，上面所给出的例子其格式的空间精度选取的较低，下面将要介绍的空间格式精度较高。另外，结合着下面介绍有限体积法中常用的恢复函数三阶迎风紧致格式（PFDD3）和五阶迎风紧致格式（PFDD5），也想扼要的介绍一下这类格式的优化问题。

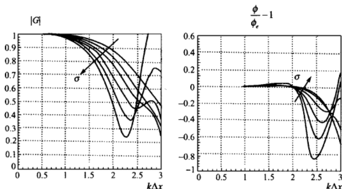


图 10.12　不同σ下放大因子的幅值误差、相位误差随$(k\Delta x)$的变化曲线

3. 恢复函数的迎风紧致格式及其优化

在有限体积法的高精度格式构造时，恢复函数是一个经常使用的重要概念[41, 61, 71, 82~84]。考虑单波方程式（10－6－102），在t时刻将方程在j单元$[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$内对空间积分便得到如下的常微方程

$$\frac{\partial\left(\bar{u}_j\Delta x_j\right)}{\partial t}+[f(u(x_{j+\frac{1}{2}},t))-f(u(x_{j-\frac{1}{2}},t))]=0 \qquad (10-6-174)$$

式中，$\bar{u}_j$是单元j对于u的平均值，即

$$\bar{u}_j=\frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}u\mathrm{d}x \qquad (10-6-175)$$

假设$\tilde{u}_j(x)$在单元j内是满足u平均值的分段光滑函数，定义原函数（Primitive Function）$w(x)$，即

$$w(x)=\int_{x_{j_0-\frac{1}{2}}}^{x}\tilde{u}_j(x)\mathrm{d}x \qquad (10-6-176)$$

式中，j_0为任意参考点。显然原函数$w(x)$在单元边界处满足

$$w_{j+\frac{1}{2}}=w(x_{j+\frac{1}{2}})=\sum_{i=j_0}^{j_0+j}(\overline{u}_i\Delta x_i) \qquad (10-6-177)$$

因此重构函数（又称恢复函数）$\tilde{u}_j(x)$便可由原函数$w(x)$的导数来获得，即

$$\tilde{u}(x)=\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}\equiv w'(x) \qquad (10-6-178)$$

由黎曼问题近似解的概念，因此半点处状态变量（或者通量）的数据重构问题就转化为求原函数在半点处的导数逼近问题，以$w'(x_{j+\frac{1}{2}})^L$与$w'(x_{j+\frac{1}{2}})^R$的逼近为例（这里上标 L 与 R 分别表示左与右两侧状态），如采用三阶迎分紧致格式，则有

$$\beta w'(x_{j-\frac{1}{2}})^L+w'(x_{j+\frac{1}{2}})^L=a_1\frac{w(x_{j+\frac{1}{2}})-w(x_{j-\frac{1}{2}})}{(\Delta x)_j}+b_1\frac{w(x_{j+\frac{3}{2}})-w(x_{j+\frac{1}{2}})}{(\Delta x)_{j+1}} \qquad (10-6-179)$$

$$w'(x_{j+\frac{1}{2}})^R+\gamma w'(x_{j+\frac{3}{2}})^R=a_2\frac{w(x_{j+\frac{1}{2}})-w(x_{j-\frac{1}{2}})}{(\Delta x)_j}+b_2\frac{w(x_{j+\frac{3}{2}})-w(x_{j+\frac{1}{2}})}{(\Delta x)_{j+1}} \qquad (10-6-180)$$

式中

$$(\Delta x)_j\equiv x_{j+\frac{1}{2}}-x_{j-\frac{1}{2}} \qquad (10-6-181)$$

注意到式（10-6-176）与式（10-6-178），则上面两式可改写为

$$\beta\tilde{u}(x_{j-\frac{1}{2}})^L+\tilde{u}(x_{j+\frac{1}{2}})^L=a_1\overline{u}(x_j)+b_1\overline{u}(x_{j+1})=(a_1+b_1)\overline{u}_j+b_1[\Delta_{j+\frac{1}{2}}\overline{u}] \qquad (10-6-182)$$

$$\tilde{u}(x_{j+\frac{1}{2}})^R+\gamma\tilde{u}(x_{j+\frac{3}{2}})^R=a_2\overline{u}(x_j)+b_2\overline{u}(x_{j+1})=(a_2+b_2)\overline{u}_j+b_2[\Delta_{j+\frac{1}{2}}\overline{u}] \qquad (10-6-183)$$

式中

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}\overline{u}\equiv\overline{u}_{j+1}-\overline{u}_j \qquad (10-6-184)$$

为了提高捕捉激波的分辨率，抑制激波附近的非物理振荡，对式（10-6-182）与式（10-6-183）右端最后一项即$[\Delta_{j+\frac{1}{2}}\overline{u}]$进行了限制[71, 82, 85, 86]，因限于篇幅，此处不予赘述。

为了方便下文的讨论，将式（10-6-182）与式（10-6-183）简单的概括为

$$\beta\tilde{u}_{j-\frac{1}{2}}+\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}=a_1\overline{u}_j+b_1\overline{u}_{j+1} \qquad (10-6-185)$$

可以证明：当$\beta=\frac{1}{2},a_1=\frac{5}{4},b_1=\frac{1}{4}$时，差分格式式（10-6-185）具有三阶精度。仿照上面的



过程，可以得到有限体积法的迎风紧致五阶格式，即

$$\beta\tilde{u}_{j-\frac{1}{2}}+\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}=a_1\overline{u}_{j-1}+a_2\overline{u}_j+a_3\overline{u}_{j+1}+a_4\overline{u}_{j+2} \tag{10-6-186}$$

当

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{12}(3\beta-1),\quad a_2=\dfrac{1}{12}(13\beta+7)\\a_3=\dfrac{1}{12}(7-5\beta),\quad a_4=\dfrac{1}{12}(\beta-1)\end{cases} \tag{10-6-187}$$

时，格式式（10-6-186）具有四阶精度，这里 β 作为调节参数。当 $\beta=\dfrac{2}{3}$ 时，格式式（10-6-186）具有五阶精度。在进行格式优化时，目标函数仍可以取为式（10-6-165），这时 β 可作为调节参数。通过优化，使 I 值达到最小以得到最佳的 β 值。大量的数值实验表明：调整 β 值对色散误差和耗散误差都会带来影响，但相比之下色散误差对 β 的变化更敏感。

10.6.6　非结构网格下双时间步长迭代格式

在计算声学中，较准确的计算出非定常流动的流场非常重要。它是进一步去确定声场的基础。目前，非定常计算有许多方法，其中有显式的，也有隐式的，这里仅想扼要介绍一下双时间步长迭代算法。这种方法最早是 Jameson 提出的[87]并用于结构网格，这种方法也同样可用于非结构网格。在非定常计算方面，国内外有大量数值计算的结果，例如文献[88～95]等。大量的数值实验证实：双时间步长迭代算法是求解非定常流场的有效方法之一。下面分两个小问题进行介绍。

1. 非结构网格下的有限体积方法

不失一般性，今取相对直角笛卡尔坐标系 (x,y,z)，三维、可压缩、非定常、雷诺平均 N-S 方程组的无量纲形式为[71]

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_V)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_V)}{\partial y}+\frac{\partial(\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_V)}{\partial z}=S_\omega \tag{10-6-188}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}=[\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\varepsilon]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{E}_V=-[0,\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz},a_1]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{F}_V=-[0,\tau_{yx},\tau_{yy},\tau_{yz},a_2]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{G}_V=-[0,\tau_{zx},\tau_{zy},\tau_{zz},a_3]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{10-6-189}$$

这里 $\boldsymbol{E}_I,\boldsymbol{F}_I,\boldsymbol{G}_I$ 为 (x,y,z) 坐标系下沿 x,y,z 方向上的无粘通量；$\boldsymbol{E}_V,\boldsymbol{F}_V$ 与 $\boldsymbol{G}_V$ 代表该坐标系下沿相应方向上的粘性项；S_ω 为方程的右端源项。显然，如果将式（10-6-188）在求解域上积分并注意将物理量置于网格单元中心，于是对于网格单元 i 便有

$$\Omega_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \sum_{j=nb(i)} [(\boldsymbol{f}_{i,j} \cdot \boldsymbol{n}_{i,j}) S_{i,j}] = (S_\omega)_i \Omega_i \tag{10-6-190}$$

这里 $\boldsymbol{f}$ 为矢通量，其定义为

$$\boldsymbol{f} \equiv (E_I + E_V)\boldsymbol{i} + (F_I + F_V)\boldsymbol{j} + (G_I + G_V)\boldsymbol{k} \tag{10-6-191}$$

在上面两个表达式中，矢量 $\boldsymbol{i,j,k}$ 分别代表沿 x,y,z 方向的单位矢量；而下标 (i,j) 表示单元 i 与单元 j 的交界面，$\boldsymbol{f}_{i,j}$ 表示交界面 (i,j) 处的矢通量；矢量 $\boldsymbol{n}_{i,j}$ 表示界面 (i,j) 的外法线单位矢量；下标 $nb(i)$ 表示单元 i 的相邻单元；Ω_i 为单元 i 的体积，$S_{i,j}$ 为交界面 (i,j) 的面积；令

$$\boldsymbol{f}_{i,j} \cdot \boldsymbol{n}_{i,j} = f_{i,j}^I + f_{i,j}^V \tag{10-6-192}$$

$$f_{i,j}^I \equiv (E_I\boldsymbol{i} + F_I\boldsymbol{j} + G_I\boldsymbol{k})_{i,j} \cdot \boldsymbol{n}_{i,j} \tag{10-6-193}$$

式中，$f_{i,j}^I$ 为交界面 (i,j) 处的无粘通量，$f_{i,j}^V$ 为相应的粘性通量。将式（10－6－190）在时间方向上采用 Euler 向后差分，便有

$$\Omega_i \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} + R_i^{k+1} = 0 \tag{10-6-194}$$

$$R_i^{k+1} \equiv -(S_\omega)_i^{k+1}\Omega_i + \sum_{j=nb(i)} [(f_{i,j}^I + f_{i,j}^V)^{k+1} S_{i,j}] \tag{10-6-195}$$

将 R_i^{k+1} 采用如下的局部线化，即[71]

$$R_i^{k+1} = R_i^k + \sum_{j=nb(i)} [(A_{ij,i}^I + A_{ij,i}^V)^k S_{i,j}\delta Q_i^k] + \sum_{j=nb(i)} [(A_{ij,j}^I + A_{ij,j}^V)^k S_{i,j}\delta Q_j^k] - (A_\omega)_i^k \Omega_i \delta Q_i^k \tag{10-6-196}$$

$$\begin{cases} (A_\omega)_i^k \equiv (\dfrac{\partial S_\omega}{\partial Q})_i^k, A_{ij,i}^I \equiv \dfrac{\partial f_1(Q_i,Q_j)}{\partial Q_i}, A_{ij,j}^I \equiv \dfrac{\partial f_1(Q_i,Q_j)}{\partial Q_j}, \\ A_{ij,i}^V \equiv \dfrac{\partial f_2(Q_i,Q_j)}{\partial Q_i}, A_{ij,j}^V \equiv \dfrac{\partial f_2(Q_i,Q_j)}{\partial Q_j}, \\ f_1(Q_i,Q_j) \equiv \dfrac{1}{2}[f_i^I + f_j^I - |A_{Roe}|(Q_j - Q_i)] \end{cases} \tag{10-6-197}$$

$$\begin{cases} f_2(Q_i,Q_j) \approx \mu\Lambda_1 \dfrac{\boldsymbol{r}_{i,j} \cdot \boldsymbol{n}_{i,j}}{|\boldsymbol{r}_{i,j}|^2}(Q_i^V - Q_j^V), \quad Q^V \equiv [0,u,v,w,\dfrac{\gamma P}{\rho}]^T, \\ \Lambda_1 \equiv \mathrm{diag}[0,1,1,1,\dfrac{1}{(\gamma-1)Pr}] \end{cases} \tag{10-6-198}$$

式中，$\boldsymbol{r}_{i,j}$ 为单元 i 与单元 j 之间的距离矢量；Pr 为普朗特数；值得注意的是，式（10－6－198）采用了文献[96]的近似处理，大量的计算表明，这种近似是可以接受的。借助于式（10－6－196），则式（10－6－194）可被整理为如下形式的隐格式：



$$\{\frac{\Omega_i}{(\Delta t)_i}I-\beta\Omega_i(A_\omega)_i^k+\alpha\beta\sum_{j=nb(i)}[S_{i,j}(A_{ij,i}^I+A_{ij,i}^V)]\}\delta Q_i^k = -R_i^k-\alpha\beta\sum_{j=nb(i)}[S_{i,j}(A_{ij,j}^I+A_{ij,j}^V)\delta Q_j^k] \tag{10-6-199}$$

式中，β 为格式开关，当 $\beta=1$ 时为隐格式；α 为加权系数；显然对于 $\beta=1$ 的隐格式，可以采用 Gauss-Seidel 点迭代进行求解。

在定常问题的求解中，并不要求在每一个时间步时上述迭代都严格收敛，一般迭代到反映方程式（10－6－199）不满足程度的最大残差下降到一定的数量级（通常可取为三个数量级）时即可停止迭代。另外，式（10－6－199）中 δQ_i^k 定义为

$$\delta Q_i^k=Q_i^{k+1}-Q_i^k \tag{10-6-200}$$

2. 非结构网格下有限体积法的双时间步长迭代格式

首先将式（10－6－194）改写为

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}+\frac{R_i^{k+1}}{\Omega_i}=0 \tag{10-6-201}$$

引进伪时间项，则上式变为

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau}+\frac{\partial Q_i}{\partial t}+\frac{R_i^{k+1}}{\Omega_i}=0 \tag{10-6-202}$$

这里 τ 代表伪时间，t 为物理时间；对物理时间项采用二阶逼近，而伪时间项用一阶逼近时，式（10－6－202）变为[97, 98]

$$\frac{Q_i^{(n),(k+1)}-Q_i^{(n),(k)}}{\Delta\tau}+\{\frac{3Q_i^{(n),(k+1)}-4Q_i^{(n)}+Q_i^{(n-1)}}{2\Delta t}+\frac{R_i^{(n),(k)}}{\Omega_i}+ \frac{1}{\Omega_i}\sum_{j=nb(i)}[(A_{ij,i}^I+A_{ij,i}^V)^{(n),(k)}S_{i,j}\delta Q_i^{(n),(k)}]+ \frac{1}{\Omega_i}\sum_{j=nb(i)}[(A_{ij,j}^I+A_{ij,j}^V)^{(n),(k)}S_{i,j}\delta Q_j^{(n),(k)}]-(A_\omega)_i^{(n),(k)}\delta Q_i^{(n),(k)}\}=0 \tag{10-6-203}$$

这就是本节给出的非结构网格下有限体积法的双时间步长迭代格式，它对物理时间具有 2 阶精度。式中上标（n）代表物理时间层，（k）代表伪时间层；而符号 $\delta Q_i^{(n),(k)}$ 的定义为

$$\delta Q_i^{(n),(k)}\equiv Q_i^{(n),(k+1)}-Q_i^{(n),(k)} \tag{10-6-204}$$

当迭代收敛时，$Q^{(n),(k)}\to Q^{(n),(k+1)}$，于是这时有

$$Q^{(n+1)}:=Q^{(n),(k+1)} \tag{10-6-205}$$

这也就是说通过内迭代获得了 $(n+1)$ 物理时间层的 Q 值。这里内迭代的收敛准则可取为

$$\frac{\left\|Q^{(n),(k+1)}-Q^{(n),(k)}\right\|_2}{\left\|Q^{(n),(k+1)}-Q^{(n)}\right\|_2}\leqslant\varepsilon_1 \tag{10-6-206}$$

这里ε_1在 10^{-3}～10^{-2} 的范围内。大量的数值实践验表明：使用式（10－6－203）可以较方便的获得非定常三维流场的数值解。当然，也可以像文献[99]那样，空间离散采用高精度、高分辨率的紧致格式或其它高精度格式[100，101]，时间离散采用双时间步长迭代格式，使最终所构造的差分格式能直接用于气动声学的计算。

参 考 文 献

1 Rayleigh Lord. The theory of sound. New York: Dover Publications, 1945

2 Lighthill M J. On sound generated aerodynamically. I. General Theory. Proc. Roy. Soc. London, 1952, A211:564～587

3 Lighthill M J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. Proc. Roy. Soc. London, 1954, A222: 1～32

4 穆宁 A Γ. 航空声学. 曹传钧译. 北京：北京航空航天大学出版社，1993

5 Curle N. The influence of solid boundaries on aerodynamic sound. Proc. Roy. Soc. London, 1955, A231: 505～514

6 Phillips O M. The intensity of Aeolian tones. J. Fluid Mech., 1956, 1:607～624

7 Burton I E, Blevins R D. Vortex shedding noise from oscillating cylinders. J. Acoust. Soc. 1976. 599～606

8 Ffowcs Williams J E, Hawkings D L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. Phil. Trans. Roy. Soc. 1969, A264: 321～342

9 Farassar F. Theory of noise generation from moving bodies with an application to helicopter rotors. NASA TR R-451, 1975

10 Farassar F. Discontinuities in aerodynamics and aerosoustics: the concept and application of generalized derivatives. Journal of Sound and Vibration, 1977, 55: 165～193

11 Farassar F, Succi G P. A review of propeller discrete frequency noise prediction technology with emphasis on two current method for time domain calculations. Journal of Sound and Vibration, 1980, 71: 399～419

12 Farassar F, Nutron P A. A numerical technique for calculation of the noise of high speed propellers with advanced geometry. NASA TP 1662, 1980

13 Goldstein M. Unified approach to aerodynamic sound generation in the presence of sound boundaries. Journal Acoust. Soc. Am. 1974, 56:497～509

14 Goldstein M E. Aeroacoustics. New York: McGraw-Hill, 1976

15 Ffowcs Williams J E. Aeroacoustics. Ann. Rev. Fluid Mech., 1977, 9: 447～468

16 Prieur J, Rahier, Gilles. Aeroacoustic integral methods, formulation and efficient numerical implementation. Aerosp. Sci. Technol. 2001, 5: 457～468



17 Lockard D P. A comparision of Ffowcs Williams-Hawkings solvers for airframe noise applications. AIAA Paper 2002～2580, (2002)

18 Morse P M, Ingard K U. Theoretical acoustics. New York: McGrall-Hill, 1968

19 Thompson P A. Compressible-fluid dynamics. New York: McGrall-Hill, 1972

20 朗道，栗弗席茨. 流体力学. 孔祥言等译，董秉纲校. 北京：高等教育出版社，1990

21 Myers M K. Transport of energy by disturbances in arbitrary steady flow. J. Fluid Mech. 1991, 226: 383～400

22 Morfey C L. Acoustic energy in non-uniform flows. Journal of Sound and Vibration, 1971, 14:159～169

23 谷超豪，许政范，李大潜等. 数学物理方程. 上海：上海科学技术出版社，1978

24 Wyld H W. Mathematical methods for physics. Massachusetts: Benjamin Publishing, 1976

25 Barton G. Elements of Green's functions and propagation. Oxford: Clarendon Press, 1989

26 华罗庚. 高等数学引论(第一卷第二分册). 北京：科学出版社，1963

27 陈懋章. 粘性流体动力学基础. 北京：高等教育出版社，2002

28 孙晓峰，周盛. 气动声学. 北京：国防工业出版社，1994

29 Powell A.Theory of vortex sound. IASA, 1964, 36(1):179～195

30 Lighthill M J. Sound generated aerodynamically. Bakerian Lecture, Proc. Roy. Soc. (London), A267: 147～182, (1962)

31 Sears W R. Aerodynamics, noise and the sonic boom. AIAA J., 1969, 7(4): 577～586

32 柯朗，希尔伯特. 数学物理方法(卷 II). 熊振翔，杨应辰译. 北京：科学出版社，1977

33 唐狄毅，叶轮机非定常流. 北京：国防工业出版社，1992

34 唐狄毅，李文兰，乔渭阳. 飞机噪声基础. 西安：西北工业大学出版社，1995

35 NASA. 轴流压气机气动设计. 秦鹏译. 北京：国防工业出版社，1975

36 Villiam E Zorumski. Aircraft noise prediction program theoretical manual. NASA TM 83199, 1976

37 Hardin J C, Hussaini M Y. Computational Aeroacoustics. ICASE/NASA Series. New York: Springer-Verlag, 1993

38 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J. of Comp. Phys., 1992, 103: 16～42

39 王保国，刘淑艳，闫为革等. 高精度强紧致三点格式的构造及边界条件的处理. 北京理工大学学报，2003，23(1):13～18

40 Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. Journal of Comp. Phys., 1993,107:262～281

41 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J. Comput. Phys., 1983, 49:357～393

42 Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. J. Comput. Phys., 1994, 115:

200～212

43 王保国，刘淑艳，杨英俊等. 非结构网格下涡轮级三维 N-S 方程的数值解. 中国工程热物理学会 2003 年热机气动热力学学术会议论文集，P69-81，或工程热物理学报，2004，25(6):940～942

44 童秉纲，尹协远，朱克勤. 涡运动理论. 合肥：中国科学技术大学出版社，1994

45 童秉纲，张炳暄，崔尔杰. 非定常流与涡运动. 北京：国防工业出版社，1993

46 吴介之，马晖扬，周明德. 涡动力学引论. 北京：高等教育出版社，1993

47 Müller E A, Obermeier F. Vortex sound. In Vortex motion. Hasomoto H & Kambe T (eds.), North-Holland, 1988,43～51

48 Kambe T. Acoustic emmisions by vortex motions. J. Fluid Mech. 1986, 173: 643～666

49 Mohring W. On vortex sound at low Mach number. J. Fluid Mech. 1978, 85:685～691

50 Smith M J, Stoker R W. Extension of CFD techniques to computational aeroacoustics (CAA): a comparative evaluation. AIAA Paper 93-0150, (1993)

51 Bechara W, Bailly C, Lafon P. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows. J. AIAA, 1994, 32(3):455～463

52 居鸿宾，沈孟育，王保国. 大攻角叶栅绕流的高效算法. 数值计算与计算机应用. 1998，19(3):203～211

53 Streett C L. Macaraeg M G. Spectral multi-domain for large scale fluid dynamic simulations. Applied Numerical Mathematics, 1989, 6:123～139

54 Colonius T, Lele S K, Moin P. Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation. J. AIAA, 1993, 31(9):1574～1582

55 Rodman L C. The application of nonreflecting boundary conditions to 2-D unsteady computations on curvilinear grids. AIAA paper 90-1587, (1990)

56 Thompson K W. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. J. Comput Phys., 1987, 68:1～24

57 Giles M B. Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations. J. AIAA, 1990, 28(12):2050～2058

58 Atkins H, Casper J. Nonreflective boundary conditions for high-order methods. J. AIAA, 1994, 32(3):512～518

59 应隆安，滕振寰. 双曲型守恒律方程及其差分方法：北京：科学出版社，1991

60 张涵信，沈孟育. 计算流体力学——差分方法的原理和应用. 北京：国防工业出版社，2003

61 刘儒勋，舒其望. 计算流体力学的若干新方法. 北京：科学出版社，2003

62 Harten A, Osher S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes I. SIAM Journal Numer Anal., 1987, 24(2): 279～309

63 Harten A. On high-order accurate interpolation for non-oscillatory shock capturing scheme. Computation



and Methods of Compensated Compactness (Dafermos C et al eds.). New York: Springer-Verlag,1986, 71～105

64 Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravathy R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. III. Journal of Comput. Phys, 1987, 71:231～303; 1997, 131:3～47

65 Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravathy R. Some results on uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. Applied Numerical Mathematics, 1986, 2:347～377

66 Harten A. ENO scheme with subcell resolution. J. Comput. Phys. 1989, 83:148～184

67 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock capturing schemes, Journal of Computational Physics, 1988, 77:439～471

68 Gottlieb S, Shu C W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. Mathematics of Computation, 1998, 67:73～85

69 Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially nonoscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. NASA CR 97-206253, (1997)

70 Shu C W. High order ENO and WENO schemes. in "High Order Methods for Computational Physics" (Eds: Barth T J, Deconinck H), Lecture Notes in Computational Science and Engineering (9). New York: Springer-Verlag, 1999

71 王保国，黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法. 北京：国防工业出版社，2000

72 马延文，傅德薰. 气动计算中的紧致格式与迎风紧致格式. 计算数学. 1992，14 (2):216～223

73 Ma Y W, Fu D X. Super compact finite difference method with uniform and nonuniform grid system. Proc. Sixth Intern. Symp. on CFD, Lake Tahoe, Nevada, 1995, Sept. 4～8, 1435～1439

74 马铁犹. 计算流体动力学. 北京：北京航空航天大学出版社，1986

75 Tannehill J C. Anderson D A. Pletcher R H. Computational fluid mechanics and heat transfer. Washington: Taylor & Francis, 1997

76 Trefethen L N. Group velocity in finite difference scheme. SIAM Review, 1982, 24(2)

77 马大猷. 现代声学理论基础. 北京：科学出版社，2004

78 杜功焕，朱哲民，龚秀芬. 声学基础. 南京：南京大学出版社，2001

79 Lomax H, Pulliam T H, Zingg D W. Fundamentals of computational fluid dynamics. New York: Springer-Verlag, 2001

80 忻孝康，刘儒勋，蒋伯诚. 计算流体动力学. 长沙：国防科技大学出版社，1989

81 傅德薰，马延文. 计算流体力学. 北京：高等教育出版社，2002

82 王保国，郭延虎，沈孟育. 恢复函数的三点迎风紧致格式构造方法及应用. 计算物理. 1997，14(4):666～668

83 王保国，郭延虎，沈孟育. 贴体曲线坐标系中恢复函数的一种构造方法及应用. 空气动力学学报，1999，17(1):117～122

84 居鸿宾，沈孟育，王保国. 原函数导数逼近数据重构的通量差分分裂方法. 清华大学学报，1997，37(11):65～68

85 汪继文，刘儒勋. 间断解问题的有限体积法. 计算物理. 2001，18(2): 97～105

86 Laney C B. Computational gasdynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998

87 Jameson A. Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings. AIAA Paper 91-1596, (1991)

88 黄伟光，陈乃兴，山崎伸彦等. 叶轮机械动静叶片排非定常气动干涉的数值模拟. 工程热物理学报，1999，20(3):294～298

89 Arnone A, Pacciani R. Rotor-stator interaction analysis using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. ASME Paper 95-GT-177, (1995)

90 张宏武，袁新，叶大均. 透平级非设计工况气动性能的数值模拟. 工程热物理学报，2001，22(2):175～178

91 刘前智，周新海，胡运聪. 轴流叶轮机三维粘性非定常流动计算的双时间方法. 见：中国工程热物理学会 2000 年热机气动热力学学术会议论文集. No20002027

92 王松涛，王仲奇，冯国泰等. 动静叶相互干涉的三维非定常流场的数值模拟. 中国工程热物理学会 2000 年热机气动热力学学术会议论文集. No20002075

93 季路成，杨吉民，徐建中. 关于 1+1 对转涡轮中热痕现象的研究. 工程热物理学报，2001，22(6):683～686

94 刘建军，蒋洪德. 汽轮机低压排汽系统气动性能分析. 工程热物理学报. 2002，23(4): 425～428

95 Corvellec C, Bruel P, Sabelnikov V A. A time-accurate scheme for the calculations of unsteady reactive flows at low Mach number. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, 29:207～227

96 Dartzi P, et al. Upwind finite volume Navier-Stokes computations on unstructured triangular meshes. AIAA Journal, 1993, 31(9): 1618～1625

97 王保国，刘淑艳，张雅. 非结构网格下非定常流场的双时间步长的加权 ENO—强紧致杂交高分辨率格式. 中国工程热物理学会 2004 年热机气动热力学论文集，P487～493，西安，2004；工程热物理学报，2005, 26

98 王保国，刘淑艳，张雅. 双时间步长加权 ENO—强紧致格式及在叶轮机械非定常流动中的应用. 航空动力学报，2005，20

99 Ekaterinaris J A. Implicit, high-resolution, compact schemes for gas dynamics and aeroacoustics. Journal of Computational Physics, 1999, 156:272～299

100 王保国，刘淑艳，潘美霞等. 强紧致六阶格式的构造及应用. 工程热物理学报. 2003，24(5): 761～763

101 Wesseling P. Principles of computational fluid dynamics. New York: Springer-Verlag, 2001

102 易家训. 分层流. 北京：科学出版社，1983



习　题

1. 考虑密度分层流[102]，并假设该流体原来处于静止状态，今讨论声波在该流体中的传播问题。令其控制方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho'}{\partial t}+\boldsymbol{V}'\cdot\nabla\bar{\rho}=0\\ \bar{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{V}'=0\\ \bar{\rho}\dfrac{\partial \boldsymbol{V}'}{\partial t}=\rho'\boldsymbol{f}-\nabla P'\end{cases} \tag{*1}$$

由上式出发试证明下式成立，即 $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\nabla^2 P'=-\nabla\cdot(\rho'\boldsymbol{f})$。　(*2)

2. 如果在没有声扰动时媒质的静态密度是不均匀的，即 $\rho_0=\rho_0(x,y,z)$，试证明在这种情况下的声波方程为

$$\nabla^2 P'-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}=(\nabla P')\cdot[\nabla(\ln\rho_0)] \tag{*3}$$

3. 设声波在空间中传播，如仍考虑声波为小振幅时的情况，则线化的运动方程为

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial P'}{\partial r} \tag{*4}$$

物态方程为

$$p'=a_0^2\rho' \tag{*5}$$

设在 r 处波阵面的面积为 S，对于小振幅声波，其连续方程为

$$-\rho_0\frac{\partial(vS)}{\partial r}=S\frac{\partial \rho'}{\partial t} \tag{*6}$$

试证明：① 声波方程为

$$\left[\frac{\partial^2 p'}{\partial r^2}+\frac{\partial P'}{\partial r}\frac{\partial(\ln S)}{\partial r}\right]=\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} \tag{*7}$$

② 如果声波的波阵面按 $S=S_0[1+a_n(r-r_0)]$ 的幂指数规律变化，其中 S_0 为 $r=r_0$ 处的面积，a_n 为常数，试导出声波方程的具体形式。

4. 设有一平面声波，其声压 $P'=P_a\cos(\omega t-kx-\varphi)$，这里 φ 为初相角；试求出该声场的平均能量密度以及声能量通量（声强）。

5. 假设声场作简谐振荡，声压具有如下形式：

$$P'(\boldsymbol{r},t)=P'_\omega(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

它满足下面的非齐次波动方程，即

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\nabla^2 P'=-f(\boldsymbol{r}) \tag{*8}$$

试证明：

① 声压幅值 $P'_\omega(\boldsymbol{r})$ 满足 Helmholtz 方程，这里 ω 是振荡圆频率，a 为声速。

② 如果利用格林函数法，则声压的幅值可以用下式表达，即

$$P'_\omega(\boldsymbol{r})=-\oint\!\!\oint_{\partial\Omega}[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial}{\partial n_0}P'_\omega(\boldsymbol{r}_0)-P'_\omega(\boldsymbol{r})\frac{\partial G}{\partial n_0}]\mathrm{d}S_0+\iiint_\Omega f_\omega(\boldsymbol{r}_0)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau \tag{*9}$$

式中，$\partial\Omega$ 是域Ω的边界；$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 为格林函数。当 $\boldsymbol{r}$ 趋于无限大时，上式的面积分趋于零，于是这时（*9）式退化为

$$P'_\omega(\boldsymbol{r})=\iiint_\Omega f_\omega(\boldsymbol{r}_0)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau \tag{*10}$$

试由（*10）式出发，并借助于 Fourier 变换，证明下式成立

$$P'(\boldsymbol{r},t)=-\iiint_\Omega\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f_\omega(\boldsymbol{r}_0)\frac{1}{4\pi R}\exp[-\mathrm{i}\omega(t-\frac{R}{a})]\mathrm{d}\omega\right\}\mathrm{d}\tau \tag{*11}$$

式中，$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$。显然，如果利用高等数学中著名的卷积公式，便可将频域内函数的积分变为时间域内的积分，试证明由（*11）式还可推出（*12）式，即

$$P'(\boldsymbol{r},t)=-\iiint_\Omega\frac{1}{4\pi R}f(\boldsymbol{r}_0,t-\frac{R}{a})\,\mathrm{d}\tau \tag{*12}$$

6. 仔细分析一下 Lighthill 方程式（10－2－22）可以发现，方程两边的变量是互相包含的。原则上，这个方程是可以由解析办法或者数值计算的方法进行求解的。然而，人们大量数值计算的实践证实，该方程在收敛问题上遇到困难。试分析数值求解式（10－2－22）时收敛困难的原因？能否给出一些解决收敛的办法？

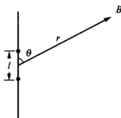


图 10.13　相距为 l 的两个点声源

7. 设有两个频率相同、源强分别为 Q_{01} 与 Q_{02} 的同相振动的点声源，它们相距为 l，其排列形式如图 10.13 所示。试证明离声源很远处（即 $r\gg l$ 时）的声压为

$$P'=\mathrm{i}\frac{k\rho_0 a_0}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}[(Q_{01}+Q_{02})\cos(\frac{\pi\cos\theta}{\lambda})+\mathrm{i}(Q_{01}-Q_{02})\sin(\frac{\pi\cos\theta}{\lambda})] \tag{*13}$$

式中，λ 为波长；k 为波数；ω 为频率。

8. 在题 7 中，如果令 $Q_{01}=-Q_{02}$，即两个点源组成为偶极子，试证明这时（*13）式可以简化为如下形式



$$P' = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} [-2i\sin(\frac{kl\cos\theta}{2})] \tag{*14}$$

并确定这时 A 的具体形式。

9. 试分析喷流噪声产生的主要原因？采用双涵道涡轮喷气发动机为什么会对排气降噪产生良好效果呢？你可否再给一些喷流降噪的办法？

10. 试分析压气机与涡轮产生噪声的主要原因？可否给出一些使压气机或涡轮降噪的措施呢？

11. 利用式（10-6-9），讨论单行波方程的 Lax 格式，Lax-Wendroff 格式是否满足 TVD 条件？

12. 考虑方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$，利用单步 Lax-Wendroff 格式并且以单个 Fourier 分量 e^{ikx} 为初值，给出差分方程的精确解。如果将解写为如下形式，即

$$u = \exp(-K_r t/\Delta x)\exp[ik(x - a\frac{K_i}{\alpha}t)] \tag{*15}$$

式中 K_r 与 K_i 的关系为

$$K^* = K_r + iK_i \tag{*16}$$

这里 $\alpha \equiv k\Delta x$， K^* 为数值波数。试给出 K_r, K_i 随 α 的变化曲线（$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$）。

13. ① 紧致格式与强紧致格式的区别是什么？与普通差分格式相比，这两种格式在边界条件处理、内点计算以及计算中的数据存贮上各具有什么特点？

② 对于奇次导数项，试推导出左边界点上的四阶、六阶以及八阶精度的强紧致格式？

③ 对于混合导数项，试说明在左边界点上如何构造强紧致格式？

14. 在波动方程及计算声学的数值计算中，PPW 数是经常要遇到的一个重要概念，试用自己的语言描述一下 PPW 数的含义？在网格设计中，如何获得满足 PPW 数要求的合理网格呢？并用 FORTRAN 语言或 C 语言编制相应的二维网格生成程序。

15. ① 非定常计算中，为什么要对时间精度提出要求？采用时间上具有一阶精度的格式去计算非定常流动问题，能否得到物理上非定常过程的数值解？为什么？

② 能否给出一些获得时间上高精度的数值方法？除了双时间步长迭代格式之外，你能否给出一些适用于非定常流场计算的高效、高精度算法？

16. ① 你认为计算气动声学中的难点是什么？与普通计算流体力学相比，为什么计算气动声学对数值方法要提出更高的要求？你认为如何才能逐步实现这些要求？

② 古典声学与气动声学之间的区别有哪些？可否扼要叙述一下近 20 年气动声学的主要进展？在计算气动声学中，你认为当前主攻的方向是什么？

附录　气体动力学函数表

表 1　二维超声速等熵流动函数表（γ=1.4 的量热完全气体）

$\theta=\nu(M)$	α	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	μ	r/r^*
0°00′	0°00′	1.000	1.000	0.528	0.634	0.833	90°00′	1
0°10′	13°08′	1.026	1.022	0.512	0.620	0.826	77°02′	1.027
0°20′	16°05′	1.039	1.032	0.504	0.613	0.822	74°15′	1.041
0°30′	18°24′	1.051	1.042	0.497	0.607	0.819	72°06′	1.049
0°40′	20°25′	1.062	1.051	0.490	0.601	0.816	70°15′	1.065
0°50′	22°06′	1.073	1.060	0.484	0.596	0.813	68°44′	1.077
1°00′	23°32′	1.083	1.067	0.479	0.591	0.810	67°28′	1.087
1°30′	27°06′	1.109	1.088	0.463	0.577	0.803	64°24′	1.108
2°00′	30°00′	1.133	1.107	0.450	0.565	0.796	62°00′	1.147
2°30′	32°33′	1.155	1.125	0.437	0.553	0.789	59°57′	1.176
3°00′	34°54′	1.178	1.142	0.424	0.542	0.783	58°06′	1.205
3°30′	37°00′	1.199	1.157	0.413	0.532	0.777	56°30′	1.234
4°00′	38°52′	1.219	1.172	0.402	0.522	0.771	55°08′	1.262
4°30′	40°39′	1.238	1.186	0.392	0.513	0.766	53°51′	1.290
5°	42°18′	1.257	1.200	0.383	0.504	0.760	52°42′	1.312
6°	45°24′	1.294	1.227	0.364	0.497	0.749	50°36′	1.372
7°	48°18′	1.331	1.253	0.346	0.468	0.738	48°42′	1.437
8°	51°00′	1.367	1.277	0.330	0.452	0.728	47°00′	1.498
9°	53°28′	1.401	1.300	0.314	0.437	0.718	45°32′	1.559
10°	55°50′	1.435	1.323	0.299	0.422	0.708	44°10′	1.626
11°	58°06′	1.469	1.345	0.285	0.408	0.698	42°54′	1.690
12°	60°20′	1.504	1.367	0.271	0.393	0.688	41°40′	1.772
13°	62°24′	1.536	1.388	0.258	0.380	0.679	40°36′	1.845
14°	64°25′	1.569	1.408	0.246	0.367	0.670	39°35′	1.923
15°	66°24′	1.603	1.428	0.234	0.354	0.660	38°36′	2.005
16°	68°24′	1.639	1.448	0.222	0.341	0.650	37°36′	2.094
17°	70°18′	1.673	1.467	0.211	0.329	0.641	36°42′	2.183
18°	72°06′	1.705	1.486	0.201	0.318	0.632	35°54′	2.291
19°	73°57′	1.741	1.505	0.190	0.306	0.622	35°03′	2.394
20°	75°42′	1.775	1.523	0.181	0.295	0.613	34°18′	2.500
21°	77°27′	1.809	1.542	0.171	0.284	0.604	33°33′	2.612
22°	79°12′	1.846	1.559	0.162	0.273	0.595	32°48′	2.735
23°	80°52′	1.880	1.576	0.154	0.263	0.586	32°08′	2.858
24°	82°30′	1.914	1.594	0.146	0.253	0.576	31°30′	2.993
25°	84°10′	1.951	1.610	0.138	0.243	0.568	30°50′	3.163



续表

$\theta=\nu(M)$	α	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	μ	r/r^*
26°	85°48′	1.988	1.628	0.130	0.233	0.558	30°12′	3.319
27°	87°24′	2.028	1.644	0.123	0.224	0.550	29°33′	3.476
28°	89°00′	2.063	1.660	0.116	0.215	0.541	29°00′	3.647
29°	90°30′	2.096	1.675	0.1100	0.207	0.532	28°30′	3.820
30°	92°00′	2.130	1.691	0.1040	0.198	0.523	28°00′	4.046
31°	93°36′	2.173	1.706	0.0980	0.190	0.515	27°24′	4.256
32°	95°05′	2.209	1.722	0.0920	0.182	0.506	26°55′	4.436
33°	96°33′	2.245	1.737	0.0867	0.174	0.497	26°27′	4.710
34°	98°03′	2.285	1.752	0.0814	0.167	0.488	25°57′	4.955
35°	99°33′	2.327	1.767	0.0764	0.159	0.480	25°27′	5.236
36°	101°00′	2.366	1.782	0.0717	0.152	0.471	25°00′	5.521
37°	102°33′	2.411	1.796	0.0672	0.145	0.462	24°30′	5.741
38°	103°57′	2.454	1.810	0.0630	0.139	0.454	24°03′	6.166
39°	105°24′	2.498	1.824	0.0590	0.132	0.446	23°36′	6.472
40°	106°48′	2.539	1.838	0.0552	0.126	0.437	23°12′	6.919
41°	108°12′	2.581	1.852	0.0514	0.120	0.428	22°48′	7.362
42°	109°36′	2.624	1.865	0.0481	0.114	0.420	22°24′	7.798
43°	111°00′	2.670	1.878	0.0450	0.109	0.412	22°00′	8.260
44°	112°21′	2.717	1.891	0.0419	0.104	0.404	21°36′	8.710
45°	113°48′	2.765	1.905	0.0383	0.098	0.395	21°12′	9.184
46°	115°12′	2.816	1.918	0.0360	0.093	0.387	20°48′	9.954
47°	116°36′	2.869	1.930	0.0334	0.088	0.379	20°24′	10.57
48°	117°54′	2.910	1.943	0.0310	0.084	0.371	20°06′	11.20
49°	119°15′	2.959	1.955	0.0288	0.079	0.363	19°45′	11.97
50°	120°36′	3.010	1.967	0.0267	0.075	0.355	19°24′	12.94
51°	121°57′	3.064	1.978	0.0249	0.071	0.348	19°03′	13.62
52°	123°18′	3.119	1.990	0.0229	0.067	0.340	18°42′	14.72
53°	124°38′	3.174	2.002	0.0211	0.063	0.332	18°22′	15.78
54°	126°00′	3.236	2.014	0.0194	0.060	0.324	18°00′	16.90
55°	127°18′	3.289	2.025	0.0178	0.056	0.316	17°42′	18.62
56°	128°36′	3.344	2.036	0.0164	0.053	0.309	17°24′	19.49
57°	129°55′	3.404	2.047	0.0151	0.050	0.302	17°05′	20.89
58°	131°15′	3.470	2.058	0.0138	0.047	0.294	16°45′	22.49
59°	132°36′	3.542	2.069	0.0126	0.044	0.286	16°24′	24.38
60°	133°54′	3.606	2.080	0.0115	0.041	0.279	16°06′	26.30
61°	135°10′	3.666	2.090	0.0105	0.039	0.272	15°50′	28.32
62°	136°30′	3.742	2.100	$0.954\cdot10^{-2}$	0.036	0.265	15°30′	30.55
63°	137°48′	3.814	2.111	$0.869\cdot10^{-2}$	0.034	0.258	15°12′	33.89
64°	139°03′	3.876	2.121	$0.784\cdot10^{-2}$	0.031	0.250	14°57′	36.40
65°	140°20′	3.949	2.130	$0.712\cdot10^{-2}$	0.029	0.244	14°40′	39.63
66°	141°36′	4.021	2.140	$0.645\cdot10^{-2}$	0.027	0.237	14°24′	43.15
67°	142°54′	4.124	2.150	$0.584\cdot10^{-2}$	0.025	0.230	14°02′	47.85
68°	144°12′	4.193	2.159	$0.525\cdot10^{-2}$	0.0235	0.223	13°48′	51.62
69°	145°27′	4.268	2.168	$0.474\cdot10^{-2}$	0.0219	0.217	13°33′	56.00



续表

$\theta=\nu(M)$	α	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	μ	r/r^*
70°	146°42′	4.348	2.177	$0.426\cdot10^{-2}$	0.0203	0.210	13°18′	62.50
71°	147°57′	4.429	2.186	$0.380\cdot10^{-2}$	0.0187	0.204	13°03′	68.50
72°	149°12′	4.515	2.195	$0.339\cdot10^{-2}$	0.0172	0.197	12°48′	75.00
73°	150°30′	4.621	2.204	$0.301\cdot10^{-2}$	0.0158	0.190	12°30′	82.85
74°	151°42′	4.695	2.212	$0.270\cdot10^{-2}$	0.0146	0.184	12°18′	91.20
75°	153°00′	4.810	2.220	$0.241\cdot10^{-2}$	0.0135	0.179	12°00′	101.4
76°	154°15′	4.912	2.228	$0.214\cdot10^{-2}$	0.0124	0.173	11°45′	111.7
77°	155°30′	5.015	2.237	$0.186\cdot10^{-2}$	0.0112	0.166	11°30′	123.5
78°	156°45′	5.126	2.244	$0.165\cdot10^{-2}$	0.0103	0.160	11°15′	143.3
79°	158°00′	5.241	2.252	$0.145\cdot10^{-2}$	$0.940\cdot10^{-2}$	0.155	11°00′	154.8
80°	159°15′	5.362	2.260	$0.126\cdot10^{-2}$	$0.851\cdot10^{-2}$	0.149	10°45′	177.0
81°	160°30′	5.488	2.267	$0.112\cdot10^{-2}$	$0.780\cdot10^{-2}$	0.144	10°30′	196.8
82°	161°42′	5.593	2.274	$0.971\cdot10^{-3}$	$0.705\cdot10^{-2}$	0.138	10°18′	219.8
83°	162°57′	5.731	2.282	$0.836\cdot10^{-3}$	$0.633\cdot10^{-2}$	0.132	10°03′	247.0
84°	164°12′	5.875	2.289	$0.722\cdot10^{-3}$	$0.570\cdot10^{-2}$	0.127	9°48′	279.3
85°	165°27′	6.028	2.296	$0.631\cdot10^{-3}$	$0.518\cdot10^{-2}$	0.122	9°33′	316.2
86°	166°42′	6.188	2.302	$0.545\cdot10^{-3}$	$0.466\cdot10^{-2}$	0.117	9°18′	361.0
87°	167°54′	6.321	2.309	$0.460\cdot10^{-3}$	$0.413\cdot10^{-2}$	0.111	9°06′	409.0
88°	169°06′	6.464	2.315	$0.398\cdot10^{-3}$	$0.373\cdot10^{-2}$	0.107	8°54′	466.0
89°	170°21′	6.649	2.321	$0.340\cdot10^{-3}$	$0.333\cdot10^{-2}$	0.102	8°39′	537.0
90°	171°36′	6.845	2.328	$0.285\cdot10^{-3}$	$0.294\cdot10^{-2}$	0.097	8°24′	631.0
91°	172°48′	7.013	2.334	$0.236\cdot10^{-3}$	$0.257\cdot10^{-2}$	0.092	8°12′	724.5
92°	174°00′	7.184	2.340	$0.197\cdot10^{-3}$	$0.226\cdot10^{-2}$	0.087	8°00′	841.2
93°	175°15′	7.413	2.345	$0.168\cdot10^{-3}$	$0.202\cdot10^{-2}$	0.083	7°45′	977.0
94°	176°27′	7.610	2.350	$0.139\cdot10^{-3}$	$0.176\cdot10^{-2}$	0.079	7°33′	1135
95°	177°40′	7.837	2.356	$0.114\cdot10^{-3}$	$0.153\cdot10^{-2}$	0.075	7°20′	1334
96°	178°54′	8.091	2.361	$0.954\cdot10^{-4}$	$0.134\cdot10^{-2}$	0.071	7°06′	1478
97°	180°06′	8.326	2.366	$0.778\cdot10^{-4}$	$0.116\cdot10^{-2}$	0.067	6°54′	1622
98°	181°21′	8.636	2.371	$0.628\cdot10^{-4}$	$0.996\cdot10^{-3}$	0.063	6°39′	2240
99°	182°34′	8.928	2.376	$0.502\cdot10^{-4}$	$0.849\cdot10^{-3}$	0.059	6°26′	2680
100°	183°48′	9.259	2.380	$0.403\cdot10^{-4}$	$0.726\cdot10^{-3}$	0.055	6°12′	3092
101°	185°00′	9.569	2.385	$0.321\cdot10^{-4}$	$0.617\cdot10^{-3}$	0.052	6°00′	3890
102°	186°12′	9.891	2.389	$0.257\cdot10^{-4}$	$0.526\cdot10^{-3}$	0.049	5°48′	4730
103°	187°24′	10.245	2.393	$0.202\cdot10^{-4}$	$0.444\cdot10^{-3}$	0.046	5°36′	6080
104°	188°36′	10.626	2.397	$0.156\cdot10^{-4}$	$0.368\cdot10^{-3}$	0.042	5°24′	7440
105°	189°48′	11.037	2.401	$0.118\cdot10^{-4}$	$0.302\cdot10^{-3}$	0.039	5°12′	9360
130°27′	220°27′	∞	2.449	0	0	0	0°00′	∞

注：α 为马赫波方向角，且 $\alpha=\theta+90°-\mu$

r 表示从壁面上某点沿着马赫线到流线的距离

r^* 表示对应于 $M=1$ 处之 r 值



表 2　正激波前后气流参数表（γ =1.4 的量热完全气体）

M_1	M_2	p_2/p_1	V_1/V_2 或 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.8929
1.01	0.99013	1.02345	1.01669	1.00665	0.99999	1.9152
1.02	0.98053	1.04713	1.03344	1.01325	0.99998	1.9379
1.03	0.97116	1.07105	1.05024	1.01981	0.99997	1.9610
1.04	0.96203	1.09520	1.06709	1.02634	0.99994	1.9845
1.05	0.95312	1.1196	1.08398	1.03284	0.99987	2.0083
1.06	0.94444	1.1442	1.10092	1.03931	0.99976	2.0325
1.07	0.93598	1.1690	1.11790	1.04575	0.99962	2.0570
1.08	0.92772	1.1941	1.13492	1.05217	0.99944	2.0819
1.09	0.91965	1.2194	1.15199	1.05856	0.99921	2.1072
1.10	0.91177	1.2450	1.1691	1.06494	0.99892	2.1328
1.11	0.90408	1.2708	1.1862	1.07130	0.99858	2.1558
1.12	0.89656	1.2968	1.2034	1.07764	0.99820	2.1851
1.13	0.88922	1.3230	1.2206	1.08396	0.99776	2.2118
1.14	0.88204	1.3495	1.2378	1.09027	0.99726	2.2388
1.15	0.87502	1.3762	1.2550	1.09657	0.99669	2.2661
1.16	0.86816	1.4032	1.2723	1.10287	0.99605	2.2937
1.17	0.86145	1.4304	1.2896	1.10916	0.99534	2.3217
1.18	0.85488	1.4578	1.3069	1.11544	0.99455	2.3499
1.19	0.84846	1.4854	1.3243	1.12172	0.99371	2.3786
1.20	0.84217	1.5133	1.3416	1.1280	0.99280	2.4075
1.21	0.83601	1.5414	1.3590	1.1343	0.99180	2.4367
1.22	0.82998	1.5698	1.3764	1.1405	0.99073	2.4662
1.23	0.82408	1.5984	1.3938	1.1468	0.98957	2.4961
1.24	0.81830	1.6272	1.4112	1.1531	0.98835	2.5263
1.25	0.81264	1.6562	1.4286	1.1594	0.98706	2.5568
1.26	0.80709	1.6855	1.4460	1.1657	0.98568	2.5876
1.27	0.80165	1.7150	1.4634	1.1720	0.98422	2.6187
1.28	0.79631	1.7448	1.4808	1.1782	0.98268	2.6500
1.29	0.79108	1.7748	1.4983	1.1846	0.98106	2.6816
1.30	0.78596	1.8050	1.5157	1.1909	0.97935	2.7135
1.31	0.78093	1.8354	1.5331	1.1972	0.97758	2.7457
1.32	0.77600	1.8661	1.5505	1.2035	0.97574	2.7783
1.33	0.77116	1.8970	1.5680	1.2099	0.97382	2.8112
1.34	0.76641	1.9282	1.5854	1.2162	0.97181	2.8444
1.35	0.76175	1.9596	1.6028	1.2226	0.96972	2.8778
1.36	0.75718	1.9912	1.6202	1.2290	0.96756	2.9115
1.37	0.75269	2.0230	1.6376	1.2354	0.96534	2.9455
1.38	0.74828	2.0551	1.6550	1.2418	0.96304	2.9798
1.39	0.74396	2.0874	1.6723	1.2482	0.96065	3.0144



续表

M_1	M_2	p_2/p_1	V_1/V_2或ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1
1.40	0.73971	2.1200	1.6896	1.2547	0.95819	3.0493
1.41	0.73554	2.1528	1.7070	1.2612	0.95566	3.0844
1.42	0.73144	2.1858	1.7243	1.2676	0.95306	3.1198
1.43	0.72741	2.2190	1.7416	1.2742	0.95039	3.1555
1.44	0.72345	2.2525	1.7589	1.2807	0.94765	3.1915
1.45	0.71956	2.2862	1.7761	1.2872	0.94483	3.2278
1.46	0.71574	2.3202	1.7934	1.2938	0.94196	3.2643
1.47	0.71198	2.3544	1.8106	1.3004	0.93901	3.3011
1.48	0.70829	2.3888	1.8278	1.3070	0.93600	3.3382
1.49	0.70466	2.4234	1.8449	1.3136	0.93392	3.3756
1.50	0.70109	2.4583	1.8621	1.3202	0.92978	3.4133
1.51	0.69758	2.4934	1.8792	1.3269	0.92658	3.4512
1.52	0.69413	2.5288	1.8962	1.3336	0.92331	3.4894
1.53	0.69073	2.5644	1.9133	1.3403	0.91999	3.5279
1.54	0.68739	2.6003	1.9303	1.3470	0.91662	3.5667
1.55	0.68410	2.6363	1.9473	1.3538	0.91319	3.6058
1.56	0.68086	2.6725	1.9643	1.3606	0.90970	3.6451
1.57	0.67768	2.7090	1.9812	1.3674	0.90615	3.6847
1.58	0.67455	2.7458	1.9981	1.3742	0.90255	3.7245
1.59	0.67147	2.7828	2.0149	1.3811	0.89889	3.7645
1.60	0.66844	2.8201	2.0317	1.3880	0.89520	3.8049
1.61	0.66545	2.8575	2.0485	1.3949	0.89144	3.8456
1.62	0.66251	2.8951	2.0652	1.4018	0.88764	3.8866
1.63	0.65962	2.9330	2.0820	1.4088	0.88380	3.9278
1.64	0.65677	2.9712	2.0986	1.4158	0.87992	3.9693
1.65	0.65396	3.0096	2.1152	1.4228	0.87598	4.0111
1.66	0.65119	3.0482	2.1318	1.4298	0.87201	4.0531
1.67	0.64847	3.0870	2.1484	1.4369	0.86800	4.0954
1.68	0.64579	3.1261	2.1649	1.4440	0.86396	4.1379
1.69	0.64315	3.1654	2.1813	1.4512	0.85987	4.1807
1.70	0.64055	3.2050	2.1977	1.4583	0.85573	4.2238
1.71	0.63798	3.2448	2.2141	1.4655	0.85155	4.2672
1.72	0.63545	3.2848	2.2304	1.4727	0.84735	4.3108
1.73	0.63296	3.3250	2.2467	1.4800	0.84312	4.3547
1.74	0.63051	3.3655	2.2629	1.4873	0.83886	4.3989
1.75	0.62809	3.4062	2.2791	1.4946	0.83456	4.4433
1.76	0.62570	3.4472	2.2952	1.5019	0.83024	4.4880
1.77	0.62335	3.4884	2.3113	1.5093	0.82589	4.5330
1.78	0.62104	3.5298	2.3273	1.5167	0.82152	4.5783
1.79	0.61875	3.5714	2.3433	1.5241	0.81711	4.6238



续表

M_1	M_2	p_2/p_1	V_1/V_2 或 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1
1.80	0.61650	3.6133	2.3592	1.5316	0.81268	4.6695
1.81	0.61428	3.6554	2.3751	1.5391	0.80823	4.7155
1.82	0.61209	3.6978	2.3909	1.5466	0.80376	4.7618
1.83	0.60993	3.7404	2.4067	1.5542	0.79926	4.8083
1.84	0.60780	3.7832	2.4224	1.5617	0.79474	4.8551
1.85	0.60570	3.8262	2.4381	1.5694	0.79021	4.9022
1.86	0.60363	3.8695	2.4537	1.5770	0.78567	4.9498
1.87	0.60159	3.9130	2.4693	1.5847	0.78112	4.9974
1.88	0.59957	3.9568	2.4848	1.5924	0.77656	5.0453
1.89	0.59758	4.0008	2.5003	1.6001	0.77197	5.0934
1.90	0.59562	4.0450	2.5157	1.6079	0.76735	5.1417
1.91	0.59368	4.0894	2.5310	1.6157	0.76273	5.1904
1.92	0.59177	4.1341	2.5463	1.6236	0.75812	5.2394
1.93	0.58988	4.1790	2.5615	1.6314	0.75347	5.2886
1.94	0.58802	4.2242	2.5767	1.6394	0.74883	5.3381
1.95	0.58618	4.2666	2.5919	1.6473	0.74418	5.3818
1.96	0.58437	4.3152	2.6070	1.6553	0.73954	5.4178
1.97	0.58258	4.3610	2.6220	1.6633	0.73437	5.4880
1.98	0.58081	4.4071	2.6369	1.6713	0.73021	5.5385
1.99	0.57907	4.4534	2.6518	1.6794	0.72554	5.5894
2.00	0.57735	4.5000	2.6666	1.6875	0.72088	5.6405
2.01	0.57565	4.5468	2.6814	1.6956	0.71619	5.6918
2.02	0.57397	4.5938	2.6962	1.7038	0.71152	5.7434
2.03	0.57231	4.6411	2.7109	1.7120	0.70686	5.7052
2.04	0.57068	4.6886	2.7255	1.7203	0.70218	5.8473
2.05	0.56907	4.7363	2.7400	1.7286	0.69752	5.8997
2.06	0.56747	4.7842	2.7545	1.7369	0.69284	5.9523
2.07	0.56589	4.8324	2.7690	1.7452	0.68817	6.0052
2.08	0.56433	4.8808	2.7834	1.7536	0.68351	6.0584
2.09	0.56280	4.9295	2.7977	1.7620	0.67886	6.1118
2.10	0.56128	4.9784	2.8119	1.7704	0.67422	6.1655
2.11	0.55978	5.0275	2.8261	1.7789	0.66957	6.2194
2.12	0.55830	5.0768	2.8402	1.7874	0.66492	6.2736
2.13	0.55683	5.1264	2.8543	1.7960	0.66029	6.3280
2.14	0.55538	5.1762	2.8683	1.8046	0.65567	6.3827
2.15	0.55395	5.2262	2.8823	1.8132	0.65105	6.4377
2.16	0.55254	5.2765	2.8962	1.8219	0.64644	6.4929
2.17	0.55114	5.3270	2.9100	1.8306	0.64185	6.5484
2.18	0.54976	5.3778	2.9238	1.8393	0.63728	6.6042
2.19	0.54841	5.4288	2.9376	1.8481	0.63270	6.6602
2.20	0.54706	5.4800	2.9512	1.8569	0.62812	6.7163
2.21	0.54572	5.5314	2.9648	1.8657	0.62358	6.7730
2.22	0.54440	5.5831	2.9783	1.8746	0.61905	6.8299
2.23	0.54310	5.6350	2.9918	1.8835	0.61453	6.8869

续表

M_1	M_2	p_2/p_1	V_1/V_2或ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1
2.24	0.54182	5.6872	3.0052	1.8924	0.61002	6.9442
2.25	0.54055	5.7396	3.0186	1.9014	0.60554	7.0018
2.26	0.53929	5.7922	3.0319	1.9104	0.60106	7.0597
2.27	0.53805	5.8451	3.0452	1.9194	0.59659	7.1178
2.28	0.53683	5.8982	3.0584	1.9285	0.59214	7.1762
2.29	0.53561	5.9515	3.0715	1.9376	0.58772	7.2348
2.30	0.53441	6.0050	3.0846	1.9468	0.58331	7.2937
2.31	0.53322	6.0588	3.0976	1.9560	0.57891	7.3529
2.32	0.53205	6.1128	3.1105	1.9652	0.57452	7.4123
2.33	0.53089	6.1670	3.1234	1.9745	0.57015.	7.4720
2.34	0.52974	6.2215	3.1362	1.9838	0.56580	7.5319
2.35	0.52861	6.2762	3.1490	1.9931	0.56148	7.5920
2.36	0.52749	6.3312	3.1617	2.0025	0.55717	7.6524
2.37	0.52638	6.3864	3.1743	2.0119	0.55288	7.7131
2.38	0.52528	6.4418	3.1869	2.0213	0.54862	7.7741
2.39	0.52419	6.4974	3.1994	2.0308	0.54438	7.8354
2.40	0.52312	6.5533	3.2119	2.0403	0.54015	7.8969
2.41	0.52206	6.6094	3.2243	2.0499	0.53594	7.9587
2.42	0.52100	6.6658	3.2366	2.0595	0.53175	8.0207
2.43	0.51996	6.7224	3.2489	2.0691	0.52758	8.0830
2.44	0.51894	6.7792	3.2611	2.0788	0.52344	8.1455
2.45	0.51792	6.8362	3.2733	2.0885	0.51932	8.2083
2.46	0.51691	6.8935	3.2854	2.0982	0.51521	8.2714
2.47	0.51592	6.9510	3.2975	2.1080	0.51112	8.3347
2.48	0.51493	7.0088	3.3095	2.1178	0.50706	8.3983
2.49	0.51395	7.0668	3.3214	2.1276	0.50303	8.4622
2.50	0.51299	7.1250	3.3333	2.1375	0.49902	8.5262
2.51	0.51204	7.1834	3.3451	2.1474	0.49502	8.5904
2.52	0.51109	7.2421	3.3569	2.1574	0.49104	8.6549
2.53	0.51015	7.3010	3.3686	2.1674	0.48709	8.7198
2.54	0.50923	7.3602	3.3802	2.1774	0.48317	8.7850
2.55	0.50831	7.4196	3.3918	2.1875	0.47927	8.8505
2.56	0.50740	7.4792	3.4034	2.1976	0.47540	8.9162
2.57	0.50651	7.5391	3.4149	2.2077	0.47155	8.9821
2.58	0.50562	7.5992	3.4263	2.2179	0.46772	9.0482
2.59	0.50474	7.6595	3.4376	2.2281	0.46391	9.1146
2.60	0.50387	7.7200	3.4489	2.2383	0.46012	9.1813
2.61	0.50301	7.7808	3.4602	2.2486	0.45636	9.2481
2.62	0.50216	7.8418	2.4714	2.2589	0.45262	9.3154
2.63	0.50132	7.9030	3.4825	2.2693	0.44891	9.3829
2.64	0.50048	7.9645	3.4936	2.2797	0.44522	9.4507
2.65	0.49965	8.0262	3.5047	2.2901	0.44155	9.5187
2.66	0.49883	8.0882	3.5157	2.3006	0.43791	9.5869



续表

M_1	M_2	p_2/p_1	V_1/V_2 或 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1
2.67	0.49802	8.1504	3.5266	2.3111	0.43429	9.6553
2.68	0.49722	8.2128	3.5374	2.3217	0.43070	9.7241
2.69	0.49642	8.2754	3.5482	2.3323	0.42713	9.7932
2.70	0.49563	8.3383	3.5590	2.3429	0.42359	9.8625
2.71	0.49485	8.4014	3.5697	2.3536	0.42007	9.9320
2.72	0.49408	8.4648	3.5803	2.3643	0.41657	10.0017
2.73	0.49332	8.5284	3.5909	2.3750	0.41310	10.0718
2.74	0.49256	8.5922	3.6014	2.3858	0.40965	10.1421
2.75	0.49181	8.6562	3.6119	2.3966	0.40622	10.212
2.76	0.49107	8.7205	3.6224	2.4074	0.40282	10.283
2.77	0.49033	8.7850	3.6328	2.4183	0.39945	10.354
2.78	0.48960	8.8497	3.6431	2.4292	0.39610	10.426
2.79	0.48888	8.9147	3.6533	2.4402	0.39276	10.498
2.80	0.48817	8.9800	3.6635	2.4512	0.38946	10.569
2.81	0.48746	9.0454	3.6737	2.4622	0.38618	10.641
2.82	0.48676	9.1111	3.6838	2.4733	0.38293	10.714
2.83	0.48607	9.1770	3.6939	2.4844	0.37970	10.787
2.84	0.48538	9.2432	3.7039	2.4955	0.37649	10.860
2.85	0.48470	9.3096	3.7139	2.5067	0.37330	10.933
2.86	0.48402	9.3762	3.7238	2.5179	0.37013	11.006
2.87	0.48334	9.4431	3.7336	2.5292	0.36700	11.080
2.88	0.48268	9.5102	3.7434	2.5405	0.36389	11.154
2.89	0.48203	9.5775	3.7532	2.5518	0.36080	11.228
2.90	0.48138	9.6450	3.7629	2.5632	0.35773	11.302
2.91	0.48074	9.7127	3.7725	2.5746	0.35469	11.377
2.92	0.48010	9.7808	3.7821	2.5860	0.35167	11.452
2.93	0.47946	9.8491	3.7917	2.5975	0.34867	11.527
2.94	0.47883	9.9176	3.8012	2.6090	0.34570	11.603
2.95	0.47821	9.9863	3.8106	2.6206	0.34275	11.679
2.96	0.47760	10.055	3.8200	2.6322	0.33982	11.755
2.97	0.47699	10.124	3.8294	2.6438	0.33692	11.831
2.98	0.47638	10.194	3.8387	2.6555	0.33404	11.907
2.99	0.47578	10.263	3.8479	2.6672	0.33118	11.984
3.00	0.47519	10.333	3.8571	2.6790	0.32834	12.061
3.50	0.45115	14.125	4.2608	3.3150	0.21295	16.242
4.00	0.43496	18.500	4.5714	4.0469	0.13876	21.068
4.50	0.42355	23.458	4.8119	4.8751	0.09170	26.539
5.00	0.41523	29.000	5.0000	5.8000	0.06172	32.654
6.00	0.40416	41.833	5.2683	7.9406	0.02965	46.815
7.00	0.39736	57.000	5.4444	10.469	0.01535	63.552
8.00	0.39289	74.500	5.5652	13.387	0.00849	82.865
9.00	0.38980	94.333	5.6512	16.693	0.00496	104.753
10.00	0.38757	116.500	5.7143	20.388	0.00304	129.217
∞	0.37796	∞	6.0000	∞	0	∞

表 3　斜激波前后气流参数表（γ=1.4 的量热完全气体）

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
1.05	0.0	72.25	1.000	1.050	90.00	1.120	0.953
	(0.56)	79.94	1.080	0.984	79.94	1.080	0.984
1.10	0.0	65.38	1.000	1.100	90.00	1.245	0.912
	1.0	69.81	1.077	1.039	83.58	1.227	0.925
	(1.52)	76.30	1.166	0.971	76.30	1.166	0.971
1.15	0.0	60.41	1.000	1.150	90.00	1.376	0.875
	1.0	63.16	1.062	1.102	85.99	1.369	0.880
	2.0	67.01	1.141	1.043	81.18	1.340	0.901
	(2.67)	73.82	1.256	0.960	73.82	1.256	0.960
1.20	0.0	56.44	1.000	1.200	90.00	1.513	0.842
	1.0	58.55	1.056	1.158	87.04	1.509	0.845
	2.0	61.05	1.120	1.111	83.86	1.494	0.855
	3.0	64.34	1.198	1.056	80.03	1.463	0.876
	(3.94)	71.98	1.353	0.950	71.98	1.353	0.950
1.25	0.0	53.13	1.000	1.250	90.00	1.656	0.813
	1.0	54.88	1.053	1.211	87.66	1.653	0.815
	2.0	56.85	1.111	1.170	85.21	1.644	0.821
	3.0	59.13	1.176	1.124	82.55	1.626	0.832
	4.0	61.99	1.254	1.072	79.39	1.594	0.853
	5.0	66.50	1.366	0.999	74.64	1.528	0.895
	(5.29)	70.54	1.454	0.942	70.54	1.454	0.942
1.30	0.0	50.29	1.000	1.300	90.00	1.805	0.786
	1.0	51.81	1.051	1.263	88.06	1.803	0.787
	2.0	53.48	1.107	1.224	86.06	1.796	0.792
	3.0	55.32	1.167	1.184	83.96	1.783	0.800
	4.0	57.42	1.233	1.140	81.65	1.763	0.812
	5.0	59.96	1.311	1.090	78.97	1.733	0.831
	6.0	63.46	1.411	1.027	75.37	1.679	0.864
	(6.66)	69.40	1.561	0.936	69.40	1.561	0.936
1.35	0.0	47.80	1.000	1.350	90.00	1.960	0.762
	1.0	49.17	1.051	1.314	88.34	1.958	0.763
	2.0	50.64	1.104	1.277	86.65	1.952	0.766
	3.0	52.22	1.162	1.239	84.89	1.943	0.772
	4.0	53.97	1.224	1.199	83.03	1.928	0.781
	5.0	55.93	1.292	1.157	81.00	1.908	0.793
	6.0	58.23	1.370	1.109	78.66	1.877	0.811
	7.0	61.18	1.466	1.052	75.72	1.830	0.839
	8.0	66.92	1.633	0.954	70.03	1.711	0.909
	(8.05)	68.47	1.673	0.931	68.47	1.673	0.931
1.40	0.0	45.59	1.000	1.400	90.00	2.120	0.740
	1.0	46.84	1.050	1.365	88.55	2.119	0.741
	2.0	48.17	1.103	1.330	87.08	2.114	0.743
	3.0	49.59	1.159	1.293	85.57	2.106	0.748
	4.0	51.12	1.219	1.255	83.99	2.095	0.755
	5.0	52.78	1.283	1.216	82.32	2.079	0.764
	6.0	54.63	1.354	1.174	80.49	2.058	0.776
	7.0	56.76	1.433	1.128	78.42	2.028	0.793



续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	8.0	59.37	1.526	1.074	75.90	1.984	0.818
	9.0	63.19	1.655	1.003	72.19	1.906	0.863
	(9.43)	67.72	1.791	0.927	67.72	1.791	0.927
1.45	0.0	43.60	1.000	1.450	90.00	2.286	0.720
	1.0	44.78	1.050	1.416	88.71	2.285	0.720
	2.0	46.00	1.103	1.381	87.41	2.281	0.723
	3.0	47.30	1.158	1.345	86.08	2.275	0.726
	4.0	48.68	1.217	1.309	84.70	2.265	0.732
	5.0	50.16	1.279	1.272	83.27	2.253	0.739
	6.0	51.76	1.346	1.233	81.74	2.236	0.749
	7.0	53.52	1.419	1.191	80.07	2.213	0.761
	8.0	55.52	1.500	1.146	78.02	2.184	0.778
	9.0	57.89	1.593	1.095	75.98	2.142	0.801
	10.0	61.05	1.711	1.032	73.00	2.076	0.837
	(10.79)	67.10	1.915	0.921	67.10	1.915	0.924
1.50	0.0	41.81	1.000	1.500	90.00	2.458	0.701
	1.0	42.91	1.050	1.466	88.84	2.457	0.702
	2.0	44.07	1.103	1.432	87.67	2.454	0.704
	3.0	45.27	1.158	1.397	86.48	2.448	0.707
	4.0	46.54	1.217	1.362	85.26	2.440	0.711
	5.0	47.89	1.278	1.325	83.99	2.430	0.717
	6.0	49.33	1.343	1.288	82.66	2.416	0.725
	7.0	50.88	1.413	1.250	81.25	2.398	0.735
	8.0	52.57	1.489	1.208	79.71	2.375	0.748
	9.0	54.47	1.572	1.164	78.00	2.345	0.764
	10.0	56.68	1.666	1.114	76.00	2.305	0.785
	11.0	59.47	1.781	1.056	73.44	2.245	0.817
	12.0	64.36	1.967	0.961	68.79	2.115	0.885
	(12.11)	66.59	2.044	0.921	66.59	2.044	0.921
1.55	0.0	40.18	1.000	1.550	90.00	2.636	0.684
	1.0	41.23	1.051	1.516	88.95	2.635	0.685
	2.0	42.32	1.104	1.482	87.88	2.632	0.686
	3.0	43.45	1.159	1.448	86.80	2.628	0.689
	4.0	44.64	1.217	1.413	85.70	2.621	0.693
	5.0	45.89	1.278	1.378	84.57	2.611	0.698
	6.0	47.22	1.343	1.341	83.39	2.599	0.705
	7.0	48.62	1.411	1.304	82.15	2.584	0.713
	8.0	50.13	1.485	1.265	80.83	2.565	0.723
	9.0	51.78	1.563	1.224	79.40	2.541	0.736
	10.0	53.60	1.649	1.180	77.81	2.511	0.752
	11.0	55.69	1.746	1.132	75.97	2.471	0.772
	12.0	58.24	1.860	1.076	73.69	2.415	0.801
	13.0	61.98	2.018	0.999	70.24	2.316	0.852
	(13.40)	66.17	2.179	0.920	66.17	2.179	0.920
1.60	0.0	38.68	1.000	1.600	90.00	2.820	0.668
	1.0	39.69	1.051	1.566	89.03	2.819	0.669
	2.0	40.73	1.105	1.532	88.06	2.817	0.670
	3.0	41.81	1.160	1.498	87.07	2.812	0.673
	4.0	42.93	1.219	1.464	86.06	2.806	0.676
	5.0	44.11	1.280	1.429	85.03	2.798	0.681

续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	6.0	45.35	1.345	1.393	83.97	2.787	0.686
	7.0	46.85	1.413	1.357	82.86	2.774	0.693
	8.0	48.03	1.484	1.320	81.69	2.758	0.702
	9.0	49.51	1.561	1.281	80.45	2.738	0.712
	10.0	51.12	1.643	1.240	79.10	2.713	0.725
	11.0	52.89	1.733	1.196	77.61	2.683	0.741
	12.0	54.89	1.832	1.148	75.90	2.643	0.761
	13.0	57.28	1.948	1.094	73.82	2.588	0.789
	14.0	60.54	2.097	1.023	70.90	2.500	0.832
	(14.65)	65.83	2.319	0.919	65.83	2.319	0.919
1.65	0.0	37.31	1.000	1.650	90.00	3.010	0.654
	1.0	38.27	1.052	1.616	89.11	3.009	0.654
	2.0	39.27	1.106	1.582	88.20	3.006	0.656
	3.0	40.30	1.162	1.548	87.29	3.003	0.658
	4.0	41.38	1.221	1.514	86.37	2.997	0.661
	5.0	42.50	1.283	1.480	85.42	2.989	0.665
	6.0	43.67	1.348	1.444	84.45	2.980	0.670
	7.0	44.89	1.415	1.409	83.44	2.968	0.676
	8.0	46.18	1.487	1.372	82.39	2.954	0.683
	9.0	47.55	1.563	1.334	81.29	2.937	0.692
	10.0	49.01	1.643	1.295	80.11	2.916	0.703
	11.0	50.58	1.729	1.254	78.83	2.890	0.716
	12.0	52.31	1.822	1.210	77.41	2.859	0.732
	13.0	54.26	1.926	1.163	75.80	2.819	0.752
	14.0	56.54	2.044	1.109	73.87	2.764	0.778
	15.0	59.52	2.192	1.042	71.25	2.681	0.818
	(15.86)	65.55	2.465	0.918	65.55	2.465	0.918
1.70	0.0	36.03	1.000	1.700	90.00	3.205	0.641
	1.0	36.97	1.053	1.666	89.17	3.204	0.641
	2.0	37.93	1.107	1.632	88.33	3.202	0.642
	3.0	38.93	1.164	1.598	87.48	3.199	0.644
	4.0	39.96	1.224	1.564	86.62	3.193	0.647
	5.0	41.03	1.286	1.529	85.75	3.186	0.650
	6.0	42.15	1.351	1.495	84.85	3.178	0.655
	7.0	43.31	1.420	1.459	83.93	3.167	0.660
	8.0	44.53	1.491	1.423	82.97	3.154	0.667
	9.0	45.81	1.567	1.386	81.97	3.139	0.675
	10.0	47.17	1.647	1.348	80.91	3.121	0.684
	11.0	48.61	1.731	1.309	79.78	3.099	0.695
	12.0	50.17	1.822	1.267	78.56	3.072	0.708
	13.0	51.87	1.920	1.223	77.21	3.040	0.724
	14.0	53.77	2.027	1.176	75.67	2.999	0.744
	15.0	55.99	2.150	1.122	73.84	2.944	0.770
	16.0	58.80	2.300	1.057	71.43	2.863	0.808
	17.0	64.63	2.586	0.932	66.00	2.647	0.905
	(17.01)	65.32	2.617	0.918	65.32	2.617	0.918
1.75	0.0	34.85	1.000	1.750	90.00	3.406	0.628
	1.0	35.75	1.053	1.716	89.22	3.406	0.628
	2.0	36.69	1.109	1.682	88.44	3.404	0.630
	3.0	37.65	1.167	1.648	87.64	3.400	0.631
	4.0	38.65	1.227	1.613	86.84	3.395	0.634



续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	5.0	39.69	1.290	1.579	86.03	3.389	0.637
	6.0	40.76	1.356	1.544	85.19	3.381	0.641
	7.0	41.87	1.425	1.509	84.34	3.371	0.646
	8.0	43.04	1.497	1.473	83.45	3.360	0.652
	9.0	44.25	1.573	1.437	82.53	3.346	0.659
	10.0	45.53	1.653	1.400	81.57	3.329	0.667
	11.0	46.88	1.737	1.361	80.56	3.310	0.677
	12.0	48.32	1.826	1.321	79.47	3.287	0.688
	13.0	49.87	1.922	1.279	78.29	3.259	0.701
	14.0	51.55	2.025	1.235	76.99	3.225	0.718
	15.0	53.42	2.137	1.187	75.51	3.183	0.738
	16.0	55.59	2.265	1.133	73.76	3.127	0.764
	17.0	58.30	2.420	1.068	71.48	3.046	0.800
	18.0	62.95	2.667	0.965	67.27	2.873	0.877
	(18.12)	65.13	2.775	0.919	65.13	2.775	0.919
1.80	0.0	33.75	1.000	1.800	90.00	3.613	0.617
	1.0	34.63	1.054	1.766	89.27	3.613	0.617
	2.0	35.54	1.110	1.731	88.53	3.611	0.618
	3.0	36.48	1.169	1.697	87.73	3.608	0.619
	4.0	37.44	1.231	1.663	87.03	3.603	0.622
	5.0	38.45	1.295	1.628	86.27	3.597	0.625
	6.0	39.48	1.361	1.593	85.49	3.590	0.628
	7.0	40.56	1.431	1.558	84.69	3.581	0.633
	8.0	41.67	1.504	1.523	83.87	3.570	0.638
	9.0	42.84	1.581	1.486	83.02	3.557	0.644
	10.0	44.06	1.661	1.449	82.13	3.542	0.652
	11.0	45.34	1.746	1.412	81.20	3.525	0.660
	12.0	46.69	1.835	1.373	80.22	3.504	0.670
	13.0	48.12	1.929	1.332	79.16	3.480	0.682
	14.0	49.66	2.030	1.290	78.02	3.451	0.696
	15.0	51.34	2.138	1.245	76.76	3.415	0.712
	16.0	53.20	2.257	1.196	75.33	3.371	0.733
	17.0	55.34	2.391	1.142	73.63	3.313	0.759
	18.0	58.00	2.552	1.077	71.43	3.230	0.796
	19.0	62.31	2.797	0.977	67.58	3.064	0.867
	(19.18)	64.99	2.938	0.920	64.99	2.938	0.920
1.85	0.0	32.72	1.000	1.850	90.00	3.826	0.606
	1.0	33.58	1.055	1.815	89.31	3.826	0.606
	2.0	34.47	1.112	1.781	88.61	3.824	0.607
	3.0	35.38	1.172	1.746	87.91	3.821	0.608
	4.0	36.32	1.234	1.711	87.20	3.817	0.611
	5.0	37.30	1.299	1.677	86.48	3.811	0.613
	6.0	38.30	1.367	1.642	85.74	3.804	0.617
	7.0	39.35	1.438	1.607	84.99	3.796	0.621
	8.0	40.43	1.512	1.571	84.23	3.786	0.626
	9.0	41.55	1.590	1.535	83.43	3.774	0.631
	10.0	42.72	1.671	1.498	82.61	3.760	0.638
	11.0	43.94	1.756	1.461	81.75	3.744	0.646
	12.0	45.22	1.845	1.422	80.85	3.725	0.655
	13.0	46.58	1.940	1.383	79.89	3.703	0.665
	14.0	48.02	2.040	1.342	78.86	3.677	0.677
	15.0	49.56	2.146	1.298	77.75	3.646	0.692

续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	16.0	51.23	2.261	1.252	76.51	3.609	0.709
	17.0	53.09	2.386	1.203	75.11	3.563	0.729
	18.0	55.23	2.528	1.148	73.44	3.502	0.756
	19.0	57.87	2.697	1.082	71.29	3.415	0.793
	20.0	62.10	2.952	0.982	67.55	3.244	0.865
	(20.20)	64.87	3.106	0.920	64.87	3.106	0.920
1.90	0.0	31.76	1.000	1.900	90.00	4.045	0.596
	1.0	32.60	1.056	1.865	89.34	4.044	0.596
	2.0	33.47	1.114	1.830	88.68	4.043	0.597
	3.0	34.36	1.175	1.795	88.01	4.040	0.598
	4.0	35.28	1.238	1.760	87.34	4.036	0.600
	5.0	36.23	1.304	1.725	86.66	4.031	0.603
	6.0	37.21	1.374	1.690	85.97	4.024	0.606
	7.0	38.22	1.446	1.655	85.26	4.016	0.610
	8.0	39.27	1.521	1.619	84.54	4.007	0.614
	9.0	40.36	1.600	1.583	83.79	3.996	0.620
	10.0	41.49	1.682	1.546	83.02	3.983	0.626
	11.0	42.67	1.768	1.509	82.22	3.968	0.633
	12.0	43.90	1.858	1.471	81.39	3.950	0.641
	13.0	45.19	1.953	1.432	80.50	3.930	0.650
	14.0	46.55	2.053	1.391	79.57	3.907	0.661
	15.0	48.00	2.159	1.349	78.56	3.879	0.674
	16.0	49.55	2.272	1.305	77.47	3.847	0.688
	17.0	51.23	2.393	1.258	76.25	3.807	0.706
	18.0	53.10	2.526	1.208	74.86	3.758	0.727
	19.0	55.24	2.676	1.151	73.21	3.694	0.755
	20.0	57.90	2.856	1.084	71.06	3.601	0.794
	21.0	62.25	3.132	0.979	67.23	3.414	0.869
	(21.17)	64.79	3.280	0.922	64.79	3.280	0.922
1.95	0.0	30.85	1.000	1.950	90.00	4.270	0.586
	1.0	31.68	1.057	1.914	89.37	4.269	0.586
	2.0	32.53	1.116	1.879	88.74	4.267	0.587
	3.0	33.40	1.178	1.844	88.11	4.265	0.589
	4.0	34.31	1.242	1.809	87.47	4.261	0.590
	5.0	35.23	1.310	1.773	86.82	4.256	0.593
	6.0	36.19	1.380	1.738	86.17	4.250	0.596
	7.0	37.18	1.454	1.703	85.50	4.242	0.599
	8.0	38.21	1.530	1.667	84.81	4.233	0.604
	9.0	39.26	1.610	1.630	84.11	4.223	0.609
	10.0	40.36	1.694	1.594	83.38	4.211	0.614
	11.0	41.50	1.781	1.557	82.63	4.197	0.621
	12.0	42.69	1.873	1.519	81.85	4.180	0.628
	13.0	43.93	1.969	1.480	81.03	4.162	0.637
	14.0	45.23	2.069	1.440	80.17	4.140	0.647
	15.0	46.60	2.175	1.398	79.25	4.115	0.658
	16.0	48.06	2.288	1.355	78.26	4.086	0.671
	17.0	49.62	2.408	1.310	77.17	4.051	0.686
	18.0	51.32	2.537	1.262	75.97	4.009	0.705
	19.0	53.21	2.678	1.210	74.59	3.956	0.727
	20.0	55.38	2.838	1.152	72.93	3.887	0.756
	21.0	58.10	3.031	1.082	70.75	3.787	0.796
	22.0	62.86	3.346	0.966	66.53	3.566	0.883



续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	(22.09)	64.72	3.460	0.923	64.72	3.460	0.923
2.00	0.0	30.00	1.000	2.000	90.00	4.500	0.577
	1.0	30.81	1.058	1.964	89.40	4.500	0.578
	2.0	31.65	1.118	1.928	88.80	4.498	0.578
	3.0	32.51	1.181	1.892	88.20	4.495	0.580
	4.0	33.39	1.247	1.857	87.59	4.492	0.581
	5.0	34.30	1.315	1.821	86.97	4.487	0.584
	6.0	35.24	1.387	1.786	86.34	4.481	0.586
	7.0	36.21	1.462	1.750	85.71	4.474	0.590
	8.0	37.21	1.540	1.714	85.05	4.465	0.594
	9.0	38.25	1.622	1.677	84.39	4.455	0.598
	10.0	39.32	1.707	1.641	83.70	4.444	0.604
	11.0	40.42	1.796	1.603	82.99	4.431	0.610
	12.0	41.58	1.888	1.565	82.26	4.415	0.617
	13.0	42.78	1.986	1.526	81.49	4.398	0.625
	14.0	44.03	2.088	1.487	80.69	4.378	0.634
	15.0	45.35	2.195	1.446	79.83	4.355	0.644
	16.0	46.73	2.308	1.403	78.92	4.328	0.656
	17.0	48.21	2.427	1.359	77.94	4.296	0.669
	18.0	49.79	2.555	1.313	76.86	4.259	0.685
	19.0	51.51	2.692	1.264	75.66	4.214	0.704
	20.0	53.42	2.843	1.210	74.27	4.157	0.728
	21.0	55.65	3.014	1.150	72.59	4.082	0.758
	22.0	58.46	3.223	1.076	70.33	3.971	0.802
	(22.97)	64.67	3.646	0.924	64.67	3.646	0.924
2.10	0.0	23.44	1.000	2.100	90.00	4.978	0.561
	2.0	30.03	1.122	2.026	88.90	4.976	0.562
	4.0	31.72	1.256	1.953	87.78	4.971	0.565
	6.0	33.51	1.402	1.880	86.64	4.961	0.569
	8.0	35.41	1.561	1.807	85.47	4.946	0.576
	10.0	37.43	1.734	1.733	84.24	4.926	0.585
	12.0	39.59	1.923	1.656	82.94	4.901	0.596
	14.0	41.91	2.129	1.578	81.54	4.867	0.611
	16.0	44.43	2.355	1.495	80.00	4.823	0.630
	18.0	47.21	2.604	1.408	78.26	4.765	0.654
	20.0	50.37	2.885	1.312	76.19	4.685	0.687
	22.0	54.17	3.215	1.202	73.52	4.564	0.735
	24.0	59.77	3.674	1.049	69.11	4.324	0.825
	(24.61)	64.62	4.033	0.927	64.62	4.033	0.927
2.20	0.0	27.04	1.000	2.200	90.00	5.480	0.547
	2.0	28.59	1.127	2.124	88.98	5.478	0.548
	4.0	30.24	1.265	2.049	87.94	5.473	0.550
	6.0	31.98	1.417	1.974	86.89	5.463	0.555
	8.0	33.83	1.583	1.899	85.80	5.450	0.561
	10.0	35.79	1.764	1.823	84.67	5.431	0.569
	12.0	37.87	1.961	1.745	83.49	5.407	0.579
	14.0	40.10	2.176	1.666	82.22	5.376	0.592
	16.0	42.49	2.410	1.583	80.84	5.337	0.609
	18.0	45.09	2.666	1.496	79.31	5.286	0.630
	20.0	47.93	2.949	1.404	77.55	5.218	0.657
	22.0	51.28	3.270	1.301	75.42	5.122	0.694



续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	24.0	55.36	3.655	1.181	72.56	4.973	0.749
	26.0	62.70	4.292	0.980	66.48	4.581	0.885
	(26.10)	64.62	4.443	0.931	64.62	4.443	0.931
2.30	0.0	25.77	1.000	2.300	90.00	6.005	0.534
	2.0	27.30	1.131	2.221	89.04	6.003	0.535
	4.0	28.91	1.275	2.144	88.07	5.998	0.537
	6.0	30.61	1.434	2.067	87.09	5.989	0.541
	8.0	32.42	1.607	1.990	86.08	5.976	0.547
	10.0	34.33	1.796	1.912	85.03	5.959	0.554
	12.0	36.35	2.002	1.833	83.93	5.936	0.564
	14.0	38.51	2.226	1.751	82.77	5.907	0.576
	16.0	40.82	2.470	1.668	81.51	5.871	0.591
	18.0	43.30	2.736	1.581	80.14	5.824	0.609
	20.0	46.01	3.028	1.489	78.59	5.763	0.633
	22.0	49.03	3.351	1.389	76.77	5.682	0.664
	24.0	52.54	3.722	1.279	74.51	5.565	0.706
	26.0	57.08	4.182	1.143	71.27	5.368	0.774
	(27.45)	64.65	4.874	0.934	64.65	4.874	0.934
2.40	0.0	24.63	1.000	2.400	90.00	6.553	0.523
	2.0	26.12	1.136	2.318	89.10	6.552	0.524
	4.0	27.70	1.286	2.238	88.19	6.547	0.526
	6.0	29.38	1.451	2.159	87.26	6.538	0.530
	8.0	31.15	1.631	2.080	86.31	6.525	0.535
	10.0	33.02	1.829	1.999	85.33	6.509	0.542
	12.0	35.01	2.045	1.918	84.30	6.487	0.551
	14.0	37.11	2.280	1.835	83.22	6.460	0.562
	16.0	39.35	2.535	1.750	82.06	6.425	0.575
	18.0	41.75	2.813	1.661	80.80	6.382	0.592
	20.0	44.34	3.116	1.569	79.40	6.326	0.613
	22.0	47.18	3.448	1.471	77.81	6.253	0.640
	24.0	50.37	3.820	1.364	75.89	6.154	0.675
	26.0	54.19	4.252	1.243	73.40	6.005	0.726
	28.0	59.66	4.838	1.078	69.29	5.713	0.820
	(28.68)	64.71	5.327	0.937	64.71	5.327	0.937
2.50	0.0	23.58	1.000	2.500	90.00	7.125	0.513
	2.0	25.05	1.141	2.416	89.14	7.123	0.514
	4.0	26.61	1.296	2.333	88.28	7.118	0.516
	6.0	28.26	1.468	2.251	87.40	7.110	0.519
	8.0	30.01	1.657	2.169	86.51	7.098	0.524
	10.0	31.85	1.864	2.086	85.58	7.082	0.530
	12.0	33.80	2.090	2.002	84.61	7.061	0.539
	14.0	35.87	2.336	1.917	83.60	7.034	0.549
	16.0	38.06	2.604	1.830	82.52	7.001	0.562
	18.0	40.39	2.895	1.739	81.36	6.960	0.577
	20.0	42.89	3.211	1.646	80.07	6.908	0.596
	22.0	45.60	3.556	1.548	78.63	6.841	0.620
	24.0	48.60	3.936	1.443	76.94	6.753	0.651
	26.0	52.04	4.366	1.327	74.86	6.627	0.693
	28.0	56.34	4.884	1.189	71.95	6.425	0.757
	(29.80)	64.78	5.801	0.940	64.78	5.801	0.940



续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
2.60	0.0	22.62	1.000	2.600	90.00	7.720	0.504
	2.0	24.07	1.145	2.512	89.19	7.718	0.505
	4.0	25.61	1.307	2.427	88.36	7.714	0.506
	6.0	27.24	1.486	2.342	87.53	7.705	0.510
	8.0	28.97	1.683	2.257	86.67	7.693	0.514
	10.0	30.79	1.900	2.172	85.79	7.678	0.520
	12.0	32.72	2.137	2.085	84.88	7.657	0.528
	14.0	34.75	2.396	1.997	83.92	7.632	0.538
	16.0	36.90	2.677	1.908	82.91	7.600	0.550
	18.0	39.19	2.982	1.815	81.82	7.560	0.564
	20.0	41.62	3.313	1.720	80.63	7.511	0.582
	22.0	44.24	3.672	1.621	79.30	7.448	0.604
	24.0	47.10	4.066	1.516	77.78	7.367	0.631
	26.0	50.31	4.503	1.403	75.96	7.256	0.667
	28.0	54.09	5.007	1.274	73.59	7.091	0.719
	30.0	59.35	5.671	1.106	69.78	6.778	0.811
	(30.81)	64.87	6.297	0.943	64.87	6.297	0.943
2.70	0.0	21.74	1.000	2.700	90.00	8.338	0.496
	2.0	23.17	1.150	2.609	89.22	8.337	0.496
	4.0	24.70	1.318	2.520	88.43	8.332	0.498
	6.0	26.31	1.504	2.432	87.63	8.324	0.501
	8.0	28.02	1.710	2.344	86.82	8.312	0.506
	10.0	29.82	1.937	2.256	85.98	8.297	0.511
	12.0	31.73	2.186	2.167	85.11	8.277	0.519
	14.0	33.74	2.457	2.076	84.20	8.251	0.528
	16.0	35.86	2.752	1.984	83.24	8.220	0.539
	18.0	38.11	3.073	1.889	82.21	8.182	0.553
	20.0	40.50	3.420	1.792	81.10	8.135	0.569
	22.0	43.05	3.736	1.691	79.86	8.075	0.589
	24.0	45.81	4.206	1.585	78.47	7.998	0.615
	26.0	48.85	4.656	1.472	76.83	7.897	0.647
	28.0	52.34	5.163	1.349	74.79	7.753	0.691
	30.0	56.69	5.773	1.202	71.92	7.519	0.759
	(31.74)	64.96	6.814	0.946	64.96	6.814	0.946
2.80	0.0	20.93	1.000	2.800	90.00	8.980	0.488
	2.0	22.35	1.155	2.706	89.25	8.978	0.489
	4.0	23.85	1.329	2.613	88.49	8.974	0.491
	6.0	25.46	1.523	2.522	87.73	8.966	0.494
	8.0	27.15	1.738	2.431	86.95	8.954	0.498
	10.0	28.94	1.975	2.340	86.14	8.939	0.503
	12.0	30.83	2.236	2.248	85.31	8.919	0.510
	14.0	32.82	2.521	2.154	84.44	8.894	0.519
	16.0	34.92	2.831	2.059	83.53	8.864	0.530
	18.0	37.14	3.168	1.961	82.55	8.826	0.543
	20.0	39.49	3.532	1.861	81.50	8.780	0.558
	22.0	41.99	3.927	1.758	80.34	8.722	0.577
	24.0	44.68	4.355	1.651	79.05	8.650	0.600
	26.0	47.61	4.822	1.538	77.55	8.554	0.630
	28.0	50.89	5.340	1.416	75.73	8.424	0.668
	30.0	54.79	5.939	1.278	73.33	8.227	0.724
	32.0	60.43	6.753	1.091	69.21	7.828	0.831
	(32.59)	65.05	7.352	0.949	65.05	7.352	0.949

续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
2.90	0.0	20.17	1.000	2.900	90.00	9.645	0.481
	2.0	21.58	1.160	2.802	89.28	9.643	0.482
	4.0	23.08	1.341	2.706	88.55	9.639	0.434
	6.0	24.67	1.542	2.612	87.81	9.631	0.487
	8.0	26.35	1.766	2.518	87.06	9.619	0.491
	10.0	28.13	2.014	2.423	86.29	9.604	0.496
	12.0	30.01	2.287	2.327	85.49	9.584	0.503
	14.0	31.99	2.586	2.230	84.65	9.560	0.511
	16.0	34.07	2.912	2.132	83.78	9.530	0.521
	18.0	36.27	3.266	2.031	82.85	9.493	0.533
	20.0	38.59	3.650	1.929	81.85	9.448	0.548
	22.0	41.05	4.064	1.823	80.74	9.392	0.566
	24.0	43.67	4.512	1.714	79.54	9.321	0.588
	26.0	46.52	4.998	1.600	78.14	9.231	0.615
	28.0	49.66	5.533	1.479	76.49	9.110	0.650
	30.0	53.28	6.136	1.345	74.39	8.935	0.699
	32.0	57.93	6.879	1.183	71.29	8.635	0.777
	(33.36)	65.15	7.912	0.952	65.15	7.912	0.952
3.00	0.0	19.47	1.000	3.000	90.00	10.333	0.475
	2.0	20.87	1.166	2.898	89.30	10.332	0.476
	4.0	22.36	1.352	2.799	88.60	10.327	0.477
	6.0	23.94	1.562	2.701	87.88	10.319	0.480
	8.0	25.61	1.795	2.603	87.16	10.307	0.484
	10.0	27.38	2.055	2.505	86.41	10.292	0.489
	12.0	29.25	2.340	2.406	85.64	10.273	0.496
	14.0	31.22	2.654	2.306	84.84	10.248	0.504
	16.0	33.29	2.996	2.204	84.00	10.218	0.514
	18.0	35.47	3.368	2.100	83.11	10.182	0.525
	20.0	37.76	3.771	1.994	82.15	10.137	0.539
	22.0	40.19	4.206	1.886	81.11	10.082	0.556
	24.0	42.78	4.676	1.774	79.96	10.014	0.577
	26.0	45.55	5.184	1.659	78.65	9.927	0.602
	28.0	48.59	5.739	1.537	77.13	9.812	0.635
	30.0	52.02	6.356	1.406	75.24	9.652	0.678
	32.0	56.18	7.081	1.254	72.65	9.399	0.743
	34.0	63.67	8.268	1.003	66.75	8.697	0.908
	(34.07)	65.24	8.492	0.954	65.24	8.492	0.954
3.10	0.0	18.82	1.000	3.100	90.00	11.045	0.470
	2.0	20.21	1.171	2.994	89.32	11.043	0.470
	4.0	21.68	1.364	2.891	88.64	11.039	0.472
	6.0	23.26	1.582	2.789	87.95	11.031	0.474
	8.0	24.93	1.825	2.688	87.24	11.019	0.478
	10.0	26.69	2.096	2.586	86.52	11.004	0.483
	12.0	28.55	2.395	2.484	85.78	10.984	0.490
	14.0	30.51	2.724	2.380	85.00	10.960	0.497
	16.0	32.57	3.083	2.274	84.19	10.930	0.507
	18.0	34.74	3.474	2.167	83.33	10.894	0.518
	20.0	37.02	3.897	2.058	82.42	10.850	0.531



续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	22.0	39.42	4.354	1.947	81.42	10.795	0.548
	24.0	41.97	4.847	1.833	80.33	10.728	0.567
	26.0	44.69	5.379	1.715	79.09	10.644	0.591
	28.0	47.65	5.956	1.593	77.67	10.533	0.621
	30.0	50.94	6.592	1.462	75.94	10.383	0.661
	32.0	54.80	7.320	1.316	73.66	10.158	0.717
	34.0	60.21	8.277	1.124	69.87	9.717	0.820
	(34.73)	65.34	9.093	0.956	65.34	9.093	0.956
3.20	0.0	18.21	1.000	3.200	90.00	11.780	0.464
	2.0	19.59	1.176	3.090	89.34	11.778	0.465
	4.0	21.06	1.376	2.983	88.68	11.774	0.466
	6.0	22.63	1.602	2.878	88.01	11.766	0.469
	8.0	24.29	1.855	2.773	87.32	11.754	0.473
	10.0	26.05	2.138	2.667	86.62	11.738	0.478
	12.0	27.91	2.451	2.561	85.90	11.719	0.484
	14.0	29.86	2.795	2.453	85.15	11.695	0.491
	16.0	31.92	3.172	2.344	84.37	11.665	0.500
	18.0	34.07	3.583	2.233	83.54	11.629	0.511
	20.0	36.34	4.027	2.121	82.65	11.584	0.524
	22.0	38.72	4.507	2.006	81.70	11.531	0.540
	24.0	41.24	5.024	1.889	80.65	11.464	0.559
	26.0	43.92	5.582	1.770	79.48	11.381	0.581
	28.0	46.81	6.184	1.645	78.13	11.275	0.610
	30.0	50.00	6.843	1.514	76.53	11.131	0.646
	32.0	53.65	7.583	1.371	74.48	10.924	0.697
	34.0	58.35	8.491	1.198	71.41	10.566	0.779
	(35.33)	65.43	9.714	0.959	65.43	9.714	0.959
3.30	0.0	17.64	1.000	3.300	90.00	12.538	0.460
	2.0	19.01	1.181	3.186	89.36	12.537	0.460
	4.0	20.48	1.388	3.075	88.71	12.532	0.462
	6.0	22.04	1.622	2.965	88.06	12.524	0.464
	8.0	23.70	1.886	2.856	87.39	12.512	0.468
	10.0	25.46	2.181	2.747	86.71	12.496	0.473
	12.0	27.31	2.508	2.636	86.01	12.477	0.479
	14.0	29.26	2.869	2.525	85.28	12.452	0.486
	16.0	31.31	3.264	2.412	84.52	12.422	0.495
	18.0	33.46	3.695	2.297	83.72	12.386	0.505
	20.0	35.71	4.162	2.181	82.86	12.342	0.518
	22.0	38.08	4.666	2.064	81.94	12.288	0.533
	24.0	40.57	5.208	1.944	80.93	12.233	0.551
	26.0	43.22	5.792	1.822	79.81	12.141	0.573
	28.0	46.06	6.421	1.696	78.54	12.036	0.599
	30.0	49.16	7.106	1.564	77.03	11.898	0.634
	32.0	52.67	7.866	1.422	75.15	11.704	0.680
	34.0	56.97	8.762	1.258	72.50	11.390	0.750
	(35.88)	65.52	10.356	0.961	65.52	10.356	0.961
3.40	0.0	17.11	1.000	3.400	90.00	13.320	0.455
	2.0	18.47	1.187	3.281	89.38	13.318	0.456

续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	4.0	19.93	1.400	3.166	88.74	13.314	0.457
	6.0	21.49	1.643	3.053	88.11	13.305	0.460
	8.0	23.15	1.917	2.940	87.46	13.293	0.463
	10.0	24.90	2.225	2.826	86.79	13.278	0.468
	12.0	26.76	2.566	2.712	86.11	13.258	0.474
	14.0	28.70	2.944	2.596	85.40	13.233	0.481
	16.0	30.75	3.358	2.479	84.66	13.203	0.489
	18.0	32.89	3.810	2.360	83.88	13.167	0.500
	20.0	35.13	4.300	2.241	83.05	13.122	0.512
	22.0	37.49	4.829	2.120	82.16	13.069	0.526
	24.0	39.97	5.398	1.997	81.19	13.003	0.544
	26.0	42.59	6.010	1.872	80.11	12.922	0.565
	28.0	45.39	6.668	1.744	78.89	12.819	0.590
	30.0	48.42	7.380	1.611	77.47	12.685	0.623
	32.0	51.81	8.165	1.469	75.72	12.499	0.665
	34.0	55.84	9.067	1.310	73.36	12.213	0.728
	36.0	61.92	10.331	1.087	68.96	11.582	0.856
	(36.39)	65.60	11.019	0.962	65.60	11.019	0.962
3.50	0.0	16.60	1.000	3.500	90.00	14.125	0.451
	2.0	17.96	1.192	3.377	89.39	14.123	0.452
	4.0	19.42	1.413	3.257	88.77	14.118	0.453
	6.0	20.97	1.664	3.140	88.15	14.110	0.456
	8.0	22.63	1.949	3.022	87.51	14.098	0.459
	10.0	24.38	2.269	2.904	86.86	14.082	0.464
	12.0	26.24	2.626	2.786	86.20	14.062	0.469
	14.0	28.18	3.021	2.666	85.51	14.037	0.476
	16.0	30.23	3.455	2.545	84.78	14.007	0.485
	18.0	32.36	3.928	2.422	84.02	13.970	0.495
	20.0	34.60	4.442	2.299	83.22	13.926	0.507
	22.0	36.95	4.997	2.174	82.35	13.872	0.521
	24.0	39.41	5.594	2.048	81.42	13.806	0.537
	26.0	42.01	6.234	1.920	80.38	13.726	0.557
	28.0	44.77	6.923	1.789	79.21	13.624	0.582
	30.0	47.76	7.665	1.655	77.85	13.492	0.613
	32.0	51.05	8.478	1.513	76.21	13.313	0.653
	34.0	54.89	9.397	1.357	74.05	13.046	0.710
	36.0	60.09	10.572	1.159	70.55	12.540	0.811
	(36.87)	65.69	11.703	0.964	65.69	11.703	0.964
3.60	0.0	16.13	1.000	3.600	90.00	14.953	0.447
	2.0	17.48	1.197	3.472	89.40	14.952	0.448
	4.0	18.93	1.425	3.348	88.80	14.947	0.449
	6.0	20.49	1.686	3.226	88.19	14.938	0.452
	8.0	22.14	1.982	3.104	87.57	14.926	0.455
	10.0	23.90	2.315	2.982	86.93	14.910	0.460
	12.0	25.75	2.687	2.859	86.28	14.890	0.465
	14.0	27.70	3.100	2.735	85.60	14.864	0.472
	16.0	29.74	3.554	2.609	84.90	14.834	0.480
	18.0	31.88	4.050	2.483	84.16	14.797	0.490
	20.0	34.11	4.588	2.355	83.37	14.752	0.502



续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	22.0	36.45	5.170	2.227	82.53	14.698	0.515
	24.0	38.90	5.795	2.097	81.62	14.632	0.532
	26.0	41.48	6.466	1.966	80.62	14.551	0.551
	28.0	44.22	7.186	1.834	79.49	14.450	0.575
	30.0	47.15	7.961	1.697	78.19	14.320	0.604
	32.0	50.38	8.804	1.555	76.64	14.145	0.642
	34.0	54.07	9.746	1.400	74.64	13.892	0.695
	36.0	58.80	10.894	1.215	71.62	13.450	0.781
	(37.31)	65.77	12.407	0.966	65.77	12.407	0.966
3.70	0.0	15.68	1.000	3.700	90.00	15.805	0.444
	2.0	17.03	1.203	3.567	89.41	15.803	0.444
	4.0	18.48	1.438	3.439	88.82	15.798	0.446
	6.0	20.03	1.707	3.312	88.22	15.790	0.448
	8.0	21.69	2.015	3.186	87.61	15.777	0.452
	10.0	23.44	2.361	3.059	86.99	15.761	0.456
	12.0	25.30	2.750	2.931	86.35	15.740	0.461
	14.0	27.25	3.181	2.803	85.69	15.715	0.468
	16.0	29.29	3.655	2.673	85.00	15.684	0.476
	18.0	31.42	4.174	2.542	84.28	15.646	0.486
	20.0	33.65	4.738	2.410	83.51	15.601	0.497
	22.0	35.99	5.348	2.278	82.69	15.546	0.510
	24.0	38.43	6.003	2.145	81.80	15.480	0.526
	26.0	40.99	6.705	2.011	80.83	15.399	0.545
	28.0	43.71	7.458	1.876	79.74	15.298	0.568
	30.0	46.61	8.266	1.738	78.49	15.169	0.596
	32.0	49.77	9.142	1.594	77.01	14.998	0.632
	34.0	53.35	10.112	1.440	75.14	14.754	0.681
	36.0	57.76	11.260	1.262	72.45	14.352	0.758
	(37.71)	65.85	13.131	0.968	65.85	13.131	0.968
3.80	0.0	15.26	1.000	3.800	90.00	16.680	0.441
	2.0	16.60	1.208	3.662	89.42	16.678	0.441
	4.0	18.05	1.450	3.529	88.84	16.673	0.443
	6.0	19.60	1.729	3.398	88.25	16.664	0.445
	8.0	21.26	2.048	3.267	87.66	16.652	0.448
	10.0	23.02	2.409	3.135	87.05	16.635	0.452
	12.0	24.87	2.813	2.003	86.42	16.614	0.458
	14.0	26.82	3.263	2.870	85.77	16.588	0.464
	16.0	28.87	3.759	2.735	85.09	16.557	0.472
	18.0	31.00	4.302	2.600	84.39	16.519	0.482
	20.0	33.23	4.892	2.464	83.64	16.473	0.493
	22.0	35.56	5.530	2.328	82.84	16.418	0.506
	24.0	37.99	6.216	2.192	81.97	16.351	0.521
	26.0	40.54	6.951	2.055	81.02	16.270	0.540
	28.0	43.24	7.738	1.917	79.97	16.169	0.562
	30.0	46.11	8.581	1.776	78.77	16.040	0.589
	32.0	49.22	9.492	1.631	77.34	15.871	0.624
	34.0	52.70	10.494	1.478	75.57	15.634	0.670
	36.0	56.90	11.654	1.304	73.12	15.259	0.739
	38.0	64.19	13.487	1.029	67.57	14.227	0.913

续表

M_1	θ	弱激波			强激波		
		β	p_2/p_1	M_2	β	p_2/p_1	M_2
	(38.09)	65.92	13.876	0.969	65.92	13.876	0.969
3.90	0.0	14.86	1.000	3.900	90.00	17.578	0.438
	2.0	16.20	1.214	3.757	89.43	17.577	0.438
	4.0	17.64	1.463	3.619	88.86	17.571	0.440
	6.0	19.20	1.752	3.483	88.28	17.562	0.442
	8.0	20.85	2.082	3.347	87.70	17.550	0.445
	10.0	22.61	2.457	3.211	87.10	17.533	0.449
	12.0	24.47	2.878	3.074	86.48	17.511	0.455
	14.0	26.42	3.347	2.936	85.84	17.485	0.461
	16.0	28.47	3.865	2.797	85.18	17.453	0.469
	18.0	30.61	4.433	2.657	84.49	17.414	0.478
	20.0	32.83	5.050	2.517	83.75	17.368	0.489
	22.0	35.16	5.717	2.377	82.97	17.312	0.502
	24.0	37.59	6.435	2.237	82.12	17.245	0.517
	26.0	40.13	7.203	2.097	81.20	17.163	0.535
	28.0	42.80	8.026	1.956	80.18	17.061	0.556
	30.0	45.65	8.906	1.813	79.01	16.933	0.583
	32.0	48.72	9.854	1.667	77.64	16.765	0.616
	34.0	52.13	10.890	1.513	75.96	16.533	0.660
	36.0	56.15	12.072	1.343	73.68	16.177	0.724
	38.0	62.09	13.690	1.110	69.50	15.402	0.853
	(38.44)	65.99	14.641	0.970	65.99	14.641	0.970
	0.0	14.48	1.000	4.000	90.00	18.500	0.435
	2.0	15.81	1.219	3.852	89.44	18.498	0.435
	4.0	17.26	1.476	3.709	88.88	18.493	0.437
	6.0	18.81	1.774	3.568	88.31	18.484	0.439
	8.0	20.47	2.117	3.427	87.73	18.471	0.442
	10.0	22.23	2.506	3.287	87.14	18.454	0.446
	12.0	24.10	2.945	3.144	86.54	18.432	0.452
	14.0	26.05	3.434	3.001	85.91	18.405	0.458
	16.0	28.10	3.974	2.857	85.26	18.372	0.466
	18.0	30.24	4.567	2.713	84.58	18.333	0.475
	20.0	32.46	5.212	2.569	83.86	18.286	0.485
	22.0	34.79	5.909	2.425	83.09	18.230	0.498
	24.0	37.21	6.659	2.281	82.26	18.162	0.513
	26.0	39.74	7.463	2.137	81.36	18.079	0.530
	28.0	42.40	8.321	1.994	80.36	17.977	0.551
	30.0	45.23	9.240	1.849	79.23	17.848	0.577
	32.0	48.26	10.226	1.701	77.91	17.681	0.609
	34.0	51.61	11.300	1.546	76.30	17.452	0.651
	36.0	55.50	12.510	1.378	74.16	17.110	0.711
	38.0	60.83	14.065	1.164	70.60	16.441	0.820
	(38.77)	66.06	15.426	0.972	66.06	15.426	0.972



表 4（a）　一维等熵流气动函数表（γ=1.4）

M	λ	$\dfrac{T}{T_0}$	$\dfrac{p}{p_0}$	$\dfrac{\rho}{\rho_0}$	$\dfrac{F}{F^*}$	$\left(\dfrac{p}{p_0}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma^*}\right)$	$\dfrac{\sigma}{\sigma^*}$
0.00	0.00000	0.10000+1	0.10000+1	0.10000+1	∞	∞	∞
0.01	0.01095	0.99998+0	0.99993+0	0.99995+0	0.45649+2	0.57870+2	0.57874+2
0.02	0.02191	0.99992+0	0.99972+0	0.99980+0	0.22834+2	0.28934+2	0.28942+2
0.03	0.03286	0.99982+0	0.99937+0	0.99955+0	0.15232+2	0.19288+2	0.19301+2
0.04	0.04381	0.99968+0	0.99888+0	0.99920+0	0.11435+2	0.14465+2	0.14481+2
0.05	0.05476	0.99950+0	0.99825+0	0.99875+0	0.91584+1	0.11571+2	0.11591+2
0.06	0.06570	0.99928+0	0.99748+0	0.99820+0	0.76428+1	0.96416+1	0.96659+1
0.07	0.07664	0.99902+0	0.99658+0	0.99755+0	0.65620+1	0.82631+1	0.82915+1
0.08	0.08758	0.99872+0	0.99553+0	0.99681+0	0.57529+1	0.72292+1	0.72616+1
0.09	0.09851	0.99838+0	0.99435+0	0.99596+0	0.51249+1	0.64248+1	0.64613+1
0.10	0.10944	0.99800+0	0.99303+0	0.99502+0	0.46236+1	0.57813+1	0.58218+1
0.11	0.12035	0.99759+0	0.99158+0	0.99398+0	0.42146+1	0.52546+1	0.52992+1
0.12	0.13126	0.99713+0	0.98998+0	0.99284+0	0.38747+1	0.48156+1	0.48643+1
0.13	0.14217	0.99663+0	0.98826+0	0.99160+0	0.35881+1	0.44441+1	0.44969+1
0.14	0.15306	0.99610+0	0.98640+0	0.99027+0	0.33432+1	0.41255+1	0.41824+1
0.15	0.16395	0.99552+0	0.98441+0	0.98884+0	0.31317+1	0.38494+1	0.39103+1
0.16	0.17482	0.99491+0	0.98228+0	0.98731+0	0.29474+1	0.36077+1	0.36727+1
0.17	0.18569	0.99425+0	0.98003+0	0.98569+0	0.27855+1	0.33943+1	0.34635+1
0.18	0.19654	0.99356+0	0.97765+0	0.98398+0	0.26422+1	0.32047+1	0.32779+1
0.19	0.20739	0.99283+0	0.97514+0	0.98218+0	0.25146+1	0.30349+1	0.31123+1
0.20	0.21822	0.99206+0	0.97250+0	0.98028+0	0.24004+1	0.28820+1	0.29635+1
0.21	0.22904	0.99126+0	0.96973+0	0.97829+0	0.22976+1	0.27437+1	0.28293+1
0.22	0.23984	0.99041+0	0.96685+0	0.97620+0	0.22046+1	0.26178+1	0.27076+1
0.23	0.25063	0.98953+0	0.96383+0	0.97403+0	0.21203+1	0.25029+1	0.25968+1
0.24	0.26141	0.98861+0	0.96070+0	0.97177+0	0.20434+1	0.23975+1	0.24956+1
0.25	0.27217	0.98765+0	0.95745+0	0.96942+0	0.19732+1	0.23005+1	0.24027+1
0.26	0.28291	0.98666+0	0.95408+0	0.96698+0	0.19038+1	0.22109+1	0.23173+1
0.27	0.29364	0.98563+0	0.95060+0	0.96446+0	0.18496+1	0.21279+1	0.22385+1
0.28	0.30435	0.98456+0	0.94700+0	0.96185+0	0.17950+1	0.20508+1	0.21656+1
0.29	0.31504	0.98346+0	0.94329+0	0.95916+0	0.17446+1	0.19790+1	0.20979+1
0.30	0.32572	0.98232+0	0.93947+0	0.95638+0	0.16979+1	0.19119+1	0.20351+1
0.31	0.33637	0.98114+0	0.93554+0	0.95352+0	0.16546+1	0.18491+1	0.19765+1
0.32	0.34701	0.97993+0	0.93150+0	0.95058+0	0.16144+1	0.17902+1	0.19219+1
0.33	0.35762	0.97868+0	0.92736+0	0.94756+0	0.15769+1	0.17349+1	0.18707+1
0.34	0.36822	0.97740+0	0.92312+0	0.94446+0	0.15420+1	0.16827+1	0.18229+1
0.35	0.37879	0.97609+0	0.91877+0	0.94128+0	0.15094+1	0.16335+1	0.17780+1
0.36	0.38935	0.97473+0	0.91433+0	0.93803+0	0.14789+1	0.15871+1	0.17358+1
0.37	0.39988	0.97335+0	0.90979+0	0.93470+0	0.14503+1	0.15431+1	0.16961+1
0.38	0.41039	0.97193+0	0.90516+0	0.93130+0	0.14236+1	0.15014+1	0.16587+1
0.39	0.42087	0.97048+0	0.90043+0	0.92782+0	0.13985+1	0.14618+1	0.16234+1
0.40	0.43133	0.96899+0	0.89561+0	0.92427+0	0.13749+1	0.14242+1	0.15901+1
0.41	0.44177	0.96747+0	0.89071+0	0.92066+0	0.13527+1	0.13883+1	0.15587+1

续表

M	λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{F}{F^*}$	$\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)$	$\frac{\sigma}{\sigma^*}$
0.42	0.45218	0.96592+0	0.88572+0	0.91697+0	0.13318+1	0.13542+1	0.15289+1
0.43	0.46257	0.96434+0	0.88065+0	0.91322+0	0.13122+1	0.13216+1	0.15007+1
0.44	0.47293	0.96272+0	0.87550+0	0.90940+0	0.12937+1	0.12905+1	0.14740+1
0.45	0.48326	0.96108+0	0.87027+0	0.90551+0	0.12763+1	0.12607+1	0.14487+1
0.46	0.49357	0.95940+0	0.86496+0	0.90157+0	0.12598+1	0.12322+1	0.14246+1
0.47	0.50385	0.95769+0	0.85958+0	0.89756+0	0.12443+1	0.12050+1	0.14018+1
0.48	0.51410	0.95595+0	0.85413+0	0.89349+0	0.12296+1	0.11788+1	0.13801+1
0.49	0.52433	0.95418+0	0.84861+0	0.88936+0	0.12158+1	0.11537+1	0.13595+1
0.50	0.53452	0.95238+0	0.84302+0	0.88517+0	0.12027+1	0.11295+1	0.13398+1
0.51	0.54469	0.95055+0	0.83737+0	0.88093+0	0.11903+1	0.11063+1	0.13212+1
0.52	0.55483	0.94869+0	0.83165+0	0.87663+0	0.11786+1	0.10840+1	0.13034+1
0.53	0.56493	0.94681+0	0.82588+0	0.87228+0	0.11675+1	0.10625+1	0.12865+1
0.54	0.57501	0.94489+0	0.82005+0	0.86788+0	0.11571+1	0.10417+1	0.12703+1
0.55	0.58506	0.94295+0	0.81417+0	0.86342+0	0.11471+1	0.10217+1	0.12549+1
0.56	0.59507	0.94098+0	0.80823+0	0.85892+0	0.11378+1	0.10024+1	0.12403+1
0.57	0.60505	0.93898+0	0.80224+0	0.85437+0	0.11289+1	0.98381+0	0.12263+1
0.58	0.61501	0.93696+0	0.79621+0	0.84978+0	0.11205+1	0.96580+0	0.12130+1
0.59	0.62492	0.93491+0	0.79013+0	0.84514+0	0.11126+1	0.94840+0	0.12003+1
0.60	0.63481	0.93284+0	0.78400+0	0.84045+0	0.11050+1	0.93155+0	0.11882+1
0.61	0.64466	0.93073+0	0.77784+0	0.83573+0	0.10979+1	0.91525+0	0.11767+1
0.62	0.65448	0.92861+0	0.77164+0	0.83096+0	0.10912+1	0.89946+0	0.11656+1
0.63	0.66427	0.92646+0	0.76540+0	0.82616+0	0.10848+1	0.88416+0	0.11552+1
0.64	0.67402	0.92428+0	0.75913+0	0.82132+0	0.10788+1	0.86932+0	0.11451+1
0.65	0.68374	0.92208+0	0.75283+0	0.81644+0	0.10731+1	0.85493+0	0.11356+1
0.66	0.69342	0.91986+0	0.74650+0	0.81153+0	0.10678+1	0.84096+0	0.11265+1
0.67	0.70307	0.91762+0	0.74014+0	0.80659+0	0.10627+1	0.82739+0	0.11179+1
0.68	0.71268	0.91535+0	0.73376+0	0.80162+0	0.10579+1	0.81422+0	0.11097+1
0.69	0.72225	0.91306+0	0.72735+0	0.79661+0	0.10534+1	0.80141+0	0.11018+1
0.70	0.73179	0.91075+0	0.72093+0	0.79158+0	0.10492+1	0.78896+0	0.10944+1
0.71	0.74129	0.90841+0	0.71448+0	0.78652+0	0.10451+1	0.77685+0	0.10873+1
0.72	0.75076	0.90606+0	0.70103+0	0.78143+0	0.10414+1	0.76507+0	0.10806+1
0.73	0.76019	0.90369+0	0.70155+0	0.77632+0	0.10378+1	0.75360+0	0.10742+1
0.74	0.76958	0.90129+0	0.69507+0	0.77119+0	0.10345+1	0.74243+0	0.10681+1
0.75	0.77894	0.89888+0	0.68857+0	0.76604+0	0.10314+1	0.73155+0	0.10624+1
0.76	0.78825	0.89644+0	0.68207+0	0.76086+0	0.10284+1	0.72095+0	0.10570+1
0.77	0.79753	0.89399+0	0.67556+0	0.75567+0	0.10257+1	0.71061+0	0.10519+1
0.78	0.80677	0.89152+0	0.66905+0	0.75046+0	0.10231+1	0.70053+0	0.10471+1
0.79	0.81597	0.88903+0	0.66254+0	0.74523+0	0.10208+1	0.69070+0	0.10425+1
0.80	0.82514	0.88652+0	0.65602+0	0.73999+0	0.10185+1	0.68110+0	0.10382+1
0.81	0.83426	0.88400+0	0.64951+0	0.73474+0	0.10165+1	0.67173+0	0.10342+1
0.82	0.84335	0.88146+0	0.64300+0	0.72947+0	0.10145+1	0.66259+0	0.10305+1
0.83	0.85239	0.87890+0	0.63650+0	0.72419+0	0.10128+1	0.65366+0	0.10270+1



续表

M	λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{F}{F^*}$	$\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)$	$\frac{\sigma}{\sigma^*}$
0.84	0.86140	0.87633+0	0.63000+0	0.71891+0	0.10112+1	0.64493+0	0.10237+1
0.85	0.87037	0.87374+0	0.62351+0	0.71361+0	0.10097+1	0.63640+0	0.10207+1
0.86	0.87929	0.87114+0	0.61703+0	0.70831+0	0.10083+1	0.62806+0	0.10179+1
0.87	0.88818	0.86852+0	0.61057+0	0.70300+0	0.10070+1	0.61991+0	0.10153+1
0.88	0.89703	0.86589+0	0.60412+0	0.69768+0	0.10059+1	0.61193+0	0.10129+1
0.89	0.90583	0.86324+0	0.59768+0	0.69236+0	0.10049+1	0.60413+0	0.10108+1
0.90	0.91460	0.86059+0	0.59126+0	0.68704+0	0.10040+1	0.59650+0	0.10089+1
0.91	0.92332	0.85791+0	0.58486+0	0.68172+0	0.10032+1	0.58903+0	0.10071+1
0.92	0.93201	0.85523+0	0.57848+0	0.67640+0	0.10025+1	0.58171+0	0.10056+1
0.93	0.94065	0.85253+0	0.57211+0	0.67108+0	0.10019+1	0.57455+0	0.10043+1
0.94	0.94925	0.84982+0	0.56578+0	0.66576+0	0.10014+1	0.56753+0	0.10031+1
0.95	0.95781	0.84710+0	0.55946+0	0.66044+0	0.10009+1	0.56066+0	0.10021+1
0.96	0.96633	0.84437+0	0.55317+0	0.65513+0	0.10006+1	0.55392+0	0.10014+1
0.97	0.97481	0.84162+0	0.54691+0	0.64982+0	0.10003+1	0.54732+0	0.10008+1
0.98	0.98325	0.83887+0	0.54067+0	0.64452+0	0.10001+1	0.54085+0	0.10003+1
0.99	0.99165	0.83611+0	0.53446+0	0.63923+0	0.10000+1	0.53451+0	0.10001+1
1.00	1.00000	0.83333+0	0.52828+0	0.63394+0	0.10000+1	0.52828+0	0.10000+1
1.01	1.00831	0.83055+0	0.52213+0	0.62866+0	0.10000+1	0.52218+0	0.10001+1
1.02	1.01658	0.82776+0	0.51602+0	0.62339+0	0.10001+1	0.51619+0	0.10003+1
1.03	1.02481	0.82496+0	0.50994+0	0.61813+0	0.10003+1	0.51031+0	0.10007+1
1.04	1.03300	0.82215+0	0.50389+0	0.61289+0	0.10005+1	0.50454+0	0.10013+1
1.05	1.04114	0.81934+0	0.49787+0	0.60765+0	0.10008+1	0.49888+0	0.10020+1
1.06	1.04925	0.81651+0	0.49189+0	0.60243+0	0.10012+1	0.49332+0	0.10029+1
1.07	1.05731	0.81368+0	0.48595+0	0.59722+0	0.10016+1	0.48787+0	0.10039+1
1.08	1.06533	0.81085+0	0.48005+0	0.59203+0	0.10020+1	0.48250+0	0.10051+1
1.09	1.07331	0.80800+0	0.47418+0	0.58686+0	0.10025+1	0.47724+0	0.10064+1
1.10	1.08124	0.80515+0	0.46835+0	0.58170+0	0.10031+1	0.47207+0	0.10079+1
1.11	1.08913	0.80230+0	0.46257+0	0.57655+0	0.10036+1	0.46698+0	0.10095+1
1.12	1.09699	0.79944+0	0.45682+0	0.57143+0	0.10043+1	0.46199+0	0.10113+1
1.13	1.10479	0.79657+0	0.45111+0	0.56632+0	0.10050+1	0.45708+0	0.10132+1
1.14	1.11256	0.79370+0	0.44545+0	0.56123+0	0.10057+1	0.45225+0	0.10153+1
1.15	1.12029	0.79083+0	0.43983+0	0.55616+0	0.10065+1	0.44751+0	0.10175+1
1.16	1.12797	0.78795+0	0.43425+0	0.55112+0	0.10073+1	0.44284+0	0.10198+1
1.17	1.13561	0.78506+0	0.42872+0	0.54609+0	0.10081+1	0.43825+0	0.10222+1
1.18	1.14321	0.78218+0	0.42322+0	0.54108+0	0.10090+1	0.43374+0	0.10248+1
1.19	1.15077	0.77929+0	0.41778+0	0.53610+0	0.10099+1	0.42930+0	0.10276+1
1.20	1.15828	0.77640+0	0.41238+0	0.53114+0	0.10108+1	0.42493+0	0.10304+1
1.21	1.16575	0.77350+0	0.40702+0	0.52620+0	0.10118+1	0.42063+0	0.10334+1
1.22	1.17319	0.77061+0	0.40171+0	0.52129+0	0.10128+1	0.41640+0	0.10366+1
1.23	1.18057	0.76771+0	0.39645+0	0.51640+0	0.10138+1	0.41224+0	0.10398+1
1.24	1.18792	0.76481+0	0.39123+0	0.51154+0	0.10149+1	0.40814+0	0.10432+1



续表

M	λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{F}{F^*}$	$\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)$	$\frac{\sigma}{\sigma^*}$
1.25	1.19523	0.76190+0	0.38606+0	0.50670+0	0.10159+1	0.40411+0	0.10468+1
1.26	1.20249	0.75900+0	0.38093+0	0.50189+0	0.10170+1	0.40014+0	0.10504+1
1.27	1.20972	0.75610+0	0.37586+0	0.49710+0	0.10182+1	0.39622+0	0.10542+1
1.28	1.21690	0.75319+0	0.37083+0	0.49234+0	0.10193+1	0.39237+0	0.10581+1
1.29	1.22404	0.75029+0	0.36585+0	0.48761+0	0.10205+1	0.38858+0	0.10621+1
1.30	1.23114	0.74738+0	0.36091+0	0.48290+0	0.10217+1	0.38484+0	0.10663+1
1.31	1.23819	0.74448+0	0.35603+0	0.47822+0	0.10229+1	0.38116+0	0.10706+1
1.32	1.24521	0.74158+0	0.35119+0	0.47357+0	0.10241+1	0.37754+0	0.10750+1
1.33	1.25218	0.73867+0	0.34640+0	0.46895+0	0.10254+1	0.37396+0	0.10796+1
1.34	1.25912	0.73577+0	0.34166+0	0.46436+0	0.10267+1	0.37044+0	0.10842+1
1.35	1.26601	0.73287+0	0.33697+0	0.45980+0	0.10279+1	0.36697+0	0.10890+1
1.36	1.27286	0.72997+0	0.33233+0	0.45526+0	0.10292+1	0.36355+0	0.10940+1
1.37	1.27968	0.72707+0	0.32773+0	0.45076+0	0.10306+1	0.36018+0	0.10990+1
1.38	1.28645	0.72418+0	0.32319+0	0.44628+0	0.10319+1	0.35686+0	0.11042+1
1.39	1.29318	0.72128+0	0.31869+0	0.44184+0	0.10332+1	0.35359+0	0.11095+1
1.40	1.29987	0.71839+0	0.31424+0	0.43742+0	0.10346+1	0.35036+0	0.11149+1
1.41	1.30652	0.71550+0	0.30984+0	0.43304+0	0.10360+1	0.34717+0	0.11205+1
1.42	1.31313	0.71262+0	0.30549+0	0.42869+0	0.10373+1	0.34403+0	0.11262+1
1.43	1.31970	0.70973+0	0.30118+0	0.42436+0	0.10387+1	0.34093+0	0.11320+1
1.44	1.32623	0.70685+0	0.29693+0	0.42007+0	0.10401+1	0.33788+0	0.11379+1
1.45	1.33272	0.70398+0	0.29272+0	0.41581+0	0.10415+1	0.33486+0	0.11440+1
1.46	1.33917	0.70110+0	0.28856+0	0.41158+0	0.10430+1	0.33189+0	0.11501+1
1.47	1.34558	0.69824+0	0.28445+0	0.40739+0	0.10444+1	0.32896+0	0.11565+1
1.48	1.35195	0.69537+0	0.28039+0	0.40322+0	0.10458+1	0.32606+0	0.11629+1
1.49	1.35828	0.69251+0	0.27637+0	0.39909+0	0.10473+1	0.32321+0	0.11695+1
1.50	1.36458	0.68966+0	0.27240+0	0.39498+0	0.10487+1	0.32039+0	0.11762+1
1.51	1.37083	0.68680+0	0.26848+0	0.39091+0	0.10502+1	0.31761+0	0.11830+1
1.52	1.37705	0.68396+0	0.26461+0	0.38688+0	0.10516+1	0.31487+0	0.11899+1
1.53	1.38322	0.68112+0	0.26078+0	0.38287+0	0.10531+1	0.31216+0	0.11970+1
1.54	1.38936	0.67828+0	0.25700+0	0.37890+0	0.10546+1	0.30949+0	0.12042+1
1.55	1.39546	0.67545+0	0.25326+0	0.37495+0	0.10560+1	0.30685+0	0.12116+1
1.56	1.40152	0.67262+0	0.24957+0	0.37105+0	0.10575+1	0.30424+0	0.12190+1
1.57	1.40755	0.66980+0	0.24593+0	0.36717+0	0.10590+1	0.30167+0	0.12266+1
1.58	1.41353	0.66699+0	0.24233+0	0.36332+0	0.10605+1	0.29913+0	0.12344+1
1.59	1.41948	0.66418+0	0.23878+0	0.35951+0	0.10620+1	0.29662+0	0.12422+1
1.60	1.42539	0.66138+0	0.23527+0	0.35573+0	0.10635+1	0.29414+0	0.12502+1
1.61	1.43127	0.65858+0	0.23181+0	0.35198+0	0.10650+1	0.29170+0	0.12584+1
1.62	1.43710	0.65579+0	0.22839+0	0.34827+0	0.10665+1	0.28928+0	0.12666+1
1.63	1.44290	0.65301+0	0.22501+0	0.34458+0	0.10680+1	0.28690+0	0.12750+1
1.64	1.44866	0.65023+0	0.22168+0	0.34093+0	0.10695+1	0.28454+0	0.12836+1
1.65	1.45439	0.64746+0	0.21839+0	0.33731+0	0.10710+1	0.28221+0	0.12922+1
1.66	1.46008	0.64470+0	0.21515+0	0.33372+0	0.10725+1	0.27991+0	0.13010+1



续表

M	λ	$\dfrac{T}{T_0}$	$\dfrac{p}{p_0}$	$\dfrac{\rho}{\rho_0}$	$\dfrac{F}{F^*}$	$\left(\dfrac{p}{p_0}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma^*}\right)$	$\dfrac{\sigma}{\sigma^*}$
1.67	1.46573	0.64194+0	0.21195+0	0.33017+0	0.10740+1	0.27764+0	0.13100+1
1.68	1.47135	0.63919+0	0.20879+0	0.32664+0	0.10755+1	0.27540+0	0.13190+1
1.69	1.47693	0.63645+0	0.20567+0	0.32315+0	0.10770+1	0.27318+0	0.13283+1
1.70	1.48247	0.63371+0	0.20259+0	0.31969+0	0.10785+1	0.27099+0	0.13376+1
1.71	1.48798	0.63099+0	0.19956+0	0.31626+0	0.10800+1	0.26883+0	0.13471+1
1.72	1.49345	0.62827+0	0.19656+0	0.31287+0	0.10815+1	0.26669+0	0.13567+1
1.73	1.49889	0.62556+0	0.19361+0	0.30950+0	0.10830+1	0.26457+0	0.13665+1
1.74	1.50429	0.62285+0	0.19070+0	0.30617+0	0.10845+1	0.26248+0	0.13764+1
1.75	1.50966	0.62016+0	0.18782+0	0.30287+0	0.10860+1	0.26042+0	0.13865+1
1.76	1.51499	0.61747+0	0.18499+0	0.29959+0	0.10875+1	0.25837+0	0.13967+1
1.77	1.52029	0.61479+0	0.18219+0	0.29635+0	0.10890+1	0.25636+0	0.14070+1
1.78	1.52555	0.61211+0	0.17944+0	0.29315+0	0.10905+1	0.25436+0	0.14175+1
1.79	1.53078	0.60945+0	0.17672+0	0.28997+0	0.10920+1	0.25239+0	0.14282+1
1.80	1.53598	0.60680+0	0.17404+0	0.28682+0	0.10935+1	0.25044+0	0.14390+1
1.81	1.54114	0.60415+0	0.17140+0	0.28370+0	0.10950+1	0.24851+0	0.14499+1
1.82	1.54626	0.60151+0	0.16879+0	0.28061+0	0.10965+1	0.24661+0	0.14610+1
1.83	1.55136	0.59888+0	0.16622+0	0.27756+0	0.10980+1	0.24472+0	0.14723+1
1.84	1.55642	0.59626+0	0.16369+0	0.27453+0	0.10995+1	0.24286+0	0.14836+1
1.85	1.56145	0.59365+0	0.16119+0	0.27153+0	0.11009+1	0.24102+0	0.14952+1
1.86	1.56644	0.59104+0	0.15873+0	0.26857+0	0.11024+1	0.23920+0	0.15069+1
1.87	1.57140	0.58845+0	0.15631+0	0.26563+0	0.11039+1	0.23739+0	0.15187+1
1.88	1.57633	0.58586+0	0.15392+0	0.26272+0	0.11054+1	0.23561+0	0.15308+1
1.89	1.58123	0.58329+0	0.15156+0	0.25984+0	0.11068+1	0.23385+0	0.15429+1
1.90	1.58609	0.58072+0	0.14924+0	0.25699+0	0.11083+1	0.23211+0	0.15553+1
1.91	1.59092	0.57816+0	0.14695+0	0.25417+0	0.11097+1	0.23038+0	0.15677+1
1.92	1.59572	0.57561+0	0.14470+0	0.25138+0	0.11112+1	0.22868+0	0.15804+1
1.93	1.60049	0.57307+0	0.14247+0	0.24861+0	0.11126+1	0.22699+0	0.15932+1
1.94	1.60523	0.57054+0	0.14023+0	0.24588+0	0.11141+0	0.22532+0	0.16062+1
1.95	1.60993	0.56802+0	0.13813+0	0.24317+0	0.11155+1	0.22367+0	0.16193+1
1.96	1.61460	0.56551+0	0.13600+0	0.24049+0	0.11170+1	0.22203+0	0.16326+1
1.97	1.61925	0.56301+0	0.13390+0	0.23784+0	0.11184+1	0.22042+0	0.16461+1
1.98	1.62386	0.56051+0	0.13184+0	0.23521+0	0.11198+1	0.21882+0	0.16597+1
1.99	1.62814	0.55803+0	0.12981+0	0.23262+0	0.11213+1	0.21724+0	0.16735+1
2.00	1.63299	0.55556+0	0.12780+0	0.23005+0	0.11227+1	0.21567+0	0.16875+1
2.02	1.64201	0.55064+0	0.12389+0	0.22499+0	0.11255+1	0.21259+0	0.17160+1
2.04	1.65090	0.54576+0	0.12009+0	0.22004+0	0.11283+1	0.20957+0	0.17451+1
2.06	1.65967	0.54001+0	0.11640+0	0.21519+0	0.11311+1	0.20661+0	0.17750+1
2.08	1.66833	0.53611+0	0.11282+0	0.21045+0	0.11339+1	0.20371+0	0.18056+1
2.10	1.67687	0.53135+0	0.10935+0	0.20580+0	0.11366+1	0.20088+0	0.18369+1
2.12	1.68530	0.52663+0	0.10599+0	0.20126+0	0.11393+1	0.19809+0	0.18690+1
2.14	1.69362	0.52194+0	0.10273+0	0.19681+0	0.11420+1	0.19537+0	0.19018+1
2.16	1.70183	0.51730+0	0.99562−1	0.19247+0	0.11447+1	0.19270+0	0.19354+1
2.18	1.70992	0.51269+0	0.96495−1	0.18821+0	0.11474+1	0.19008+0	0.19698+1
2.20	1.71791	0.50813+0	0.93522−1	0.18405+0	0.11500+1	0.18751+0	0.20050+1
2.22	1.72579	0.50361+0	0.90640−1	0.17998+0	0.11526+1	0.18499+0	0.20409+1

续表

M	λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{F}{F^*}$	$\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)$	$\frac{\sigma}{\sigma^*}$
2.24	1.73357	0.49912+0	0.87846–1	0.17600+0	0.11552+1	0.18252+0	0.20777+1
2.26	1.74125	0.49468+0	0.85139–1	0.17211+0	0.11578+1	0.18010+0	0.21153+1
2.28	1.74882	0.49027+0	0.82515–1	0.16830+0	0.11603+1	0.17772+0	0.21538+1
2.30	1.75629	0.48501+0	0.79973–1	0.16458+0	0.11628+1	0.17539+0	0.21981+1
2.32	1.76366	0.48158+0	0.77509–1	0.16095+0	0.11653+1	0.17310+0	0.22333+1
2.34	1.77093	0.47730+0	0.75122–1	0.15739+0	0.11678+1	0.17086+0	0.22744+1
2.36	1.77811	0.47305+0	0.72810–1	0.15391+0	0.11703+1	0.16866+0	0.23164+1
2.38	1.78519	0.46885+0	0.70570–1	0.15052+0	0.11727+1	0.16649+0	0.23593+1
2.40	1.79218	0.46463+0	0.68399–1	0.14720+0	0.11751+1	0.16437+0	0.24031+1
2.42	1.79907	0.46056+0	0.66297–1	0.14395+0	0.11775+1	0.16229+0	0.24479+1
2.44	1.80587	0.45647+0	0.64261–1	0.14078+0	0.11798+1	0.16024+0	0.24936+1
2.46	1.81258	0.45242+0	0.62288–1	0.13768+0	0.11821+1	0.15823+0	0.25403+1
2.48	1.81921	0.44841+0	0.60378–1	0.13465+0	0.11844+1	0.15626+0	0.25880+1
2.50	1.82574	0.44444+0	0.58528–1	0.13169+0	0.11867+1	0.15432+0	0.26367+1
2.52	1.83219	0.44051+0	0.56736–1	0.12879+0	0.11890+1	0.15242+0	0.26865+1
2.54	1.83855	0.43632+0	0.55000–1	0.12507+0	0.11912+1	0.15055+0	0.27372+1
2.56	1.84483	0.43277+0	0.53319–1	0.12321+0	0.11934+1	0.14871+0	0.27891+1
2.58	1.85103	0.42895+0	0.51692–1	0.12051+0	0.11956+1	0.14691+0	0.28420+1
2.60	1.85714	0.42517+0	0.50115–1	0.11787+0	0.11978+1	0.14513+0	0.28960+1
2.62	1.86318	0.42143+0	0.48589–1	0.11530+0	0.11999+1	0.14339+0	0.29511+1
2.64	1.86913	0.41772+0	0.47110–1	0.11278+0	0.12021+1	0.14168+0	0.30073+1
2.66	1.87501	0.41406+0	0.45679–1	0.11032+0	0.12042+1	0.13999+0	0.30647+1
2.68	1.88081	0.41043+0	0.44292–1	0.10792+0	0.12062+1	0.13834+0	0.31233+1
2.70	1.88653	0.40683+0	0.42950–1	0.10557+0	0.12083+1	0.13671+0	0.31830+1
2.72	1.89218	0.40328+0	0.41650–1	0.10328+0	0.12103+1	0.13511+0	0.32440+1
2.74	1.89775	0.39976+0	0.40391–1	0.10104+0	0.12123+1	0.13354+0	0.33061+1
2.76	1.90325	0.39627+0	0.39172–1	0.98851–1	0.12143+1	0.13199+0	0.33695+1
2.78	1.90868	0.39282+0	0.37992–1	0.96714–1	0.12163+1	0.13047+0	0.34342+1
2.80	1.91404	0.38941+0	0.36848–1	0.94626–1	0.12182+1	0.12897+0	0.35001+1
2.82	1.91933	0.38603+0	0.35741–1	0.92587–1	0.12202+1	0.12750+0	0.35674+1
2.84	1.92455	0.38268+0	0.34669–1	0.90594–1	0.12221+1	0.12605+0	0.36359+1
2.86	1.92970	0.37937+0	0.33631–1	0.88648–1	0.12240+1	0.12463+0	0.37058+1
2.88	1.93479	0.37610+0	0.32625–1	0.86747–1	0.12258+1	0.12323+0	0.37771+1
2.90	1.93981	0.37286+0	0.31651–1	0.84889–1	0.12277+1	0.12185+0	0.38498+1
2.92	1.94477	0.36965+0	0.30708–1	0.83075–1	0.12295+1	0.12049+0	0.39238+1
2.94	1.94966	0.36647+0	0.29795–1	0.81302–1	0.12313+1	0.11916+0	0.39993+1
2.96	1.95449	0.36333+0	0.28910–1	0.79571–1	0.12331+1	0.11785+0	0.40763+1
2.98	1.95925	0.36022+0	0.28054–1	0.77879–1	0.12348+1	0.11655+0	0.41547+1
3.00	1.96396	0.35714+0	0.27224–1	0.76226–1	0.12366+1	0.11528+0	0.42346+1
3.10	1.98661	0.34223+0	0.23449–1	0.68517–1	0.12450+1	0.10921+0	0.46573+1
3.20	2.00786	0.32808+0	0.20228–1	0.61654–1	0.12530+1	0.10359+0	0.51210+1
3.30	2.02781	0.31466+0	0.17477–1	0.55541–1	0.12605+1	0.98371–1	0.56286+1
3.40	2.04656	0.30193+0	0.15125–1	0.50093–1	0.12676+1	0.93526–1	0.61837+1
3.50	2.06419	0.28986+0	0.13111–1	0.45233–1	0.12743+1	0.89018–1	0.67896+1
3.60	2.08077	0.27840+0	0.11385–1	0.40894–1	0.12807+1	0.84818–1	0.74501+1



续表

M	λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{F}{F^*}$	$\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)$	$\frac{\sigma}{\sigma^*}$
3.70	2.09639	0.26752+0	0.99029-2	0.37017-1	0.12867+1	0.80897-1	0.81691+1
3.80	2.11111	0.25720+0	0.86290-2	0.33549-1	0.12924+1	0.77234-1	0.89506+1
3.90	2.12499	0.24740+0	0.75320-2	0.30445-1	0.12978+1	0.73806-1	0.97990+1
4.00	2.13809	0.23810+0	0.65861-2	0.27662-1	0.13029+1	0.70595-1	0.10719+2
4.10	2.15046	0.22925+0	0.57690-2	0.25164-1	0.13077+1	0.67582-1	0.11715+2
4.20	2.16215	0.22085+0	0.50621-2	0.22921-1	0.13123+1	0.64752-1	0.12792+2
4.30	2.17321	0.21286+0	0.44494-2	0.20903-1	0.13167+1	0.62091-1	0.13955+2
4.40	2.18368	0.20525+0	0.39176-2	0.19087-1	0.13208+1	0.59587-1	0.15210+2
4.50	2.19360	0.19802+0	0.34553-2	0.17449-1	0.13247+1	0.57227-1	0.16562+2
4.60	2.20300	0.19113+0	0.30526-2	0.15971-1	0.13285+1	0.55000-1	0.18018+2
4.70	2.21192	0.18457+0	0.27012-2	0.14635-1	0.13320+1	0.52898-1	0.19583+2
4.80	2.22038	0.17832+0	0.23943-2	0.13427-1	0.13354+1	0.50911-1	0.21264+2
4.90	2.22842	0.17235+0	0.21256-2	0.12333-1	0.13386+1	0.49031-1	0.23067+2
5.00	2.23607	0.16667+0	0.18900-2	0.11340-1	0.13416+1	0.47251-1	0.25000+2
5.10	2.24334	0.16124+0	0.16832-2	0.10439-1	0.13446+1	0.45564-1	0.27070+2
5.20	2.25026	0.15605+0	0.15013-2	0.96204-2	0.13473+1	0.43963-1	0.29283+2
5.30	2.25685	0.15110+0	0.13411-2	0.88753-2	0.13500+1	0.42444-1	0.31649+2
5.40	2.26313	0.14637+0	0.11997-2	0.81965-2	0.13525+1	0.41000-1	0.34175+2
5.50	2.26913	0.14184+0	0.10748-2	0.75775-2	0.13549+1	0.39628-1	0.36869+2
5.60	2.27484	0.13751+0	0.96430-3	0.70124-2	0.13572+1	0.38321-1	0.39740+2
5.70	2.28030	0.13337+0	0.86635-3	0.64959-2	0.13594+1	0.37077-1	0.42797+2
5.80	2.28552	0.12940+0	0.77941-3	0.60233-2	0.13615+1	0.35892-1	0.46050+2
5.90	2.29051	0.12560+0	0.70214-3	0.55904-2	0.13635+1	0.34761-1	0.49507+2
6.00	2.29528	0.12195+0	0.63336-3	0.51936-2	0.13655+1	0.33682-1	0.53180+2
6.50	2.31626	0.10582+0	0.38547-3	0.36427-2	0.13740+1	0.28962-1	0.75134+2
7.00	2.33333	0.92593-1	0.24156-3	0.26088-2	0.13810+1	0.25156-1	0.10414+3
7.50	2.34738	0.81633-1	0.15543-3	0.19040-2	0.13907+1	0.22046-1	0.14184+3
8.00	2.35907	0.72464-1	0.10243-3	0.14135-2	0.13915+1	0.19473-1	0.19011+3
8.50	2.36889	0.64725-1	0.68984-4	0.10658-2	0.13955+1	0.17321-1	0.25109+3
9.00	2.37722	0.58140-1	0.47386-4	0.81504-3	0.13989+1	0.15504-1	0.32719+3
9.50	2.38433	0.52493-1	0.33141-4	0.63134-3	0.14019+1	0.13957-1	0.42113+3
10.00	2.39046	0.47619-1	0.23563-4	0.49483-3	0.14044+1	0.12628-1	0.53594+3
11.00	2.40040	0.39683-1	0.12448-4	0.31369-3	0.14085+1	0.10480-1	0.84191+3
12.00	2.40804	0.33557-1	0.69222-5	0.20628-3	0.14117+1	0.88342-2	0.12762+4
13.00	2.41404	0.28736-1	0.40223-5	0.13998-3	0.14141+1	0.75461-2	0.18761+4
14.00	2.41883	0.24876-1	0.24278-5	0.97597-4	0.14161+1	0.65195-2	0.26854+4
15.00	2.42272	0.21739-1	0.15148-5	0.69680-4	0.14177+1	0.56883-2	0.37552+4
16.00	2.42591	0.19157-1	0.97309-6	0.50795-4	0.14191+1	0.50061-2	0.51446+4
17.00	2.42857	0.17007-1	0.64147-6	0.37719-4	0.14202+1	0.44393-2	0.69205+4
18.00	2.43081	0.15198-1	0.43272-6	0.28473-4	0.14211+1	0.39634-2	0.91593+4
19.00	2.43270	0.13661-1	0.29800-6	0.21813-4	0.14219+1	0.35600-2	0.11946+5
20.00	2.43432	0.12346-1	0.20908-6	0.16935-4	0.14226+1	0.32150-2	0.15377+5
∞	2.44949	0.0	0.0	0.0	0.14289+1	0.0	∞

表 4（b） 一维等熵流气动函数表（γ=1.33）

(以 λ 数为自变量)

λ	$\tau(\lambda)$	$\pi(\lambda)$	$\varepsilon(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.01	1.0000	0.9999	0.9999	0.0159	0.0159	1.0000	1.0000	0.0093
0.02	0.9999	0.9998	0.9999	0.0318	0.0318	1.0003	0.9995	0.0185
0.03	0.9999	0.9995	0.9997	0.0476	0.0477	1.0006	0.9990	0.0278
0.04	0.9998	0.9991	0.9993	0.0635	0.0636	1.0009	0.9982	0.0371
0.05	0.9997	0.9986	0.9990	0.0793	0.0795	1.0015	0.9972	0.0463
0.06	0.9995	0.9980	0.9985	0.0952	0.0954	1.0021	0.9959	0.0556
0.07	0.9993	0.9972	0.9979	0.1110	0.1113	1.0028	0.9944	0.0649
0.08	0.9991	0.9964	0.9973	0.1267	0.1272	1.0037	0.9928	0.0742
0.09	0.9989	0.9954	0.9965	0.1425	0.1431	1.0046	0.9908	0.0834
0.10	0.9986	0.9944	0.9958	0.1582	0.1591	1.0057	0.9887	0.0927
0.11	0.9983	0.9932	0.9949	0.1738	0.1750	1.0069	0.9864	0.1020
0.12	0.9980	0.9918	0.9938	0.1894	0.1910	1.0081	0.9838	0.1113
0.13	0.9976	0.9904	0.9928	0.2052	0.2072	1.0096	0.9810	0.1206
0.14	0.9972	0.9889	0.9917	0.2205	0.2220	1.0111	0.9781	0.1299
0.15	0.9968	0.9872	0.9903	0.2360	0.2390	1.0126	0.9749	0.1392
0.16	0.9964	0.9854	0.9890	0.2514	0.2551	1.0143	0.9715	0.1485
0.17	0.9959	0.9836	0.9877	0.2667	0.2712	1.0162	0.9679	0.1578
0.18	0.9954	0.9816	0.9862	0.2820	0.2873	1.0181	0.9642	0.1672
0.19	0.9949	0.9796	0.9846	0.2972	0.3034	1.0202	0.9602	0.1765
0.20	0.9943	0.9774	0.9830	0.3123	0.3195	1.0223	0.9561	0.1858
0.21	0.9938	0.9751	0.9812	0.3273	0.3357	1.0245	0.9518	0.1952
0.22	0.9932	0.9728	0.9795	0.3423	0.3519	1.0269	0.9473	0.2045
0.23	0.9925	0.9702	0.9775	0.3571	0.3681	1.0292	0.9427	0.2139
0.24	0.9918	0.9675	0.9755	0.3719	0.3844	1.0317	0.9378	0.2233
0.25	0.9912	0.9648	0.9734	0.3866	0.4007	1.0343	0.9329	0.2327
0.26	0.9904	0.9619	0.9712	0.4011	0.4170	1.0369	0.9277	0.2420
0.27	0.9897	0.9590	0.9690	0.4156	0.4334	1.0396	0.9224	0.2515
0.28	0.9889	0.9560	0.9667	0.4300	0.4498	1.0425	0.9170	0.2609
0.29	0.9881	0.9529	0.9644	0.4443	0.4662	1.0455	0.9114	0.2703
0.30	0.9873	0.9496	0.9619	0.4584	0.4827	1.0485	0.9057	0.2797
0.31	0.9864	0.9463	0.9594	0.4724	0.4992	1.0516	0.8999	0.2892
0.32	0.9855	0.9428	0.9567	0.4863	0.5158	1.0547	0.8940	0.2986
0.33	0.9846	0.9393	0.9540	0.5001	0.5324	1.0579	0.8879	0.3081
0.34	0.9836	0.9356	0.9512	0.5137	0.5491	1.0612	0.8817	0.3176
0.35	0.9827	0.9319	0.9484	0.5273	0.5658	1.0645	0.8754	0.3271
0.36	0.9817	0.9281	0.9455	0.5407	0.5826	1.0680	0.8690	0.3366
0.37	0.9806	0.9241	0.9424	0.5539	0.5994	1.0714	0.8625	0.3462
0.38	0.9796	0.9201	0.9393	0.5670	0.6162	1.0750	0.8560	0.3557
0.39	0.9785	0.9159	0.9361	0.5799	0.6332	1.0785	0.8493	0.3653
0.40	0.9773	0.9118	0.9329	0.5928	0.6501	1.0822	0.8425	0.3749
0.41	0.9762	0.9075	0.9296	0.6055	0.6672	1.0859	0.8357	0.3845
0.42	0.9750	0.9030	0.9262	0.6179	0.6843	1.0896	0.8288	0.3941
0.43	0.9738	0.8985	0.9227	0.6303	0.7014	1.0933	0.8218	0.4037
0.44	0.9726	0.8940	0.9192	0.6425	0.7187	1.0972	0.8148	0.4134



续表

λ	$\tau(\lambda)$	$\pi(\lambda)$	$\varepsilon(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
0.45	0.9713	0.8893	0.9156	0.6545	0.7359	1.1010	0.8078	0.4230
0.46	0.9700	0.8850	0.9123	0.6666	0.7533	1.1053	0.8006	0.4325
0.47	0.9687	0.8797	0.9081	0.6780	0.7707	1.1088	0.7934	0.4424
0.48	0.9674	0.8749	0.9044	0.6896	0.7882	1.1128	0.7862	0.4522
0.49	0.9660	0.8699	0.9005	0.7009	0.8058	1.1167	0.7790	0.4619
0.50	0.9646	0.8648	0.8966	0.7121	0.8234	1.1207	0.7717	0.4717
0.51	0.9632	0.8596	0.8925	0.7230	0.8411	1.1246	0.7644	0.4815
0.52	0.9617	0.8544	0.8884	0.7339	0.8589	1.1287	0.7570	0.4913
0.53	0.9602	0.8491	0.8843	0.7445	0.8768	1.1327	0.7496	0.5011
0.54	0.9587	0.8436	0.8799	0.7548	0.8947	1.1365	0.7423	0.5110
0.55	0.9572	0.8382	0.8757	0.7651	0.9128	1.1406	0.7349	0.5208
0.56	0.9556	0.8327	0.8714	0.7752	0.9309	1.1447	0.7275	0.5308
0.57	0.9540	0.8271	0.8670	0.7850	0.9491	1.1487	0.7200	0.5407
0.58	0.9524	0.8214	0.8625	0.7946	0.9674	1.1526	0.7126	0.5506
0.59	0.9507	0.8156	0.8579	0.8040	0.9858	1.1565	0.7052	0.5606
0.60	0.9490	0.8098	0.8533	0.8133	1.0043	1.1605	0.6978	0.5706
0.61	0.9473	0.8040	0.8487	0.8224	1.0229	1.1645	0.6904	0.5807
0.62	0.9456	0.7980	0.8439	0.8312	1.0416	1.1684	0.6830	0.5907
0.63	0.9438	0.7921	0.8393	0.8399	1.0604	1.1724	0.6756	0.6008
0.64	0.9420	0.7860	0.8344	0.8483	1.0792	1.1762	0.6683	0.6109
0.65	0.9402	0.7798	0.8294	0.8564	1.0982	1.1799	0.6609	0.6211
0.66	0.9383	0.7737	0.8246	0.8645	1.1173	1.1838	0.6536	0.6313
0.67	0.9364	0.7674	0.8195	0.8722	1.1366	1.1874	0.6463	0.6415
0.68	0.9345	0.7612	0.8145	0.8798	1.1559	1.1911	0.6390	0.6517
0.69	0.9326	0.7548	0.8094	0.8871	1.1753	1.1947	0.6318	0.6620
0.70	0.9306	0.7483	0.8041	0.8941	1.1949	1.1981	0.6246	0.6723
0.71	0.9286	0.7419	0.7989	0.9011	1.2146	1.2017	0.6174	0.6826
0.72	0.9266	0.7354	0.7937	0.9077	1.2343	1.2051	0.6102	0.6930
0.73	0.9245	0.7289	0.7884	0.9143	1.2543	1.2086	0.6031	0.7034
0.74	0.9224	0.7223	0.7830	0.9204	1.2743	1.2118	0.5961	0.7139
0.75	0.9203	0.7157	0.7777	0.9265	1.2945	1.2151	0.5890	0.7243
0.76	0.9182	0.7090	0.7722	0.9322	1.3148	1.2182	0.5820	0.7348
0.77	0.9160	0.7023	0.7666	0.9377	1.3353	1.2212	0.5751	0.7454
0.78	0.9138	0.6955	0.7611	0.9430	1.3559	1.2241	0.5682	0.7561
0.79	0.9116	0.6887	0.7555	0.9481	1.3766	1.2270	0.5613	0.7666
0.80	0.9094	0.6819	0.7499	0.9529	1.3975	1.2298	0.5545	0.7772
0.81	0.9071	0.6750	0.7442	0.9575	1.4185	1.2324	0.5477	0.7880
0.82	0.9048	0.6681	0.7384	0.9618	1.4397	1.2349	0.5410	0.7987
0.83	0.9024	0.6612	0.7326	0.9660	1.4610	1.2374	0.5343	0.8095
0.84	0.9001	0.6542	0.7268	0.9698	1.4825	1.2397	0.5277	0.8203
0.85	0.8977	0.6472	0.7210	0.9735	1.5042	1.2419	0.5211	0.8312
0.86	0.8953	0.6402	0.7151	0.9769	1.5260	1.2440	0.5146	0.8421
0.87	0.8928	0.6332	0.7092	0.9802	1.5479	1.2461	0.5082	0.8531
0.88	0.8903	0.6261	0.7032	0.9830	1.5701	1.2478	0.5018	0.8641
0.89	0.8878	0.6191	0.6973	0.9859	1.5924	1.2497	0.4954	0.8751

续表

λ	τ(λ)	π(λ)	ε(λ)	q(λ)	y(λ)	f(λ)	r(λ)	M
0.90	0.8853	0.6120	0.6913	0.9883	1.6149	1.2512	0.4891	0.8862
0.91	0.8827	0.6048	0.6852	0.9904	1.6376	1.2525	0.4829	0.8974
0.92	0.8801	0.5977	0.6791	0.9925	1.6605	1.2539	0.4767	0.9086
0.93	0.8775	0.5906	0.6730	0.9943	1.6835	1.2552	0.4705	0.9198
0.94	0.8749	0.5834	0.6669	0.9957	1.7068	1.2561	0.4645	0.9311
0.95	0.8722	0.5763	0.6608	0.9972	1.7302	1.2572	0.4584	0.9424
0.96	0.8695	0.5691	0.6545	0.9981	1.7539	1.2577	0.4525	0.9538
0.97	0.8667	0.5619	0.6483	0.9989	1.7778	1.2583	0.4466	0.9653
0.98	0.8640	0.5547	0.6420	0.9995	1.8018	1.2586	0.4407	0.9768
0.99	0.8612	0.5476	0.6359	1.0000	1.8261	1.2591	0.4349	0.9884
1.00	0.8584	0.5404	0.6296	1.0000	1.8506	1.2591	0.4292	1.0000
1.01	0.8555	0.5332	0.6233	1.0000	1.8754	1.2590	0.4235	1.0117
1.02	0.8527	0.5260	0.6169	0.9995	1.9003	1.2587	0.4179	1.0234
1.03	0.8497	0.5188	0.6105	0.9989	1.9255	1.2583	0.4123	1.0352
1.04	0.8468	0.5116	0.6042	0.9981	1.9509	1.2576	0.4068	1.0471
1.05	0.8439	0.5045	0.5979	0.9972	1.9766	1.2570	0.4014	1.0590
1.06	0.8409	0.4973	0.5914	0.9958	2.0025	1.2559	0.3960	1.0710
1.07	0.8379	0.4902	0.5850	0.9944	2.0286	1.2548	0.3906	1.0830
1.08	0.8348	0.4830	0.5786	0.9926	2.0550	1.2534	0.3854	1.0951
1.09	0.8317	0.4759	0.5722	0.9907	2.0818	1.2520	0.3801	1.1073
1.10	0.8286	0.4688	0.5658	0.9886	2.1087	1.2503	0.3750	1.1196
1.11	0.8255	0.4617	0.5593	0.9862	2.1360	1.2484	0.3698	1.1319
1.12	0.8223	0.4546	0.5528	0.9835	2.1635	1.2463	0.3648	1.1443
1.13	0.8192	0.4475	0.5463	0.9806	2.1913	1.2439	0.3598	1.1567
1.14	0.8159	0.4405	0.5399	0.9777	2.2194	1.2415	0.3548	1.1693
1.15	0.8127	0.4335	0.5334	0.9744	2.2478	1.2388	0.3499	1.1819
1.16	0.8094	0.4265	0.5269	0.9709	2.2765	1.2359	0.3451	1.1946
1.17	0.8061	0.4196	0.5205	0.9674	2.3055	1.2330	0.3403	1.2073
1.18	0.8028	0.4126	0.5140	0.9634	2.3349	1.2296	0.3356	1.2202
1.19	0.7994	0.4057	0.5075	0.9593	2.3646	1.2261	0.3309	1.2331
1.20	0.7961	0.3986	0.5007	0.9545	2.3940	1.2218	0.3263	1.2461
1.21	0.7926	0.3920	0.4946	0.9506	2.4249	1.2186	0.3217	1.2592
1.22	0.7892	0.3852	0.4881	0.9459	2.4556	1.2146	0.3172	1.2723
1.23	0.7857	0.3784	0.4816	0.9410	2.4867	1.2102	0.3127	1.2856
1.24	0.7822	0.3716	0.4751	0.9357	2.5181	1.2055	0.3083	1.2990
1.25	0.7787	0.3649	0.4686	0.9305	2.5500	1.2008	0.3039	1.3124
1.26	0.7752	0.3583	0.4622	0.9252	2.5821	1.1961	0.2996	1.3259
1.27	0.7716	0.3516	0.4557	0.9193	2.6147	1.1907	0.2953	1.3396
1.28	0.7680	0.3450	0.4493	0.9135	2.6477	1.1853	0.2911	1.3533
1.29	0.7643	0.3385	0.4429	0.9075	2.6811	1.1799	0.2869	1.3671
1.30	0.7606	0.3320	0.4365	0.9014	2.7149	1.1741	0.2828	1.3820
1.31	0.7570	0.3255	0.4300	0.8949	2.7492	1.1680	0.2787	1.3950
1.32	0.7532	0.3191	0.4236	0.8883	2.7838	1.1618	0.2747	1.4091
1.33	0.7495	0.3128	0.4173	0.8816	2.8190	1.1555	0.2707	1.4234
1.34	0.7457	0.3065	0.4110	0.8749	2.8545	1.1491	0.2667	1.4377
1.35	0.7419	0.3002	0.4046	0.8677	2.8905	1.1421	0.2629	1.4521



续表

λ	$\tau(\lambda)$	$\pi(\lambda)$	$\varepsilon(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
1.36	0.7380	0.2940	0.3984	0.8606	2.9271	1.1351	0.2590	1.4667
1.37	0.7342	0.2878	0.3920	0.8531	2.9642	1.1277	0.2552	1.4814
1.38	0.7303	0.2817	0.3857	0.8455	3.0017	1.1202	0.2515	1.4960
1.39	0.7264	0.2757	0.3796	0.8381	3.0398	1.1129	0.2477	1.5110
1.40	0.7224	0.2697	0.3733	0.8303	3.0784	1.1051	0.2441	1.5290
1.41	0.7184	0.2637	0.3671	0.8221	3.1176	1.0968	0.2404	1.5412
1.42	0.7144	0.2578	0.3609	0.8140	3.1573	1.0885	0.2368	1.5564
1.43	0.7104	0.2520	0.3548	0.8060	3.1977	1.0803	0.2333	1.5719
1.44	0.7063	0.2463	0.3487	0.7976	3.2386	1.0717	0.2298	1.5875
1.45	0.7022	0.2406	0.3426	0.7891	3.2802	1.0629	0.2263	1.6031
1.46	0.6981	0.2349	0.3365	0.7805	3.3222	1.0539	0.2229	1.6188
1.47	0.6940	0.2294	03305	0.7718	3.3649	1.0447	0.2195	1.6349
1.48	0.6898	0.2238	0.3245	0.7629	3.4083	1.0353	0.2162	1.6510
1.49	0.6856	0.2184	0.3186	0.7540	3.4524	1.0258	0.2129	1.6672
1.50	0.6813	0.2128	0.3126	0.7449	3.4972	1.0160	0.2097	1.6836
1.51	0.6771	0.2077	0.3067	0.7357	3.5426	1.0061	0.2064	1.7002
1.52	0.6728	0.2024	0.3009	0.7265	3.5890	0.9961	0.2032	1.7169
1.53	0.6685	0.1973	0.2951	0.7172	3.6358	0.9858	0.2001	1.7338
1.54	0.6641	0.1921	0.2893	0.7077	3.6836	0.9754	0.1970	1.7508
1.55	0.6597	0.1871	0.2836	0.6982	3.7321	0.9649	0.1939	1.7680
1.56	0.6553	0.1821	0.2779	0.6886	3.7813	0.9541	0.1909	1.7854
1.57	0.6509	0.1772	0.2722	0.6789	3.8316	0.9432	0.1879	1.8029
1.58	0.6464	0.1723	0.2666	0.6691	3.8825	0.9321	0.1849	1.8207
1.59	0.6420	0.1676	0.2610	0.6593	3.9345	0.9209	0.1820	1.8386
1.60	0.6374	0.1628	0.2554	0.6492	3.9874	0.9093	0.1791	1.8567
1.61	0.6329	0.1582	0.2500	0.6394	4.0410	0.8981	0.1762	1.8750
1.62	0.6283	0.1537	0.2446	0.6294	4.0957	0.8865	0.1734	1.8935
1.63	0.6237	0.1492	0.2392	0.6193	4.1514	0.8746	0.1706	1.9122
1.64	0.6191	0.1448	0.2338	0.6092	4.2080	0.8628	0.1678	1.9311
1.65	0.6144	0.1404	0.2286	0.5991	4.2659	0.8508	0.1651	1.9503
1.66	0.6097	0.1362	0.2233	0.5889	4.3250	0.8387	0.1623	1.9696
1.67	0.6050	0.1320	0.2181	0.5786	4.3849	0.8264	0.1597	1.9892
1.68	0.6003	0.1278	0.2130	0.5684	4.4458	0.8141	0.1570	2.0089
1.69	0.5955	0.1238	0.2079	0.5581	4.5082	0.8016	0.1544	2.0290
1.70	0.5907	0.1198	0.2029	0.5478	4.5718	0.7890	0.1519	2.0493
1.71	0.5859	0.1159	0.1979	0.5374	4.6362	0.7764	0.1493	2.0698
1.72	0.5810	0.1121	0.1929	0.5271	4.7027	0.7637	0.1468	2.0906
1.73	0.5761	0.1083	0.1881	0.5168	4.7703	0.7509	0.1443	2.1112
1.74	0.5712	0.1047	0.1833	0.5065	4.8390	0.7381	0.1418	2.1330
1.75	0.5663	0.1011	0.1785	0.4961	4.9090	0.7250	0.1394	2.1546
1.76	0.5613	0.0975	0.1738	0.4858	4.9808	0.7120	0.1370	2.1765
1.77	0.5563	0.0941	0.1691	0.4755	5.0543	0.6990	0.1346	2.1987
1.78	0.5513	0.0907	0.1645	0.4652	5.1291	0.6858	0.1323	2.2211
1.79	0.5462	0.0874	0.1600	0.4550	5.2057	0.6727	0.1299	2.2439
1.80	0.5411	0.0842	0.1555	0.4447	5.2839	0.6595	0.1276	2.2670
1.81	0.5360	0.0810	0.1511	0.4345	5.3642	0.6462	0.1254	2.2905



续表

λ	τ(λ)	π(λ)	ε(λ)	q(λ)	y(λ)	f(λ)	r(λ)	M
1.82	0.5309	0.0779	0.1468	0.4243	5.4459	0.6329	0.1231	2.3143
1.83	0.5257	0.0749	0.1425	0.4142	5.5297	0.6197	0.1209	2.3384
1.84	0.5205	0.0720	0.1383	0.4041	5.6153	0.6063	0.1187	2.3629
1.85	0.5153	0.0691	0.1341	0.3941	5.6835	0.5930	0.1165	2.3877
1.86	0.5100	0.0663	0.1300	0.3841	5.7928	0.5797	0.1144	2.4130
1.87	0.5047	0.0636	0.1260	0.3741	5.8850	0.5664	0.1122	2.4386
1.88	0.4994	0.0609	0.1220	0.3643	5.9795	0.5531	0.1101	2.4647
1.89	0.4941	0.0583	0.1181	0.3545	6.0764	0.5398	0.1081	2.4911
1.90	0.4887	0.0558	0.1142	0.3447	6.1757	0.5266	0.1060	2.5180
1.91	0.4833	0.0534	0.1105	0.3351	6.2779	0.5134	0.1040	2.5454
1.92	0.4779	0.0510	0.1067	0.3256	6.3820	0.5002	0.1020	2.5731
1.93	0.4724	0.0487	0.1031	0.3161	6.4899	0.4871	0.1000	2.6015
1.94	0.4670	0.0465	0.0995	0.3064	6.5949	0.4740	0.0980	2.6302
1.95	0.4615	0.0443	0.0960	0.2973	6.7128	0.4609	0.0961	2.6596
1.96	0.4559	0.0422	0.0925	0.2881	6.8289	0.4480	0.0942	2.6894
1.97	0.4504	0.0402	0.0892	0.2790	6.9487	0.4352	0.0923	2.7198
1.98	0.4448	0.0382	0.0858	0.2700	7.0720	0.4224	0.0904	2.7507
1.99	0.4391	0.0363	0.0826	0.2611	7.1985	0.4097	0.0885	2.7822
2.00	0.4335	0.0344	0.0794	0.2523	7.3288	0.3971	0.0867	2.8143
2.01	0.4278	0.0326	0.0763	0.2436	7.4635	0.3845	0.0849	2.8471
2.02	0.4221	0.0309	0.0733	0.2351	7.6020	0.3723	0.0831	2.8806
2.03	0.4164	0.0293	0.0703	0.2267	7.7448	0.3600	0.0813	2.9147
2.04	0.4106	0.0277	0.0674	0.2183	7.8923	0.3477	0.0795	2.9496
2.05	0.4048	0.0261	0.0645	0.2101	8.0444	0.3357	0.0778	2.9852
2.06	0.3990	0.0247	0.0618	0.2022	8.2016	0.3240	0.0761	3.0215
2.07	0.3931	0.0232	0.0591	0.1942	8.3639	0.3122	0.0744	3.0587
2.08	0.3873	0.0219	0.0564	0.1864	8.5323	0.3005	0.0727	3.0967
2.09	0.3814	0.0205	0.0539	0.1788	8.7059	0.2891	0.0710	3.1356
2.10	0.3754	0.0193	0.0514	0.1713	8.8854	0.2778	0.0694	3.1754
2.11	0.3695	0.0181	0.0489	0.1640	9.0725	0.2668	0.0678	3.2162
2.12	0.3635	0.0169	0.0466	0.1569	9.2652	0.2559	0.0662	3.2579
2.13	0.3574	0.0158	0.0443	0.1500	9.4829	0.2451	0.0646	3.3007
2.14	0.3514	0.0148	0.0420	0.1429	9.6737	0.2345	0.0630	3.3446
2.15	0.3453	0.0138	0.0399	0.1362	9.8903	0.2242	0.0614	3.3897
2.16	0.3392	0.0128	0.0378	0.1296	10.116	0.2140	0.0599	3.4360
2.17	0.3331	0.0119	0.0357	0.1232	10.349	0.2041	0.0583	3.4836
2.18	0.3269	0.0110	0.0338	0.1170	10.592	0.1943	0.0568	3.5324
2.19	0.3207	0.0102	0.0319	0.1109	10.847	0.1847	0.0553	3.5828
2.20	0.3145	0.0094	0.0300	0.1050	11.111	0.1755	0.0539	3.6344
2.21	0.3083	0.0087	0.0282	0.0993	11.388	0.1664	0.0524	3.6877
2.22	0.3020	0.0080	0.0266	0.0937	11.678	0.1575	0.0509	3.7428
2.23	0.2957	0.0074	0.0249	0.0883	11.980	0.1488	0.0495	3.7995
2.24	0.2894	0.0068	0.0233	0.0830	12.297	0.1404	0.0481	3.8579
2.25	0.2830	0.00620	0.0218	0.0780	12.629	0.1323	0.0467	3.9185
2.26	0.2766	0.00560	0.0204	0.0731	12.978	0.1243	0.0453	3.9811
2.27	0.2702	0.00512	0.0190	0.0684	13.345	0.1167	0.0439	4.0458



续表

λ	$\tau(\lambda)$	$\pi(\lambda)$	$\varepsilon(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
2.28	0.2638	0.00465	0.0176	0.0638	13.732	0.1092	0.0426	4.1131
2.29	0.2573	0.00421	0.0163	0.0595	14.139	0.1021	0.0412	4.1828
2.30	0.2508	0.00379	0.0151	0.0553	14.568	0.0951	0.0399	4.2251
2.31	0.2443	0.00341	0.0140	0.0512	15.023	0.0885	0.0385	4.3304
2.32	0.2377	0.00306	0.0129	0.0474	15.505	0.0821	0.0372	4.4086
2.33	0.2311	0.00273	0.0118	0.0437	16.014	0.0759	0.0360	4.4903
2.34	0.2245	0.00243	0.0108	0.0402	16.557	0.0700	0.0347	4.5756
2.35	0.2179	0.00215	0.0099	0.0369	17.136	0.0644	0.0334	4.6647
2.36	0.2112	0.00190	0.0090	0.0337	17.751	0.0590	0.0321	4.7578
2.37	0.2045	0.00167	0.0081	0.0307	18.411	0.0539	0.0309	4.8557
2.38	0.1978	0.00146	0.0074	0.0278	19.118	0.0491	0.0297	4.9586
2.39	0.1910	0.00127	0.0066	0.0252	19.876	0.0445	0.0285	5.0665
2.40	0.1842	0.00109	0.0059	0.0226	20.696	0.0402	0.0272	5.1807
2.41	0.1774	0.00095	0.0053	0.0205	21.579	0.0364	0.0261	5.3011
2.42	0.1706	0.00080	0.0047	0.0181	22.536	0.0323	0.0249	5.4288
2.43	0.1637	0.00068	0.0041	0.0160	23.581	0.0287	0.0237	5.5645
2.44	0.1568	0.00057	0.0036	0.0141	24.719	0.0254	0.0225	5.7089
2.45	0.1499	0.00048	0.0032	0.0124	26.050	0.0223	0.0214	5.8630
2.46	0.1429	0.00039	0.0027	0.0108	27.345	0.0194	0.0203	6.0288
2.47	0.1359	0.00032	0.0024	0.0093	28.863	0.0168	0.0191	6.2067
2.48	0.1289	0.00026	0.0020	0.0079	30.556	0.0144	0.0180	6.3990
2.49	0.1219	0.00021	0.0017	0.0067	32.459	0.0122	0.0169	6.6079
2.50	0.1148	0.000163	0.001420	0.00503	34.587	0.01030	0.01580	6.8355
2.51	0.1077	0.000126	0.001169	0.00466	37.012	0.00853	0.01480	7.0851
2.52	0.1006	$0.955 \cdot 10^{-4}$	0.000949	0.00380	39.796	0.00698	0.01370	7.3614
2.53	0.0934	$0.710 \cdot 10^{-4}$	0.000759	0.00305	43.011	0.00562	0.01273	7.6681
2.54	0.0863	$0.514 \cdot 10^{-4}$	0.000596	0.00240	46.774	0.00444	0.01160	8.0125
2.55	0.0791	$0.362 \cdot 10^{-4}$	0.000457	0.00185	51.242	0.00343	0.01050	8.4028
2.56	0.0718	$0.240 \cdot 10^{-4}$	0.000342	0.00139	56.629	0.00258	0.00952	8.8506
2.57	0.0648	$0.160 \cdot 10^{-4}$	0.000248	0.00101	63.248	0.00188	0.00850	9.3716
2.58	0.0573	$0.986 \cdot 10^{-5}$	0.000172	0.00070	71.572	0.00132	0.00748	9.9892
2.59	0.0499	$0.568 \cdot 10^{-5}$	0.000114	0.00047	82.393	0.00088	0.00648	10.7387
2.60	0.0426	$0.299 \cdot 10^{-5}$	$0.702 \cdot 10^{-4}$	0.00029	96.998	0.00054	0.00548	11.6736
2.61	0.0352	$0.139 \cdot 10^{-5}$	$0.394 \cdot 10^{-4}$	0.00016	117.79	0.00031	0.00450	12.8883
2.62	0.0278	$0.536 \cdot 10^{-6}$	$0.193 \cdot 10^{-4}$	$0.802 \cdot 10^{-4}$	149.68	$0.152 \cdot 10^{-3}$	0.00353	14.5579
2.63	0.0204	$0.153 \cdot 10^{-6}$	$0.750 \cdot 10^{-5}$	$0.313 \cdot 10^{-4}$	205.17	$0.594 \cdot 10^{-4}$	0.00257	17.0777
2.64	0.0129	$0.243 \cdot 10^{-7}$	$0.188 \cdot 10^{-5}$	$0.782 \cdot 10^{-5}$	322.26	$0.150 \cdot 10^{-4}$	0.00162	21.5366
2.65	0.0054	$0.728 \cdot 10^{-9}$	$0.135 \cdot 10^{-6}$	$0.567.10^{-5}$	779.12	$0.108 \cdot 10^{-5}$	0.00067	33.3991
2.657	0	0	0	0	∞	0	0	∞

表 5　等截面绝热摩擦管流（γ=1.4）

M	T/T_*	p/p_*	p_0/p_{0*}	V/V_*或ρ_*/ρ	F/F_*	$\left(4\bar{f}\frac{L}{D}\right)$
0.00	1.2000	∞	∞	0.00000	∞	∞
0.05	1.1994	21.903	11.5914	0.05476	9.1584	280.02
0.10	1.1976	10.9435	5.8218	0.10943	4.6236	66.922
0.15	1.1946	7.2866	3.9103	0.16395	3.1317	27.932
0.20	1.1905	5.4555	2.9635	0.21822	2.4004	14.533
0.25	1.1852	4.3546	2.4027	0.27217	1.9732	8.4834
0.30	1.1788	3.6190	2.0351	0.32572	1.6979	5.2992
0.35	1.1713	3.0922	1.7780	0.37880	1.5094	3.4525
0.40	1.1628	2.6958	1.5901	0.43133	1.3749	2.3085
0.45	1.1533	2.3865	1.4486	0.48326	1.2763	1.5664
0.50	1.1429	2.1381	1.3399	0.53453	1.2027	1.06908
0.55	1.1315	1.9341	1.2549	0.58506	1.1472	0.72805
0.60	1.1194	1.7634	1.1882	0.63481	1.10504	0.49081
0.65	1.10650	1.6183	1.1356	0.68374	1.07314	0.32460
0.70	1.09290	1.4934	1.09436	0.73179	1.04915	0.20814
0.75	1.07856	1.3848	1.06242	0.77893	1.03137	0.12728
0.80	1.06383	1.2892	1.03823	0.82514	1.01853	0.07229
0.85	1.04849	1.2047	1.02067	0.87037	1.00966	0.03632
0.90	1.03270	1.12913	1.00887	0.91459	1.00399	0.014513
0.95	1.01652	1.06129	1.00215	0.95782	1.00093	0.003280
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0
1.05	0.98320	0.94435	1.00203	1.04115	1.00082	0.002712
1.10	0.96618	0.89359	1.00793	1.08124	1.00305	0.009933
1.15	0.94899	0.84710	1.01746	1.1203	1.00646	0.02053
1.20	0.93168	0.80436	1.03044	1.1583	1.01082	0.03364
1.25	0.91429	0.76495	1.04676	1.1952	1.01594	0.04858
1.30	0.89686	0.72848	1.06630	1.2311	1.02169	0.06483
1.35	0.87944	0.69466	1.08904	1.2660	1.02794	0.08199
1.40	0.86207	0.66320	1.1149	1.2999	1.03458	0.09974
1.45	0.84477	0.63387	1.1440	1.3327	1.04153	0.11782
1.50	0.82759	0.60648	1.1762	1.3646	1.04870	0.13605
1.55	0.81054	0.58084	1.2116	1.3955	1.05604	0.15427
1.60	0.79365	0.55679	1.2502	1.4254	1.06348	0.17236
1.65	0.77695	0.53421	1.2922	1.4544	1.07098	0.19022
1.70	0.76046	0.51297	1.3376	1.4825	1.07851	0.20780
1.75	0.74419	0.49295	1.3865	1.5097	1.08603	0.22504
1.80	0.72816	0.47407	1.4390	1.5360	1.09352	0.24189
1.85	0.71238	0.45623	1.4952	1.5614	1.1009	0.25832
1.90	0.69686	0.43936	1.5552	1.5861	1.1083	0.27433
1.95	0.68162	0.42339	1.6193	1.6099	1.1155	0.28989
2.00	0.66667	0.40825	1.6875	1.6330	1.1227	0.30499
2.05	0.65200	0.39389	1.7600	1.6553	1.1297	0.31965



续表

M	T/T_*	p/p_*	p_0/p_{0*}	V/V_*或ρ_*/ρ	F/F_*	$\left(4\bar{f}\frac{L}{D}\right)_*$
2.10	0.63762	0.38024	1.8369	1.6769	1.1366	0.33385
2.15	0.62354	0.36728	1.9185	1.6977	1.1434	0.34760
2.20	0.60976	0.35494	2.0050	1.7179	1.1500	0.36091
2.25	0.59627	0.34319	2.0964	1.7374	1.1565	0.37378
2.30	0.58309	0.33200	2.1931	1.7563	1.1629	0.38623
2.35	0.57021	0.32133	2.2953	1.7745	1.1690	0.39826
2.40	0.55762	0.31114	2.4031	1.7922	1.1751	0.40989
2.45	0.54533	0.30141	2.5168	1.8092	1.1810	0.42113
2.50	0.53333	0.29212	2.6367	1.8257	1.1867	0.43197
2.55	0.52163	0.28323	2.7630	1.8417	1.1923	0.44247
2.60	0.51020	0.27473	2.8960	1.8571	1.1978	0.45259
2.65	0.49906	0.26658	3.0359	1.8721	1.2031	0.46237
2.70	0.48820	0.25878	3.1830	1.8865	1.2083	0.47182
2.75	0.47761	0.25131	3.3376	1.9005	1.2133	0.48095
2.80	0.46729	0.24414	3.5001	1.9140	1.2182	0.48976
2.85	0.45723	0.23726	3.6707	1.9271	1.2230	0.49828
2.90	0.44743	0.23066	3.8498	1.9398	1.2277	0.50651
2.95	0.43788	0.22431	4.0376	1.9521	1.2322	0.51447
3.00	0.42857	0.21822	4.2346	1.9640	1.2366	0.52216
3.50	0.34783	0.16850	6.7896	2.0642	1.2743	0.58643
4.00	0.28571	0.13363	10.719	2.1381	1.3029	0.63306
4.50	0.23762	0.10833	16.562	2.1936	1.3247	0.66764
5.00	0.20000	0.08944	25.000	2.2361	1.3416	0.69381
6.00	0.14634	0.06376	53.180	2.2953	1.3655	0.72987
7.00	0.11111	0.04762	104.14	2.3333	1.3810	0.75281
8.00	0.08696	0.03686	190.11	2.3591	1.3915	0.76820
9.00	0.06977	0.02935	327.19	2.3772	1.3989	0.77898
10.00	0.05714	0.02390	535.94	2.3905	1.4044	0.78683
∞	0	0	∞	2.4495	1.4289	0.82153

表 6 等截面管道有热交换无摩擦的定常流动（$\gamma=1.4$）

M	$\frac{\rho_*}{\rho}$	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{p}{p_*}$	$\frac{P_0}{P_{0*}}$	$\frac{T_0}{T_{0*}}$
0.00	0.00000	0.0	0.24000+1	0.12679+1	0.0
0.01	0.00024	0.57584–3	0.23997+1	0.12678+1	0.47988–3
0.02	0.00096	0.23014–2	0.23987+1	0.12675+1	0.19180–2
0.03	0.00216	0.51710–2	0.23970+1	0.12671+1	0.43099–2
0.04	0.00383	0.91749–2	0.23946+1	0.12665+1	0.76482–2
0.05	0.00598	0.14300–1	0.23916+1	0.12657+1	0.11922–1
0.06	0.00860	0.20529–1	0.23880+1	0.12647+1	0.17119–1
0.07	0.01163	0.27841–1	0.23836+1	0.12636+1	0.23223–1
0.08	0.01522	0.36212–1	0.23787+1	0.12623+1	0.30215–1
0.09	0.01922	0.45616–1	0.23731+1	0.12608+1	0.38075–1
0.10	0.02367	0.56020–1	0.23669+1	0.12591+1	0.46777–1
0.11	0.02856	0.67593–1	0.23600+1	0.12573+1	0.56297–1
0.12	0.03388	0.79698–1	0.23526+1	0.12554+1	0.66606–1
0.13	0.03962	0.92896–1	0.23445+1	0.12533+1	0.77675–1
0.14	0.04578	0.10695+0	0.23359+1	0.12510+1	0.89471–1
0.15	0.05235	0.12181+0	0.23267+1	0.12486+1	0.10196+0
0.16	0.05931	0.13743+0	0.23170+1	0.12461+1	0.11511+0
0.17	0.06666	0.15377+0	0.23067+1	0.12434+1	0.12888+0
0.18	0.07439	0.17078+0	0.22959+1	0.12406+1	0.14324+0
0.19	0.08247	0.18841+0	0.22845+1	0.12377+1	0.15814+0
0.20	0.09091	0.20661+0	0.22727+1	0.12346+1	0.17355+0
0.21	0.09969	0.22533+0	0.22604+1	0.12314+1	0.18943+0
0.22	0.10879	0.24452+0	0.22477+1	0.12281+1	0.20574+0
0.23	0.11821	0.26413+0	0.22345+1	0.12247+1	0.22244+0
0.24	0.12792	0.28411+0	0.22209+1	0.12213+1	0.23948+0
0.25	0.13793	0.30440+0	0.22069+1	0.12177+1	0.25684+0
0.26	0.14821	0.32496+0	0.21925+1	0.12140+1	0.27446+0
0.27	0.15876	0.34573+0	0.21777+1	0.12102+1	0.29231+0
0.28	0.16955	0.36667+0	0.21626+1	0.12064+1	0.31035+0
0.29	0.18053	0.38774+0	0.21472+1	0.12025+1	0.32855+0
0.30	0.19183	0.40887+0	0.21314+1	0.11985+1	0.34686+0
0.31	0.20329	0.43004+0	0.21154+1	0.11945+1	0.36525+0
0.32	0.21495	0.45119+0	0.20991+1	0.11904+1	0.38369+0
0.33	0.22678	0.47228+0	0.20825+1	0.11863+1	0.40214+0
0.34	0.23879	0.49327+0	0.20657+1	0.11822+1	0.42056+0
0.35	0.25096	0.51413+0	0.20487+1	0.11779+1	0.43894+0
0.36	0.26327	0.53482+0	0.20314+1	0.11737+1	0.45723+0
0.37	0.27572	0.55529+0	0.20140+1	0.11695+1	0.47541+0
0.38	0.28828	0.57553+0	0.19964+1	0.11652+1	0.49346+0
0.39	0.30095	0.59549+0	0.19787+1	0.11609+1	0.51134+0
0.40	0.31373	0.61515+0	0.19608+1	0.11566+1	0.52903+0
0.41	0.32658	0.63448+0	0.19428+1	0.11523+1	0.54651+0
0.42	0.33951	0.65346+0	0.19247+1	0.11480+1	0.56376+0
0.43	0.35251	0.67205+0	0.19065+1	0.11437+1	0.58076+0
0.44	0.36556	0.69025+0	0.18882+1	0.11394+1	0.59748+0
0.45	0.37865	0.70804+0	0.18699+1	0.11351+1	0.61393+0
0.46	0.39178	0.72538+0	0.18515+1	0.11308+1	0.63007+0
0.47	0.40493	0.74228+0	0.18331+1	0.11266+1	0.64589+0
0.48	0.41810	0.75871+0	0.18147+1	0.11224+1	0.66139+0
0.49	0.43127	0.77466+0	0.17962+1	0.11182+1	0.67655+0



续表

M	$\dfrac{\rho_*}{\rho}$	$\dfrac{T}{T_*}$	$\dfrac{p}{p_*}$	$\dfrac{P_0}{P_{0*}}$	$\dfrac{T_0}{T_{0*}}$
0.50	0.44444	0.79012+0	0.17778+1	0.11141+1	0.69136+0
0.52	0.47075	0.81955+0	0.17409+1	0.11059+1	0.71990+0
0.54	0.49696	0.84695+0	0.17043+1	0.10979+1	0.74695+0
0.56	0.52302	0.87227+0	0.16678+1	0.10901+1	0.77249+0
0.58	0.54887	0.89552+0	0.16316+1	0.10826+1	0.79648+0
0.60	0.57447	0.91670+0	0.15957+1	0.10753+1	0.81892+0
0.62	0.59978	0.93584+0	0.15603+1	0.10682+1	0.83983+0
0.64	0.62477	0.95298+0	0.15253+1	0.10615+1	0.85920+0
0.66	0.64941	0.96816+0	0.14908+1	0.10550+1	0.87708+0
0.68	0.67366	0.98144+0	0.14569+1	0.10489+1	0.89350+0
0.70	0.69751	0.99290+0	0.14235+1	0.10431+1	0.90850+0
0.72	0.72093	0.10026+1	0.13907+1	0.10376+1	0.92212+0
0.74	0.74392	0.10106+1	0.13585+1	0.10325+1	0.93442+0
0.76	0.76645	0.10171+1	0.13270+1	0.10278+1	0.94546+0
0.78	0.78853	0.10220+1	0.12961+1	0.10234+1	0.95528+0
0.80	0.81013	0.10255+1	0.12658+1	0.10193+1	0.96395+0
0.82	0.83125	0.10276+1	0.12362+1	0.10157+1	0.97152+0
0.84	0.85190	0.10285+1	0.12073+1	0.10124+1	0.97807+0
0.86	0.87207	0.10283+1	0.11791+1	0.10095+1	0.98363+0
0.88	0.89175	0.10269+1	0.11515+1	0.10070+1	0.98828+0
0.90	0.91097	0.10245+1	0.11246+1	0.10049+1	0.99207+0
0.92	0.92970	0.10212+1	0.10984+1	0.10031+1	0.99506+0
0.94	0.94797	0.10170+1	0.10728+1	0.10017+1	0.99729+0
0.96	0.96577	0.10121+1	0.10479+1	0.10008+1	0.99883+0
0.98	0.98311	0.10064+1	0.10236+1	0.10002+1	0.99971+0
1.00	1.00000	0.10000+1	0.10000+1	0.10000+1	0.10000+1
1.02	1.01645	0.99304+0	0.97698+0	0.10002+1	0.99973+0
1.04	1.03246	0.98554+0	0.95456+0	0.10008+1	0.99895+0
1.06	1.04804	0.97755+0	0.93275+0	0.10017+1	0.99769+0
1.08	1.06320	0.96913+0	0.91152+0	0.10031+1	0.99601+0
1.10	1.07795	0.96031+0	0.89087+0	0.10049+1	0.99392+0
1.12	1.09230	0.95115+0	0.87078+0	0.10070+1	0.99148+0
1.14	1.10626	0.94169+0	0.85123+0	0.10095+1	0.98871+0
1.16	1.11984	0.93196+0	0.83222+0	0.10124+1	0.98564+0
1.18	1.13305	0.92200+0	0.81374+0	0.10157+1	0.98230+0
1.20	1.14589	0.91185+0	0.79576+0	0.10194+1	0.97872+0
1.22	1.15838	0.90153+0	0.77827+0	0.10235+1	0.97492+0
1.24	1.17052	0.89108+0	0.76127+0	0.10279+1	0.97092+0
1.26	1.18233	0.88052+0	0.74473+0	0.10328+1	0.96675+0
1.28	1.19382	0.86988+0	0.72865+0	0.10380+1	0.96243+0
1.30	1.20499	0.85917+0	0.71301+0	0.10437+1	0.95798+0
1.32	1.21585	0.84843+0	0.69780+0	0.10497+1	0.95341+0
1.34	1.22642	0.83766+0	0.68301+0	0.10561+1	0.94873+0
1.36	1.23669	0.82689+0	0.66863+0	0.10629+1	0.94398+0
1.38	1.24669	0.81613+0	0.65464+0	0.10701+1	0.93914+0
1.40	1.25641	0.80539+0	0.64103+0	0.10777+1	0.93425+0
1.42	1.26587	0.79469+0	0.62779+0	0.10856+1	0.92931+0
1.44	1.27507	0.78405+0	0.61491+0	0.10940+1	0.92434+0
1.46	1.28402	0.77346+0	0.60237+0	0.11028+1	0.91933+0
1.48	1.29273	0.76294+0	0.59018+0	0.11120+1	0.91431+0

续表

M	$\frac{\rho_*}{\rho}$	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{p}{p_*}$	$\frac{P_0}{P_{0*}}$	$\frac{T_0}{T_{0*}}$
1.50	1.30120	0.75250+0	0.57831+0	0.11215+1	0.90928+0
1.55	1.32142	0.72680+0	0.55002+0	0.11473+1	0.89669+0
1.60	1.34031	0.70174+0	0.52356+0	0.11756+1	0.88419+0
1.65	1.35800	0.67738+0	0.49880+0	0.12066+1	0.87184+0
1.70	1.37455	0.65377+0	0.47562+0	0.12402+1	0.85971+0
1.75	1.39007	0.63095+0	0.45390+0	0.12767+1	0.84784+0
1.80	1.40462	0.60894+0	0.43353+0	0.13159+1	0.83628+0
1.85	1.41829	0.58774+0	0.41440+0	0.13581+1	0.82504+0
1.90	1.43112	0.56734+0	0.39643+0	0.14033+1	0.81414+0
1.95	1.44319	0.54774+0	0.37954+0	0.14516+1	0.80358+0
2.00	1.45455	0.52893+0	0.36364+0	0.15031+1	0.79339+0
2.10	1.47533	0.49356+0	0.33454+0	0.16162+1	0.77406+0
2.20	1.49383	0.46106+0	0.30864+0	0.17434+1	0.75613+0
2.30	1.51035	0.43122+0	0.28551+0	0.18860+1	0.73954+0
2.40	1.52515	0.40384+0	0.26478+0	0.20451+1	0.72421+0
2.50	1.53846	0.37870+0	0.24615+0	0.22218+1	0.71006+0
2.60	1.55046	0.35561+0	0.22936+0	0.24177+1	0.69700+0
2.70	1.56131	0.33439+0	0.21417+0	0.26343+1	0.68494+0
2.80	1.57114	0.31486+0	0.20040+0	0.28751+1	0.67380+0
2.90	1.58008	0.29687+0	0.18788+0	0.31359+1	0.66350+0
3.00	1.58824	0.28028+0	0.17647+0	0.34245+1	0.65398+0
3.10	1.59568	0.26495+0	0.16604+0	0.37408+1	0.64516+0
3.20	1.60250	0.25078+0	0.15649+0	0.40871+1	0.63699+0
3.30	1.60877	0.23766+0	0.14773+0	0.44655+1	0.62940+0
3.40	1.61453	0.22549+0	0.13966+0	0.48783+1	0.62236+0
3.50	1.61983	0.21419+0	0.13223+0	0.53280+1	0.61580+0
3.60	1.62474	0.20369+0	0.12537+0	0.58173+1	0.60970+0
3.70	1.62928	0.19390+0	0.11901+0	0.63488+1	0.60401+0
3.80	1.63348	0.18478+0	0.11312+0	0.69256+1	0.59870+0
3.90	1.63739	0.17627+0	0.10765+0	0.75505+1	0.59373+0
4.00	1.64103	0.16831+0	0.10256+0	0.82268+1	0.58909+0
4.50	1.65588	0.13540+0	0.81772−1	0.12502+2	0.56982+0
5.00	1.66667	0.11111+0	0.66667−1	0.18634+2	0.55556+0
5.50	1.67474	0.92719−1	0.55363−1	0.27211+2	0.54473+0
6.00	1.68093	0.78487−1	0.46693−1	0.38946+2	0.53633+0
6.50	1.68579	0.67263−1	0.39900−1	0.54683+2	0.52970+0
7.00	1.68966	0.58264−1	0.34483−1	0.75414+2	0.52438+0
7.50	1.69279	0.50943−1	0.30094−1	0.10229+3	0.52004+0
8.00	1.69536	0.44910−1	0.26490−1	0.13662+3	0.51647+0
8.50	1.69750	0.39883−1	0.23495−1	0.17992+3	0.51349+0
9.00	1.69930	0.35650−1	0.20979−1	0.23388+3	0.51098+0
9.50	1.70082	0.32053−1	0.18846−1	0.30041+3	0.50885+0
10.00	1.70213	0.28972−1	0.17021−1	0.38161+3	0.50702+0
11.00	1.70423	0.24003−1	0.14085−1	0.59774+3	0.50407+0
12.00	1.70582	0.20207−1	0.11846−1	0.90405+3	0.50181+0
13.00	1.70707	0.17243−1	0.10101−1	0.13267+4	0.50005+0
14.00	1.70806	0.14885−1	0.87146−2	0.18963+4	0.49865+0
15.00	1.70886	0.12979−1	0.75949−2	0.26488+4	0.49752+0
∞	1.71429	0	0	∞	0.48980+0



表 7（a）　垂直于主流的添质流动（γ=1.4）

M	λ	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{p}{p_*}$	$\frac{\rho}{\rho_*}$	$\frac{p_0}{p_{0*}}$	$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_*}$
0.00	0.00000	1.2000	2.4000	2.0000	1.2679	0.0
0.01	0.01095	1.2000	2.3997	1.9998	1.2678	0.021906
0.02	0.02191	1.1999	2.3987	1.9990	1.2675	0.043795
0.03	0.03286	1.1998	2.3970	1.9978	1.2671	0.065650
0.04	0.04381	1.1996	2.3946	1.9962	1.2665	0.087454
0.05	0.05476	1.1994	2.3916	1.9940	1.2657	0.10919
0.06	0.06570	1.1991	2.3880	1.9914	1.2647	0.13084
0.07	0.07664	1.1988	2.3836	1.9883	1.2636	0.15239
0.08	0.08758	1.1985	2.3787	1.9848	1.2623	0.17383
0.09	0.09851	1.1981	2.3731	1.9808	1.2608	0.19513
0.10	0.10944	1.1976	2.3669	1.9763	1.2591	0.21628
0.11	0.12035	1.1971	2.3600	1.9714	1.2573	0.23727
0.12	0.13126	1.1966	2.3526	1.9661	1.2554	0.25808
0.13	0.14217	1.1960	2.3445	1.9604	1.2533	0.27870
0.14	0.15306	1.1953	2.3359	1.9542	1.2510	0.29912
0.15	0.16395	1.1946	2.3267	1.9476	1.2486	0.31931
0.16	0.17482	1.1939	2.3170	1.9407	1.2461	0.33928
0.17	0.18569	1.1931	2.3067	1.9333	1.2434	0.35900
0.18	0.19654	1.1923	2.2959	1.9256	1.2406	0.37847
0.19	0.20739	1.1914	2.2845	1.9175	1.2377	0.39767
0.20	0.21822	1.1905	2.2727	1.9091	1.2346	0.41660
0.21	0.22904	1.1895	2.2604	1.9003	1.2314	0.43524
0.22	0.23984	1.1885	2.2477	1.8912	1.2281	0.45359
0.23	0.25063	1.1874	2.2345	1.8818	1.2247	0.47163
0.24	0.26141	1.1863	2.2209	1.8721	1.2213	0.48937
0.25	0.27217	1.1852	2.2069	1.8621	1.2177	0.50679
0.26	0.28291	1.1840	2.1925	1.8518	1.2140	0.52389
0.27	0.29364	1.1828	2.1777	1.8412	1.2102	0.54066
0.28	0.30435	1.1815	2.1626	1.8304	1.2064	0.55709
0.29	0.31504	1.1801	2.1472	1.8194	1.2025	0.57319
0.30	0.32572	1.1788	2.1314	1.8082	1.1985	0.58895
0.31	0.33637	1.1774	2.1154	1.7967	1.1945	0.60436
0.32	0.34701	1.1759	2.0991	1.7851	1.1904	0.61943
0.33	0.35762	1.1744	2.0825	1.7732	1.1863	0.63414
0.34	0.36822	1.1729	2.0657	1.7612	1.1822	0.64851
0.35	0.37879	1.1713	2.0487	1.7490	1.1779	0.66253
0.36	0.38935	1.1697	2.0314	1.7367	1.1737	0.67619
0.37	0.39988	1.1680	2.0140	1.7243	1.1695	0.68950
0.38	0.41039	1.1663	1.9964	1.7117	1.1652	0.70246
0.39	0.42087	1.1646	1.9787	1.6990	1.1609	0.71508
0.40	0.43133	1.1628	1.9608	1.6863	1.1566	0.72734
0.41	0.44177	1.1610	1.9428	1.6734	1.1523	0.73926
0.42	0.45218	1.1591	1.9247	1.6605	1.1480	0.75084
0.43	0.46257	1.1572	1.9065	1.6475	1.1437	0.76207
0.44	0.47293	1.1553	1.8882	1.6344	1.1394	0.77297
0.45	0.48326	1.1533	1.8699	1.6213	1.1351	0.78353
0.46	0.49357	1.1513	1.8515	1.6082	1.1308	0.79377
0.47	0.50385	1.1492	1.8331	1.5951	1.1266	0.80367
0.48	0.51410	1.1471	1.8147	1.5819	1.1224	0.81326



续表

M	λ	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{p}{p_*}$	$\frac{\rho}{\rho_*}$	$\frac{p_0}{p_{0*}}$	$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_*}$
0.49	0.52433	1.1450	1.7962	1.5687	1.1182	0.82253
0.50	0.53452	1.1429	1.7778	1.5556	1.1141	0.83148
0.52	0.55483	1.1384	1.7409	1.5292	1.1059	0.84847
0.54	0.57501	1.1339	1.7043	1.5030	1.0979	0.86426
0.56	0.59507	1.1292	1.6678	1.4770	1.0901	0.87891
0.58	0.61501	1.1244	1.6316	1.4511	1.0826	0.89246
0.60	0.63481	1.1194	1.5957	1.4255	1.0753	0.90494
0.62	0.65448	1.1143	1.5603	1.4002	1.0682	0.91642
0.64	0.67402	1.1091	1.5253	1.3752	1.0615	0.92693
0.66	0.69342	1.1038	1.4908	1.3506	1.0550	0.93653
0.68	0.71268	1.0984	1.4569	1.3263	1.0489	0.94525
0.70	0.73179	1.0929	1.4235	1.3025	1.0431	0.95315
0.72	0.75076	1.0873	1.3907	1.2791	1.0376	0.96027
0.74	0.76958	1.0815	1.3585	1.2561	1.0325	0.96666
0.76	0.78825	1.0757	1.3270	1.2335	1.0278	0.97235
0.78	0.80677	1.0698	1.2961	1.2115	1.0234	0.97738
0.80	0.82514	1.0638	1.2658	1.1899	1.0193	0.98181
0.82	0.84335	1.0578	1.2362	1.1687	1.0157	0.98566
0.84	0.86140	1.0516	1.2073	1.1481	1.0124	0.98897
0.86	0.87929	1.0454	1.1791	1.1279	1.0095	0.99178
0.88	0.89703	1.0391	1.1515	1.1082	1.0070	0.99412
0.90	0.91460	1.0327	1.1246	1.0890	1.0049	0.99603
0.92	0.93201	1.0263	1.0984	1.0703	1.0031	0.99753
0.94	0.94925	1.0198	1.0728	1.0520	1.0017	0.99865
0.96	0.96633	1.0132	1.0479	1.0342	1.0008	0.99941
0.98	0.98325	1.0066	1.0236	1.0169	1.0002	0.99986
1.00	1.00000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	1.01658	0.99331	0.97698	0.98355	1.0002	0.99986
1.04	1.03300	0.98658	0.95456	0.96754	1.0008	0.99947
1.06	1.04925	0.97982	0.93275	0.95196	1.0017	0.99885
1.08	1.06533	0.97302	0.91152	0.93680	1.0031	0.99800
1.10	1.08124	0.96618	0.89087	0.92205	1.0049	0.99696
1.12	1.09699	0.95932	0.87078	0.90770	1.0070	0.99573
1.14	1.11256	0.95244	0.85123	0.89374	1.0095	0.99434
1.16	1.12797	0.94554	0.83222	0.88016	1.0124	0.99279
1.18	1.14321	0.93861	0.81374	0.86695	1.0157	0.99111
1.20	1.15828	0.93168	0.79576	0.85411	1.0194	0.98930
1.22	1.17319	0.92473	0.77827	0.84162	1.0235	0.98738
1.24	1.18792	0.91777	0.76127	0.82948	1.0279	0.98535
1.26	1.20249	0.91080	0.74473	0.81767	1.0328	0.98324
1.28	1.21690	0.90383	0.72865	0.80618	1.0380	0.98104
1.30	1.23114	0.89686	0.71301	0.79501	1.0437	0.97876
1.32	1.24521	0.88989	0.69780	0.78415	1.0497	0.97643
1.34	1.25912	0.88292	0.68301	0.77358	1.0561	0.97403
1.36	1.27286	0.87596	0.66863	0.76331	1.0629	0.97158
1.38	1.28645	0.86901	0.65464	0.75331	1.0701	0.96909
1.40	1.29987	0.86207	0.64103	0.74359	1.0777	0.96657
1.42	1.31313	0.85514	0.62779	0.73413	1.0856	0.96401



续表

M	λ	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{p}{p_*}$	$\frac{\rho}{\rho_*}$	$\frac{p_0}{p_{0*}}$	$\frac{\dot m}{\dot m_*}$
1.44	1.32623	0.84822	0.61491	0.72493	1.0940	0.96142
1.46	1.33917	0.84133	0.60237	0.71598	1.1028	0.95882
1.48	1.35195	0.83445	0.59018	0.70727	1.1120	0.95620
1.50	1.36458	0.82759	0.57831	0.69880	1.1215	0.95356
1.55	1.39546	0.81054	0.55002	0.67858	1.1473	0.94694
1.60	1.42539	0.79365	0.52356	0.65969	1.1756	0.94031
1.65	1.45439	0.77695	0.49880	0.64200	1.2066	0.93372
1.70	1.48247	0.76046	0.47562	0.62545	1.2402	0.92721
1.75	1.50966	0.74419	0.45390	0.60993	1.2767	0.92078
1.80	1.53598	0.72816	0.43353	0.59538	1.3159	0.91448
1.85	1.56145	0.71238	0.41440	0.58171	1.3581	0.90832
1.90	1.58609	0.69686	0.39643	0.56888	1.4033	0.90229
1.95	1.60993	0.68162	0.37954	0.55681	1.4516	0.89643
2.00	1.63299	0.66667	0.36364	0.54545	1.5031	0.89072
2.10	1.67687	0.63762	0.33454	0.52467	1.6162	0.87981
2.20	1.71791	0.60976	0.30864	0.50617	1.7434	0.86956
2.30	1.75629	0.58309	0.28551	0.48965	1.8860	0.85997
2.40	1.79218	0.55762	0.26478	0.47485	2.0451	0.85101
2.50	1.82574	0.53333	0.24615	0.46154	2.2218	0.84265
2.60	1.85714	0.51020	0.22936	0.44954	2.4177	0.83486
2.70	1.88653	0.48820	0.21417	0.43869	2.6343	0.82761
2.80	1.91404	0.46729	0.20040	0.42886	2.8731	0.82085
2.90	1.93981	0.44743	0.18788	0.41992	3.1359	0.81456
3.00	1.96396	0.42857	0.17647	0.41176	3.4245	0.80869
3.10	1.98661	0.41068	0.16604	0.40432	3.7408	0.80322
3.20	2.00786	0.39370	1.15649	0.39750	4.0871	0.79812
3.30	2.02781	0.37760	0.14773	0.39123	4.4655	0.79335
3.40	2.04656	0.36232	0.13966	0.38547	4.8783	0.78890
3.50	2.06419	0.34783	0.13223	0.38017	5.3280	0.78473
3.60	2.08077	0.33408	0.12537	0.37526	5.8173	0.78083
3.70	2.09639	0.32103	0.11901	0.37072	6.3488	0.77718
3.80	2.11111	0.30864	0.11312	0.36652	6.9256	0.77376
3.90	2.12499	0.29688	0.10765	0.36261	7.5505	0.77054
4.00	2.13809	0.28571	0.10256	0.35897	8.2268	0.76752
4.50	2.19360	0.23762	0.081772	0.34412	12.502	0.75487
5.00	2.23607	0.20000	0.066667	0.33333	18.634	0.74536
5.50	2.26913	0.17021	0.055363	0.32526	27.211	0.73806
6.00	2.29528	0.14634	0.046693	0.31907	38.946	0.73234
6.50	2.31626	0.12698	0.039900	0.31421	54.683	0.72780
7.00	2.33333	0.11111	0.034483	0.31034	75.414	0.72414
7.50	2.34738	0.097959	0.030094	0.30721	102.29	0.72114
8.00	2.35907	0.086957	0.026490	0.30464	136.62	0.71866
8.50	2.36889	0.077670	0.023495	0.30250	179.92	0.71658
9.00	2.37722	0.069767	0.020979	0.30070	233.88	0.71483
9.50	2.38433	0.062992	0.018846	0.29918	300.41	0.71333
10.00	2.39046	0.057143	0.017021	0.29787	381.61	0.71205
∞	2.44949	0.0	0.0	0.28571	∞	0.69985

表7（b）　垂直于主流的添质流动（γ=1.2）

M	λ	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{p}{p_*}$	$\frac{\rho}{\rho_*}$	$\frac{p_0}{p_{0*}}$	$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_*}$
0.00	0.00000	1.1000	2.2000	2.0000	1.2418	0.0
0.02	0.02098	1.1000	2.1989	1.9991	1.2415	0.041933
0.04	0.04195	1.0998	2.1958	1.9965	1.2407	0.083751
0.06	0.06292	1.0996	2.1905	1.9921	1.2392	0.12534
0.08	0.08388	1.0993	2.1832	1.9860	1.2371	0.16658
0.10	0.10483	1.0989	2.1739	1.9783	1.2345	0.20738
0.12	0.12577	1.0984	2.1626	1.9689	1.2313	0.24762
0.14	0.14669	1.0978	2.1494	1.9579	1.2276	0.28720
0.16	0.16760	1.0972	2.1344	1.9454	1.2235	0.32603
0.18	0.18848	1.0964	2.1177	1.9314	1.2188	0.36403
0.20	0.20934	1.0956	2.0992	1.9160	1.2137	0.40111
0.22	0.23018	1.0947	2.0792	1.8994	1.2082	0.43720
0.24	0.25099	1.0937	2.0578	1.8815	1.2023	0.47224
0.26	0.27177	1.0926	2.0349	1.8624	1.1960	0.50616
0.28	0.29252	1.0914	2.0108	1.8424	1.1895	0.53893
0.30	0.31324	1.0902	1.9856	1.8213	1.1827	0.57050
0.32	0.33391	1.0889	1.9592	1.7994	1.1757	0.60084
0.34	0.35455	1.0874	1.9320	1.7767	1.1684	0.62992
0.36	0.37515	1.0859	1.9039	1.7533	1.1610	0.65773
0.38	0.39570	1.0843	1.8751	1.7292	1.1535	0.68426
0.40	0.41621	1.0827	1.8456	1.7047	1.1459	0.70951
0.42	0.43667	1.0809	1.8157	1.6797	1.1383	0.73347
0.44	0.45707	1.0791	1.7853	1.6544	1.1306	0.75617
0.46	0.47743	1.0772	1.7545	1.6287	1.1229	0.77761
0.48	0.49773	1.0752	1.7235	1.6029	1.1153	0.79781
0.50	0.51797	1.0732	1.6923	1.5769	1.1078	0.81680
0.55	0.56831	1.0677	1.6141	1.5117	1.0895	0.85914
0.60	0.61826	1.0618	1.5363	1.4469	1.0722	0.89457
0.65	0.66777	1.0554	1.4599	1.3832	1.0563	0.92366
0.70	0.71681	1.0486	1.3854	1.3212	1.0420	0.94703
0.75	0.76537	1.0414	1.3134	1.2612	1.0296	0.96529
0.80	0.81342	1.0338	1.2443	1.2036	1.0191	0.97905
0.85	0.86093	1.0259	1.1784	1.1486	1.0109	0.98889
0.90	0.90787	1.0176	1.1156	1.0963	1.0049	0.99535
0.95	0.95424	1.0089	1.0562	1.0468	1.0012	0.99890
1.00	1.00000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.05	1.04514	0.99077	0.94705	0.95588	1.0012	0.99903
1.10	1.08965	0.98127	0.89723	0.91436	1.0050	0.99633
1.15	1.13350	0.97152	0.85041	0.87534	1.0114	0.99220
1.20	1.17670	0.96154	0.80645	0.83871	1.0204	0.98691
1.25	1.21922	0.95135	0.76522	0.80435	1.0321	0.98067
1.30	1.26105	0.94098	0.72655	0.77213	1.0466	0.97369
1.35	1.30219	0.93043	0.69030	0.74192	1.0640	0.96612
1.40	1.34264	0.91973	0.65632	0.71360	1.0843	0.95811
1.45	1.38238	0.90890	0.62447	0.68706	1.1077	0.94977
1.50	1.42141	0.89796	0.59459	0.66216	1.1342	0.94120

续表

M	λ	$\frac{T}{T_*}$	$\frac{p}{p_*}$	$\frac{\rho}{\rho_*}$	$\frac{p_0}{p_{0*}}$	$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_*}$
1.55	1.45973	0.88692	0.56657	0.63881	1.1640	0.93249
1.60	1.49734	0.87580	0.54028	0.61690	1.1973	0.92371
1.65	1.53424	0.86461	0.51558	0.59632	1.2342	0.91490
1.70	1.57043	0.85337	0.49239	0.57699	1.2749	0.90613
1.75	1.60591	0.84211	0.47059	0.55882	1.3196	0.89742
1.80	1.64068	0.83082	0.45008	0.54173	1.3686	0.88882
1.85	1.67476	0.81952	0.43078	0.52565	1.4220	0.88034
1.90	1.70813	0.80823	0.41260	0.51050	1.4802	0.87200
1.95	1.74081	0.79696	0.39547	0.49623	1.5435	0.86383
2.00	1.77281	0.78571	0.37931	0.48276	1.6122	0.85584
2.20	1.89410	0.74124	0.32315	0.43596	1.9483	0.82575
2.40	2.00507	0.69797	0.27806	0.39838	2.4050	0.79878
2.60	2.10636	0.65632	0.24144	0.36787	3.0206	0.77486
2.80	2.19865	0.61659	0.21138	0.34281	3.8465	0.75373
3.00	2.28266	0.57895	0.18644	0.32203	4.9512	0.73509
3.20	2.35907	0.54348	0.16556	0.30464	6.4250	0.71866
3.40	2.42857	0.51020	0.14793	0.28994	8.3867	0.70414
3.60	2.49180	0.47909	0.13291	0.27743	10.991	0.69130
3.80	2.54935	0.45008	0.12003	0.26670	14.440	0.67990
4.00	2.60177	0.42308	0.10891	0.25743	18.991	0.66976
5.00	2.80306	0.31429	0.070968	0.22581	73.640	0.63295
6.00	2.93406	0.23913	0.049774	0.20814	266.19	0.61071
7.00	3.02251	0.18644	0.036789	0.19732	875.95	0.59642
8.00	3.08440	0.14865	0.028278	0.19023	2621.1	0.58675
9.00	3.12909	0.12088	0.022403	0.18534	7181.3	0.57993
10.00	3.16228	0.10000	0.018182	0.18182	18182	0.57496

表 8（a） 空气主要组元的量纲为 1 的比定容热容 C_{vi}/R_i

温度	组 元 i						
T/K	N_2	O_2	N	O	N^+	O^+	e^-
500	2.55	2.72					
1000	2.92	3.16		1.52			
2000	3.29	3.46	1.50	1.50			
3000	3.40	3.71	1.52	1.52			
4000	3.44	3.88	1.62	1.56			
5000	3.46	3.97	1.82	1.62	1.63	1.57	1.50
6000	3.47	4.00	2.07	1.68	1.69	1.67	1.50
7000	3.48	3.98	2.30	1.72	1.74	1.82	1.50
8000	3.48	3.96	2.49	1.76	1.77	2.00	1.50
9000	3.49	3.92	2.61	1.77	1.79	2.18	1.50
10000	3.49	3.88	2.66	1.78	1.81	2.34	1.50
11000			2.67	1.78	1.82	2.46	1.50
12000			2.64	1.78	1.83	2.56	1.50
13000			2.57	1.78	1.84	2.63	1.50
14000			2.52	1.77	1.85	2.66	1.50
15000			2.45	1.76	1.85	2.66	1.50

表 8（b） 平衡空气的压缩因子（参考 NACA TN 4150）

温度 T/K	压力/101325Pa						
	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2000	1.000	1.000	1.000	1.001	1.002	1.005	1.016
3000	1.003	1.009	1.026	1.072	1.149	1.192	1.201
4000	1.033	1.088	1.164	1.195	1.209	1.228	1.287
5000	1.115	1.180	1.217	1.252	1.358	1.620	1.908
6000	1.176	1.237	1.316	1.527	1.847	1.979	2.010
7000	1.250	1.351	1.605	1.900	1.988	2.028	2.088
8000	1.343	1.589	1.891	1.986	2.046	2.144	2.446
9000	1.510	1.832	1.990	2.052	2.166	2.510	3.282
10000	1.713	1.970	2.048	2.150	2.462	3.202	3.844
11000	1.864	2.036	2.112	2.352	2.984	3.746	3.969
12000	1.941	2.074	2.234	2.696	3.522	3.930	3.993
13000	2.021	2.138	2.426	3.136	3.818	3.980	3.998
14000	2.074	2.234	2.700	3.526	3.932	3.994	3.999
15000	2.120	2.374	3.030	3.770	3.998	3.998	4.000

表 8（c） 平衡空气的量纲为 1 的声速 $a^2\rho/p$

温度 T/K	压力/101325Pa						
	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
500	1.39	1.39	1.39	1.39	1.39	1.39	1.39
1000	1.34	1.34	1.34	1.34	1.34	1.34	1.34
2000	1.30	1.30	1.30	1.29	1.25	1.21	1.14
3000	1.27	1.23	1.18	1.15	1.15	1.24	1.33
4000	1.21	1.19	1.21	1.30	1.21	1.14	1.10
5000	1.22	1.27	1.21	1.14	1.11	1.10	1.12
6000	1.29	1.19	1.14	1.12	1.14	1.24	1.28
7000	1.20	1.16	1.14	1.17	1.31	1.20	1.13
8000	1.18	1.16	1.19	1.32	1.19	1.13	1.11
9000	1.18	1.19	1.34	1.21	1.14	1.12	1.12
10000	1.20	1.29	1.23	1.16	1.13	1.13	1.17
11000	1.23	1.26	1.19	1.15	1.14	1.17	1.32
12000	1.28	1.23	1.17	1.15	1.16	1.26	1.48
13000	1.34	1.21	1.17	1.17	1.21	1.42	1.55
14000	1.26	1.20	1.18	1.19	1.31	1.50	1.57
15000	1.26	1.20	1.19	1.24	1.54	1.55	1.57



表 8（d）　纯空气的一些化学反应速率常数

反应	M	温度范围/K	速率常数/($L^{n-1}\cdot mol^{1-n}\cdot s^{-1}$)
（1）	O_2	2800～5000	$k_{+1}=1\times10^{13}\exp(-59\ 400/T)$
	O	2800～5000	$k_{+1}=3\times10^{13}\exp(-59\ 400/T)$
	Ar	2800～18000	$k_{+1}=2.5\times10^{13}T^{-1/2}\exp(-59\ 400/T)$
	Ar，N_2，O_2，O	300～6000	$k_{-1}=10^{8}-10^{9}$
（2）	N_2，N	6000～10000	$k_{+2}=7.1\times10^{16}T^{-1}\exp(-113\ 200/T)$
	Ar，Ne	6000～10000	$k_{+2}=4\times10^{16}T^{-1}\exp(-113\ 200/T)$
	N	700～950	$k_{-2}=5\times10^{9}$
	N_2	300～750	$k_{-2}=2\times10^{9}$
（3）	Ar，N_2，O_2	3000～8000	$k_{+3}=3.9\times10^{17}T^{-1.5}\exp(-75\ 500/T)$
	NO，N，O	3000～8000	$k_{+3}=8\times10^{18}T^{-1.5}\exp(-75\ 500/T)$
	N_2	300～350	$k_{-3}=3\times11^{9}$
（4）	……	450～5000	$k_{+4}=3.2\times10^{6}T\exp(-19\ 100/T)$
	……	400～750	$k_{-4}=2\times10^{9}\exp(-3\ 000/T)$
（5）	……	2000～3000	$k_{+5}=5\times10^{10}\exp(-37\ 750/T)$
			$k_{-5}=2\times10^{10}$
（6）	……	3000～8000	$k_{+6}=2\times10^{9}\exp(-31\ 900/T)$
		5100～7800	$k_{-6}=5\times18^{18}T^{-1.5}$

注：（1）$O_2+M \rightleftharpoons 2O+M$　　（4）$NO+O \rightleftharpoons O_2+N$
（2）$N_2+M \rightleftharpoons 2N+M$　　（5）$N_2+O \rightleftharpoons NO+N$
（3）$NO+M \rightleftharpoons N+O+M$　　（6）$N+O \rightleftharpoons NO^{+}+e^{-}$

表 8（e）　平衡空气的粘性系数μ/μ_0

温度 T/K	压力/101325Pa							μ_0/
	10^{2}	10^{1}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	($10^{-3}g\cdot cm^{-1}\cdot s^{-1}$)
500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.267
1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.416
2000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.619
3000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.772
4000	1.003	1.008	1.016	1.020	1.022	1.024	1.032	0.899
5000	1.022	1.036	1.043	1.051	1.074	1.128	1.181	1.011
6000	1.050	1.067	1.090	1.148	1.228	1.257	1.259	1.112
7000	1.089	1.124	1.208	1.294	1.317	1.309	1.273	1.204
8000	1.143	1.238	1.342	1.371	1.355	1.291	1.086	1.289
9000	1.238	1.368	1.425	1.405	1.328	1.085	0.534	1.370
10000	1.361	1.468	1.460	1.389	1.162	0.615	0.140	1.446

表 8（f） 平衡空气的冻结热传导系数 k_f/k_0

温度 T/K	压力/101325Pa							$k_0/4.1868$ $(10^{-3}J \cdot cm^{-1} \cdot K^{-1} \cdot s^{-1})$
	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	
500	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	0.087
1000	1.100	1.100	1.100	1.100	1.100	1.100	1.100	0.135
2000	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	1.178	1.181	0.202
3000	1.205	1.208	1.215	1.235	1.268	1.285	1.289	0.252
4000	1.238	1.270	1.312	1.329	1.340	1.356	1.406	0.293
5000	1.311	1.357	1.389	1.428	1.541	1.777	1.983	0.330
6000	1.383	1.457	1.566	1.824	2.14	2.25	—	0.363
7000	1.519	1.685	2.05	2.38	2.47	—	—	0.393
8000	1.733	2.14	2.55	2.66	—	—	—	0.422
9000	2.10	2.61	2.83	—	—	—	—	0.447
10000	2.53	2.93	—	—	—	—	—	0.472

表 8（g） 空气成分的二元扩散系数 $\bar{D}_{ij}/p$

温 度 T/K	$\bar{D}_{ij}$ / 101325 / $(cm^2 \cdot s^{-1})$						
	N-N_2	N-N^+	O_2-N_2	N-O	e-N	e-N_2	N_2-N^+
1000	2.34	0.313	1.64	3.01	1.58	1.49	1.06
2000	7.95	0.940	5.14	11.0	4.46	2.90	3.99
3000	16.4	1.79	10.0	23.4	8.19	4.65	8.67
4000	27.5	2.83	16.1	39.6	12.6	6.64	15.1
5000	41.2	4.04	23.5	59.3	17.6	8.90	23.1
6000	57.4	5.40	32.1	82.6	23.2	11.2	32.8
7000	76.0	6.91	41.8	109	29.2	13.8	43.9
8000	97.2	8.53	52.7	139	35.7	16.4	56.7
9000	121	10.3	65.2	173	42.6	19.0	71.2
10000	147	12.2	79.0	209	49.8	21.7	86.8

注：参数 Yun K S, Weissman S, Mason E A.

The physics of Fluids, 1962, 5:6



表 8（h）　空气主要组元的一些光谱数据

粒子	分子量 $M/(\mathrm{g\cdot mol^{-1}})$	转动特征温度 $\Theta_{转}/\mathrm{K}$	振动特征温度 $\Theta_{振}/\mathrm{K}$	离解特征温度 $D/k/\mathrm{K}$	电子简并度 g_n	电子特征温度 Θ_n/K	电离特征温度 $I/k/\mathrm{K}$
N_2	28	5.78	3390	113200	1	0	
O_2	32	4.16	2270	59000	3	0	
					2	11390	
					2	18990	
O	16				5	0	158000
					3	228	
					1	326	
					5	22800	
					1	48600	
N	14				4	0	168800
					10	27700	
					6	41500	
O^+	16				4	0	
					10	38600	
					6	58200	
N^+	14				1	0	
					3	70.6	
					5	188.6	
					5	22000	
					1	47000	
					5	67900	
e^-	1/1820				2	0	

表 9　地球标准大气层表

Y/m	T/K	P/Pa	$\rho/(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	$g/(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$	$\dfrac{\mu\times10^5}{\mathrm{kg\cdot m^{-1}\cdot s^2}}$	$\dfrac{\lambda\times10^6/4.1868}{\mathrm{kJ\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}\cdot K^{-1}}}$	$a/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$
0	288.15	1.0133×10^5	1.2250×10^0	9.8066	1.7894	6.0530	340.29
500	284.90	9.5461×10^4	1.1673	9.8051	1.7737	5.9919	338.37
1000	281.65	8.9876	1.1117	9.8036	1.7579	5.9305	336.44
1500	278.40	8.4560	1.0581	9.8020	1.7420	5.8690	334.49
2000	275.15	7.9501	1.0066	9.8005	1.7260	5.8073	332.53
2500	271.91	7.4692	9.5695×10^{-1}	9.7989	1.7099	5.7454	330.56
3000	268.66	7.0121	9.0925	9.7974	1.6938	5.6833	328.58
3500	265.41	6.5780	8.6340	9.7959	1.6775	5.6210	326.59
4000	262.17	6.1660	8.1935	9.7943	1.6612	5.5586	324.59
4500	258.92	5.7753	7.7704	9.7928	1.6448	5.4959	322.57
5000	255.68	5.4048	7.3643	9.7912	1.6282	5.4331	320.55
6000	249.19	4.7218	6.6011	9.7882	1.5949	5.3068	316.45
7000	242.70	4.1105	5.9002	9.7851	1.5612	5.1798	312.31
8000	236.22	3.5652	5.2579	9.7820	1.5271	5.0520	308.11
9000	229.73	3.0801	4.6706	9.7789	1.4926	4.9235	303.85

续表

Y/m	T/K	P/Pa	ρ/(kg·m^{-3})	g/(m·s^{-2})	$\mu\times10^5$ / kg·m^{-1}·s^2	$\lambda\times10^6$/4.1868 / kJ·m^{-1}·s^{-2}·K^{-1}	a/(m·s^{-1})
10000	223.25	2.6500	4.1351	9.7759	1.4577	4.7942	299.53
11000	216.77	2.2700	3.6480	9.7728	1.4223	4.6642	295.14
12000	216.65	1.9399	3.1194	9.7697	1.4216	4.6617	295.07
13000	216.65	1.6580	2.6660	9.7667	1.4216	4.6617	295.07
14000	216.65	1.4170	2.2786	9.7636	1.4216	4.6617	295.07
15000	216.65	1.2112	1.9475	9.7605	1.4216	4.6617	295.07
16000	216.65	1.0353	1.6647	9.7575	1.4216	4.6617	295.07
17000	216.65	8.8497×10^3	1.4230	9.7544	1.4216	4.6617	295.07
18000	216.65	7.5652	1.2165	9.7513	1.4216	4.6617	295.07
19000	216.65	6.4675	1.0400	9.7483	1.4216	4.6617	295.07
20000	216.65	5.5293	8.8910×10^{-2}	9.7452	1.4216	4.6617	295.07
21000	217.58	4.7289	7.5715	9.7422	1.4267	4.6804	295.70
22000	218.57	4.0475	6.4510	9.7391	1.4322	4.7004	296.38
23000	219.57	3.4669	5.5006	9.7361	1.4376	4.7204	297.05
24000	220.56	2.9717	4.6938	9.7330	1.4430	4.7403	297.72
25000	221.55	2.5492	4.0084	9.7300	1.4484	4.7602	298.39
26000	222.54	2.1884	3.4257	9.7269	1.4538	4.7800	299.06
27000	223.54	1.8800	2.9298	9.7239	1.4592	4.7999	299.72
28000	224.53	1.6162	2.5076	9.7208	1.4646	4.8197	300.39
29000	225.52	1.3904	2.1478	9.7178	1.4699	4.8395	301.05
30000	226.51	1.1970	1.8410	9.7147	1.4753	4.8593	301.71
31000	227.50	1.0313	1.5792	9.7117	1.4806	4.8790	302.37
32000	228.49	8.8906×10^2	1.3555	9.7086	1.4859	4.8988	303.03
33000	230.97	7.6731	1.1573	9.7056	1.4992	4.9481	304.67
34000	233.74	6.6341	9.8874×10^{-3}	9.7026	1.5140	5.0031	306.49
35000	236.51	5.7459	8.4634	9.6995	1.5287	5.0579	308.30
36000	239.28	4.9852	7.2579	9.6965	1.5433	5.1125	310.10
37000	242.05	4.3325	6.2355	9.6935	1.5578	5.1670	311.89
38000	244.82	3.7714	5.3666	9.6904	1.5723	5.2213	313.67
39000	247.58	3.2882	4.6267	9.6874	1.5866	5.2577	315.43
40000	250.35	2.8714	3.9957	9.6844	1.6009	5.3295	317.19
42000	255.88	2.1997	2.9948	9.6783	1.6293	5.4370	320.67
44000	261.40	1.6950	2.2589	9.6723	1.6573	5.5438	324.12
46000	266.93	1.3134	1.7141	9.6662	1.6851	5.5601	327.52
48000	270.65	1.0230	1.3167	9.6602	1.7037	5.7214	329.80
50000	270.65	7.9779×10^1	1.0269	9.6542	1.7037	5.7214	329.80
55000	265.59	4.2752	5.6075×10^{-4}	9.6391	1.6784	5.6245	326.70
60000	255.77	2.2461	3.0592	9.6241	1.6287	5.4349	320.61
65000	239.28	1.1446	1.6665	9.6091	1.5433	5.1125	310.10
70000	219.70	5.5205×10^0	8.7535×10^{-5}	9.5941	1.4383	4.7230	297.14
75000	200.15	2.4904	4.335	9.579	1.329	4.327	283.61
80000	180.65	1.0366	1.999	9.564	1.216	3.925	269.44
85000	180.65	4.1250×10^{-1}	7.955×10^{-6}	9.550	1.216	3.925	269.44
90000	180.65	1.6438	3.170	9.535	1.216	3.925	269.44
95000	195.51	6.8012×10^{-2}	1.211	9.520			
100000	210.02	3.0075	4.974×10^{-7}	9.505			



表 10　气体常数表

化学符号	分子量	γ（在 298.15K）(77F)	EE 单位：气体常数 $R=\overline{R}/\overline{M}$ /(ft·lbf/1bm·R)	EE 单位：比热 c_p（在 77°F）/(Btu/1bm·R)	ST 单位：气体常数 $R=\overline{R}/\overline{M}$ /(J/kg·K)	ST 单位：比热 c_p(在 298.15K) /(J/kg·K)
空气	28.964	1.400	53.352	0.2398	287.06	1004.0
A	39.944	1.658	38.687	0.1253	208.15	524.61
CO	28.010	1.398	55.170	0.249	296.83	1042.5
CO_2	44.010	1.288	35.112	0.202	188.92	845.73
H_e	4.000	1.659	386.33	1.250	2078.2	5233.3
H_2	2.016	1.405	766.52	3.149	4124.2	14315.0
CH_4	16.043	1.304	96.322	0.531	518.25	2233.2
N_2	28.013	1.400	55.664	0.248	296.80	1038.3
O_2	32.000	1.395	48.291	0.219	259.82	916.90
H_2O	18.016	1.329	85.774	0.445	461.50	1863.1

表 11　普适物理常数表

光速（在真空中）	c=2.997295(10^{8}m/s) =186282.4mi/sec
重力加速度	g_0=9.80665m/s^2=32.174ft/sec^2
Boltzmann 常数	k=1.38054×10^{-23}J/K
Planck 常数	h=6.626196×10^{-34}J-S
Avogadro 常数	N_A=6.02252×10^{23}Particles/mol
气体常数	R=8.31434J/mol-k =(1545.3ft-lbf/lbmele-R)